Van den Bergh 关于 Hochschild(上) 同调的对偶定理

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 9 月 6 日

下面的 Hochschild 同调与上同调间的对偶定理来自 Van den Bergh.

The Van den Bergh Duality ([VdB98])**.** 设 A 是域 $\Bbbk$ 上同调光滑代数, 如果存在自然数 d 使得 $\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A,A^e)=0,\forall i\neq d$ 并且 $U=\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A,A^e)$ 是可逆 A-A 双模 (即 A 是 d 维斜 Calabi-Yau 代数). 那么对任何 A-A 双模 M, 有 $\Bbbk$-线性同构 $H^i(A,M)\cong H_{d-i}(A,U\otimes_A M),\forall 0\le i\le d$. 此时称 U 是 A 的 **Van den Bergh 对偶模**或简称为**对偶模**, 并称 A 满足 **Van den Bergh 对偶**.

Proof. 因为 A 同调光滑, 由条件以及下面的 **Lemma 2**可知 A 作为左 A^e-模有一个长度为 d 的有限生成投射分解 $(P^\bullet,\delta^\bullet,\varepsilon)$, 并记下述复形为 $(P^\bullet,\delta^\bullet)$:

$$0\longrightarrow P^{-d}\xrightarrow{\delta^{-d}}P^{-d+1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow P^{-1}\xrightarrow{\delta^{-1}}P^0\longrightarrow 0,$$

那么在导出范畴 $\mathbf{D}(A^e\text{-}\mathbf{Mod})$ 中有拟同构 $A\cong P^\bullet$. 根据 Hochschild 上同调的定义, 有

$$H^i(A,M)\cong H^i(\mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(A,M)),$$

因为 A 的投射分解 $P^\bullet\xrightarrow{\varepsilon}A\longrightarrow 0$ 中每个投射模是有限生成的, 所以作为 $\Bbbk$-复形, 在 $\mathbf{D}(\Bbbk\text{-}\mathbf{Mod})$ 内有同构 $\mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(A,M)\cong\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(P^\bullet,M)\cong\mathrm{Hom}_{A^e}(P^\bullet,A^e)\otimes_{A^e}M\cong\mathrm{Hom}_{A^e}(P^\bullet,A^e)\otimes^{\mathbb{L}}_{A^e}M$. 因为 $\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A,A^e)=0,\forall i\neq d$ 并且 $U=\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A,A^e)$, 所以有同构 $\mathrm{Hom}_{A^e}(P^\bullet,A^e)\otimes^{\mathbb{L}}_{A^e}M\cong U[-d]\otimes^{\mathbb{L}}_{A^e}M$. 利用下面的 **Lemma 3**可知 $U[-d]\otimes^{\mathbb{L}}_{A^e}M\cong(A[-d]\otimes^{\mathbb{L}}_A U)\otimes^{\mathbb{L}}_{A^e}M\cong A[-d]\otimes^{\mathbb{L}}_{A^e}(U\otimes^{\mathbb{L}}_A M)$. 因为 U_A 投射, 所以 $U\otimes^{\mathbb{L}}_A M\cong U\otimes_A M$, 从而有

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(A,M)\cong A[-d]\otimes^{\mathbb{L}}_{A^e}(U\otimes^{\mathbb{L}}_A M)\cong A[-d]\otimes^{\mathbb{L}}_{A^e}(U\otimes_A M),$$

于是 $H^i(A,M)\cong H^i(\mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(A,M))\cong H^i(A[-d]\otimes^{\mathbb{L}}_{A^e}(U\otimes_A M))\cong H^{i-d}(A\otimes^{\mathbb{L}}_{A^e}(U\otimes_A M))=\mathrm{Tor}^{A^e}_{d-i}(A,U\otimes_A M)=H_{d-i}(A,U\otimes_A M)$. □

Remark 1. 证明过程中 $(A[-d]\otimes^{\mathbb{L}}_A U)\otimes^{\mathbb{L}}_{A^e}M\cong A[-d]\otimes^{\mathbb{L}}_{A^e}(U\otimes^{\mathbb{L}}_A M)$ 两边的 A^e-模结构都来自外作用.

Lemma 2. 设 R 是含幺环, M 是完备左 R-模, 那么

$$\mathrm{p.dim}_R M=\sup\{i\in\mathbb{Z}|\mathrm{Ext}^i_R(M,R)\neq 0\}.$$

Proof. 不妨设 $M \neq 0$ 并且 $\mathrm{p.dim}_R M = n$, 下面说明 $\mathrm{Ext}_R^n(M,R) \neq 0$. 根据投射维数的刻画, 存在左 R-模 L 使得 $\mathrm{Ext}_R^n(M,L) \neq 0$. 考虑正合列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow L \longrightarrow 0$, 其中 F 是自由左 R-模, 那么它诱导 Ext 群长正合列, 由此可知 $\mathrm{Ext}_R^n(M,F) \neq 0$. 因为 M 存在有限生成的投射分解, 所以应用 [推论**??**] 可得 $\mathrm{Ext}_R^n(M,A) \neq 0$. □

Lemma 3. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上代数, 并设 A 作为左 A^e-模的投射维数是 n, 进而可设 A 作为左 A^e-模的投射分解 $0 \longrightarrow P^{-d} \xrightarrow{\delta^{-d}} P_{-d+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{\delta^{-1}} P^0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$. 那么对任何 A-A 双模 U, 有作为右 A^e-模有正合列

$$0 \longrightarrow P^{-d} \otimes_A U \xrightarrow{\delta^{-d} \otimes 1} P_{-d+1} \otimes_A U \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{-1} \otimes_A U \xrightarrow{\delta^{-1} \otimes 1} P^0 \otimes_A U \longrightarrow U \longrightarrow 0.$$

Proof. 因为 A 作为右 A-模是投射的, 所以上述 A 作为左 A^e-模的投射分解作为右 A-模复形可裂正合, 结合张量函子右正合可知结论成立. □

根据 Calabi-Yau 代数的定义, 我们立即得到下述推论.

Corollary 4. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上 d 维 Calabi-Yau 代数, 则对任何 A-A 双模 M, 有 $\Bbbk$-线性同构

$$H^i(A,M) \cong H_{d-i}(A,M), \forall 0 \leq i \leq d.$$

参考文献

[VdB98] Michel Van den Bergh. A relation between hochschild homology and cohomology for gorenstein rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126(5):1345–1348, 1998.

[VdB02] Michel Van den Bergh. Erratum to “a relation between hochschild homology and cohomology for gorenstein rings”. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 130(9):2809–2810, 2002.