环的平凡扩张

戚天成

2023 年 12 月 16 日

如无特别说明, 所有考虑的含幺环 R 有非零的幺元 $1 \neq 0$.

1 基本性质

Definition 1.1 (平凡扩张)**.** 设 R 是含幺环, M 是 R-R 双模, 在加群 $R \oplus M$ 上定义乘法运算:

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2), \forall (r_1, m_1), (r_2, m_2) \in R \oplus M$$

则 $R \oplus M$ 关于加法与上述乘法构成含幺环, 单位元为 $(1_R, 0)$, 称为环 R(关于双模 ${}_R M_R$) 的**平凡扩张** (trivial extension). 我们把 R 关于双模 M 的平凡扩张记作 $R * M$.

环的平凡扩张是从已知环出发构造新环的重要手段. 例如我们下面通过平凡扩张给一个"环的 Jacobson 根作为左理想未必有限生成"的例子. 先指出一个基本的观察: 对任给 $(1, m) \in R * M$, 有逆元 $(1, -m)$. 对任给 $(s, n), (0, m) \in R * M$, 有 $(1, 0) - (s, n)(0, m) = (1, -sm)$ 可逆, 所以

$$\{(0, m) | m \in M\} \subseteq \operatorname{Jac}(R * M).$$

Example 1.2. 当 R 取为域 F, $M = V$ 是 F-F 双模时, 环 $F * V$ 的 Jacobson 根 $\operatorname{Jac}(F * V) = \{(0, v) | v \in V\}$ 是幂零理想. 特别地, 当 V 的左 F-模结构与右 F-模结构不同时, $F * V$ 可能是非交换环, 且当 ${}_F V$ 是无限维线性空间时, $\operatorname{Jac}(F * V)$ 作为左理想不是有限生成的.

证明: 任取 $(k, v) \in \operatorname{Jac}(F * V)$, 如果 $k \neq 0$, 则 $(1_F, 0) - (k^{-1}, 0)(k, v) = (0, -k^{-1} v)$ 不可逆, 矛盾. 故 $\operatorname{Jac}(F * V) = \{(0, v) | v \in V\}$ 并且它的平方是零理想, 由此知当 ${}_F V$ 是无限维线性空间时 $\operatorname{Jac}(F * V)$ 作为左理想是无限生成的. 下面我们举例说明当 V 的左 F-模结构与右 F-模结构不同时, $F * V$ 可能是非交换环. 取 $F = \mathbb{C}$. 在 $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{C} = \{(a_1, a_2, a_3, ...) = f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{C}, i \mapsto a_i | a_i \in \mathbb{C}, i \geq 1\}$ 上定义左 $\mathbb{C}$-模结构为:

$$k(a_1, a_2, a_3, ...) = (ka_1, ka_2, ka_3, ...), \forall k \in \mathbb{C}$$

右 $\mathbb{C}$-模结构为:

$$(a_1, a_2, a_3, ...)k = (\bar{k} a_1, \bar{k} a_2, \bar{k} a_3, ...), \forall k \in \mathbb{C}$$

, 易见 $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}$-$\mathbb{C}$ 双模, 且左模与右模结构不同. 选取 $k \in \mathbb{C}$ 以及 $v \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{C}$ 使得 $kv \neq vk$, 则

$$(k, 0)(0, v) = (0, kv) \neq (0, vk) = (0, v)(k, 0)$$

表明由 $\mathbb{C}$-$\mathbb{C}$ 双模所决定环 $\mathbb{C}$ 的平凡扩张是非交换环. □

下面介绍一些平凡扩张的基本性质. 首先平凡扩张确实是环的扩张：

Proposition 1.3. 设 R 是含幺环, M 是 R-R 双模, 那么 $i : R \to R * M, a \mapsto (a, 0)$ 是单保幺环同态.

下面的命题说平凡扩张 $R * M$ 保留了 M 作为双模的全部信息.

Proposition 1.4. 设 R 是含幺环, M 是 R-R 双模, 那么 $R * M$ 上有天然的 R-R 双模结构. 若记 $0 * M = \{(0, x) | x \in M\}$, 那么 $0 * M$ 是 $R * M$ 的双边理想且 $(0 * M)^2 = 0$. 此外有双模同构 $0 * M \cong M$.

我们还有下面的基本观察.

Proposition 1.5. 设 R 是含幺环, M 是 R-R 双模, 那么

$$\varphi : R \to (R * M)/(0 * M), a \mapsto (a, 0) + 0 * M$$

是环同构.

Corollary 1.6. 设含幺环 R 是左 Noether 环, M 是 R-R 双模且 ${}_RM$ 有限生成, 则 $R * M$ 是左 Noether 环.

证明: 这时 $(R * M)/(0 * M)$ 是左 Noether 环, 所以它作为左 $R * M$-模是左 Noether 模. 同时, 由 ${}_RM$ 是 Noether 模得到 $0 * M$ 作为左 $R * M$-模也是 Noether 模, 因此 $R * M$ 是左 Noether 环. □

Proposition 1.7. 设含幺环 R 是局部环, $\mathfrak{m}$ 是全体不可逆元构成的理想, 那么对任何 R-R 双模 M, $R * M$ 也是局部环, 且全体不可逆元构成理想 $\mathfrak{m} * M$.

证明: 注意到任何 $(a, x) \in R * M$, 只要 a 是 R 中可逆元, (a, x) 必可逆, 所以 $R * M$ 中不可逆元一定是 $\mathfrak{m} * M$ 中元素, 易见 $\mathfrak{m} * M$ 中元素都不可逆, 所以 $\mathfrak{m} * M$ 就是 $R * M$ 中不可逆元素全体, 它明显是双边理想. □

现在我们局限在交换情形考虑问题.

Proposition 1.8. 设 R 是含幺交换环, M 是 R-模 (天然视作左右模结构一致的双模), 则 $R * M$ 是也交换.

下述命题说交换环的平凡扩张不改变 Krull 维数.

Proposition 1.9. 设 R 是含幺交换环, M 是 R-模, 那么 $\text{k.dim} R = \text{k.dim} R * M$.

证明: 根据 [命题1.5], 我们知道 $\text{k.dim} R = \text{k.dim}(R * M)/(0 * M)$. 而 $(0 * M)^2 = 0$ 表明任何 $R * M$ 素理想包含 $0 * M$, 那么 $\text{k.dim}(R * M)/(0 * M) = \text{k.dim} R * M$. □