张量场与多重线性函数

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 2 月 7 日

在代数场景, 人们常考虑含幺交换环上模上的多重线性函数, 或更一般地, 多重线性映射. 这份笔记主要目的是介绍光滑流形上的光滑张量场可自然产生相应截面模上关于光滑函数环的多重线性函数以及相关基本结论. 由此说明考虑含幺交换环上模上的多重线性函数不仅是域上线性空间上多重线性函数的纯概念推广, 还包含了几何学科中产生的基本研究对象. 主要参考文献是 [Lee12] 和 [Lee18].

1 记号约定

本节我们回顾一些基本术语以固定记号. 固定含幺交换环 K 以及有限生成投射 K-模 V. 称

$$T^{(n,m)}(V) = \underbrace{V \otimes_K \cdots \otimes_K V}_{n\text{项}} \otimes_K \underbrace{V^* \otimes_K \cdots \otimes_K V^*}_{m\text{项}}$$

中的元素为 V 上 (n,m) 型**混合张量**, 这里 $n,m \in \mathbb{N}$(如果 $n=m=0$, 那么 $(0,0)$ 型混合张量就是 K 中元素). 如果 $n=0$, 那么称 $(0,m)$ 型混合张量为 m 阶**协变张量**或**协变 m-张量**. 如果 V 上协变 m-张量 ω 对应的 V 上 m 重 K-线性型是对称的, 称 ω 是 V 上**对称张量**. 如果 ω 对应的 V 上 m 重 K-线性型是交错的, 则称 ω 是**交错张量**. 如果 $m=0$, 称 $(n,0)$ 型混合张量为 n 阶**反变张量**或**反变 m-张量**. 可以把 (n,m) 型混合张量理解为 $V^* \otimes_K \cdots \otimes_K V^*$($m$ 项) 到 $V \otimes_K \cdots \otimes_K V$($n$ 项) 的 K-模同态. m 阶协变张量可以视作 V 上 m 重 K-线性型, n 阶反变张量可以视作 V^* 上 n 重 K-线性型.

设 $\mathcal{M}$ 是光滑流形, $n,m \in \mathbb{N}$. 通过定义

$$T^{(n,m)}T\mathcal{M} = \coprod_{p \in M} T^{(n,m)}T_p\mathcal{M},$$

并设 $\pi : T^{(n,m)}T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是标准投射. 那么 $T^{(n,m)}T\mathcal{M}$ 上有自然的拓扑结构与光滑结构使得 $\pi : T^{(n,m)}T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 成为 $\mathcal{M}$ 上光滑向量丛, 称为 (n,m) 型**混合张量丛**. 如果 $n=0$, 称 $T^{(0,m)}T\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{M}$ 上**协变 m-张量丛**, 记作 $T^mT^*\mathcal{M}$. 如果 $m=0$, 称 $T^{(n,0)}T\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{M}$ 上**反变 n-张量丛**, 记作 $T^nT\mathcal{M}$. 这些向量丛均被称为**张量丛**.

在上述记号下, $T^1T\mathcal{M} = T\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$ 的切丛. $T^1T^*\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$ 的**余切丛**. $T^{(0,0)}T\mathcal{M} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}$ 是 $\mathcal{M}$ 上标准平凡丛. 如果 $\mathcal{M}$ 的维数为 d, 易见张量丛 $T^{(n,m)}T\mathcal{M}$ 作为向量丛的秩为 d^{n+m}.

(n,m) 型混合张量丛的 (连续) 截面称为 (n,m) 型**混合张量场**. 协变 m-张量丛的截面称为**协变 m-张量场**. 反变 n-张量丛的截面称为**反变 n-张量场**. 我们将所有光滑的 (n,m) 型混合张量场构成的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模记作 $\Gamma(T^{(n,m)}T\mathcal{M})$. 光滑协变 m-张量场全体记作 $\mathcal{T}^k(\mathcal{M})$. 光滑反变 n-张量场全体记作 $\Gamma(T^nT\mathcal{M})$.

2 光滑张量场与多重线性函数的对应

设 $\mathcal{M}$ 是光滑流形, 任何光滑 (n,m) 型混合张量场 $A:\mathcal{M}\to T^{(n,m)}T\mathcal{M}$ 可诱导多重 $C^\infty(\mathcal{M})$-线性函数

$$\mathcal{A}:\underbrace{\mathcal{T}^1(\mathcal{M})\times\cdots\times\mathcal{T}^1(\mathcal{M})}_{n\text{项}}\times\underbrace{\mathfrak{X}(\mathcal{M})\times\cdots\times\mathfrak{X}(\mathcal{M})}_{m\text{项}}\to C^\infty(\mathcal{M})$$
$$(\omega_1,...,\omega_n,X_1,...,X_m)\mapsto A(\omega_1,...,\omega_n,X_1,...,X_m),$$

其中 $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 是 $\mathcal{M}$ 上光滑向量场全体, $A(\omega_1,...,\omega_n,X_1,...,X_m):\mathcal{M}\to\mathbb{R},p\mapsto A_p(\omega_1|_p,...,\omega_n|_p,X_1|_p,...,X_m|_p)$. 由 [Lee18, p.398, Lemma B.6], 任何 $\mathcal{T}^1(\mathcal{M})\times\cdots\times\mathcal{T}^1(\mathcal{M})\times\mathfrak{X}(\mathcal{M})\times\cdots\times\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 上的多重 $C^\infty(\mathcal{M})$-线性函数都由某个光滑 (n,m) 型混合张量场如上诱导. 记 $\mathcal{T}^1(\mathcal{M})\times\cdots\times\mathcal{T}^1(\mathcal{M})\times\mathfrak{X}(\mathcal{M})\times\cdots\times\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 上的多重 $C^\infty(\mathcal{M})$-线性函数构成的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模为 $\mathscr{L}(n,m;\mathcal{M})$. 那么可以得到满 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同态 $\theta:\Gamma(T^{(n,m)}T\mathcal{M})\to\mathscr{L}(n,m;\mathcal{M})$ $A\mapsto\mathcal{A}$. 通过把光滑张量场作用到给定光滑坐标卡上的坐标向量场和坐标余切向量场易知 θ 是单射. 因此我们得到 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构 $\Gamma(T^{(n,m)}T\mathcal{M})\cong\mathscr{L}(n,m;\mathcal{M})$. 这给出混合张量丛的光滑截面全体与多重线性函数空间的一一对应. 因此 $\mathcal{T}^1(\mathcal{M})\times\cdots\times\mathcal{T}^1(\mathcal{M})\times\mathfrak{X}(\mathcal{M})\times\cdots\times\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 上的多重 $C^\infty(\mathcal{M})$-线性函数都有了混合张量丛光滑截面的几何解释.

根据混合张量丛的定义, 局部上, $\mathcal{M}$ 每点 p 对应的纤维空间

$$\pi^{-1}(p)=T^{(n,m)}(T_p\mathcal{M})=\underbrace{T_p\mathcal{M}\otimes_\mathbb{R}\cdots\otimes_\mathbb{R}T_p\mathcal{M}}_{n\text{项}}\otimes_\mathbb{R}\underbrace{T_p^*\mathcal{M}\otimes_\mathbb{R}\cdots\otimes_\mathbb{R}T_p^*\mathcal{M}}_{m\text{项}}.$$

整体上, 根据 Swan 定理, $\mathcal{T}^1(\mathcal{M})$ 与 $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 都是有限生成投射 $C^\infty(\mathcal{M})$-模, 因此有 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构

$$\Gamma(T^{(n,m)}T\mathcal{M})\cong\underbrace{\mathfrak{X}(\mathcal{M})\otimes_{C^\infty(\mathcal{M})}\cdots\otimes_{C^\infty(\mathcal{M})}\mathfrak{X}(\mathcal{M})}_{n\text{项}}\otimes_{C^\infty(\mathcal{M})}\underbrace{\mathcal{T}^1(\mathcal{M})\otimes_{C^\infty(\mathcal{M})}\cdots\otimes_{C^\infty(\mathcal{M})}\mathcal{T}^1(\mathcal{M})}_{m\text{项}}.$$

3 对称张量场与 Riemann 度量

设 $\mathcal{M}$ 是光滑流形, 如果协变 m-张量场 $\omega:\mathcal{M}\to T^mT^*\mathcal{M}$ 满足对任何 $p\in\mathcal{M}$, ω_p 是 $T_p\mathcal{M}$ 上对称 m-张量, 则称 ω 是**对称张量场**. 如果 ω 是对称 t-张量场, γ 是对称 s-张量场, 那么 $\omega\otimes\gamma$ 虽然是 $(t+s)$-张量场, 但未必对称. 通常记 $1/2(\omega\otimes\gamma+\gamma\otimes\omega)$ 为 $\omega\gamma$, 易见 $\omega\gamma$ 是对称 $(t+s)$-张量场. 并且当 ω,γ 光滑时, $\omega\gamma$ 也光滑. 称 $\omega\gamma$ 是张量场 ω 与 γ 的**对称积**. 易见 $\omega\gamma=\gamma\omega$. 之后我们主要关注对称 2-张量场.

首先回忆些线性代数中的基本概念. $\mathbb{R}$-线性空间 V 上的**内积**是指 V 上一个正定的双线性函数 $\langle -,-\rangle:V\times V\to\mathbb{R}$, 这里正定是指 $\langle v,v\rangle\geq 0,\forall v\in V$ 且等号成立当且仅当 $v=0$.

对含幺交换环 K 上秩为 n 的自由模 V, 取定基 $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, 如果 $f: V\times V \to K$ 是 V 上双线性函数, 称

$$A = \begin{pmatrix} f(\alpha_1,\alpha_1) & f(\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & f(\alpha_1,\alpha_n) \\ f(\alpha_2,\alpha_1) & f(\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & f(\alpha_2,\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(\alpha_n,\alpha_1) & f(\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & f(\alpha_n,\alpha_n) \end{pmatrix}$$

是 f 在给定基下的**度量矩阵**. 任给 $x, y\in V$, 如果 $x = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n, y = y_1\alpha_1 + \cdots + y_n\alpha_n, x_i, y_j \in K$, 则

$$f(x,y) = X^TAY, X = (x_1, ..., x_n)^T, Y = (y_1, ..., y_n)^T \in K^n.$$

反之, 任给 $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{M}_n(K)$, 命

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j, \forall x = \sum_{i=1}^n x_i\alpha_i, y = \sum_{j=1}^n y_j\alpha_j \in V.$$

那么 $f: V\times V\to K$ 是 V 上双线性函数并且 f 在给定基下度量矩阵就是 A. 若记 $\mathscr{L}(V\times V, K)$ 是 V 上双线性函数全体构成的 K-模, 那么 $\theta: \mathscr{L}(V\times V, K)\to \mathrm{M}_n(K), f\mapsto A$, 这里 A 是 f 在给定基下的度量矩阵, 是满 K-模同构. 从这个角度看研究自由 K-模 V 上的双线性函数问题可转化为 $\mathrm{M}_n(K)$ 中的问题. 易见双线性函数 f 是对称的当且仅当 $\theta(f) = A$ 是对称阵. 所以 V 上的对称双线性型对应于 K 上 n 阶对称阵. 类似地, V 上的交错双线性对应于 K 上主对角线均为零元的反对称阵 (因为有可能 $\mathrm{char}K > 0$).

如果 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 满足 $X^TAX > 0, \forall X\neq 0\in\mathbb{R}^n$, 则称 A 是**正定矩阵**. 因此若取定 $\mathbb{R}$ 上 n 维线性空间 V 的基, 那么 V 上双线性函数 f 是正定的当且仅当 f 在给定基下度量矩阵是正定的. 进而 n 维线性空间 V 上双线性函数 $\langle -,-\rangle: V\times V\to\mathbb{R}$ 是内积当且仅当 f 在给定基下度量矩阵是对称正定矩阵. 如果 $(V, \langle -,-\rangle)$ 是实内积空间, 那么通过定义 $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}, \forall v\in V$ 可使得 $(V, \|\cdot\|)$ 成为实赋范空间, 进而可在 V 上定义长度.

Definition 3.1. 设 $\mathcal{M}$ 是光滑流形, 如果光滑对称 2-张量场 $g: \mathcal{M}\to T^2T^*\mathcal{M}$ 满足对每个 $p\in\mathcal{M}$, 有 g_p 是 $T_p\mathcal{M}$ 上正定双线性型 (即实内积), 则称 g 是 $\mathcal{M}$ 上 **Riemann 度量**. 称 $(\mathcal{M}, g)$ 是 **Riemann 流形**.

Remark. Riemann 流形是 Riemann 几何的主要研究对象. 可以证明任何光滑流形上都存在 Riemann 度量 (见 [Lee12, p.329, Proposition 13.3]). Riemann 度量 g 给出了 Riemann 流形 $\mathcal{M}$ 每点 p 处切空间 $T_p\mathcal{M}$ 上的度量结构, 对 $v, w\in T_p\mathcal{M}$, 常用记号 $\langle v,w\rangle_g$ 代替 $g_p(v,w)$. 记 $\sqrt{\langle v,v\rangle_g}$ 为 $|v|_g$, 称为切向量 v 的**长度**.

设 $(\mathcal{M}, g)$ 是 n 维 Riemann 流形, 那么在每个光滑坐标卡 (U,φ) 上, 若记局部坐标是 (x_i), 那么在 U 上

$$g = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n g_{ij}dx_i\otimes dx_j.$$

这里 $g_{ij}: U\to\mathbb{R}$ 是光滑函数, 并且对每个 $p\in U$, $(g_{ij}(p))_{n\times n}$ 是对称正定矩阵. 在对称积的记号下, 易算得

$$g = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n g_{ij}dx_idx_j.$$

Example 3.2. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上标准坐标, 称 $\overline{g} = \sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n \delta_{ij}dx_idx_j$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上**欧式度量**. 也把它写作

$$\overline{g} = (dx_1)^2 + \cdots + (dx_n)^2.$$

任给 $v,w\in T_p\mathbb{R}^n$, 设 $v=\sum\limits_{i=1}^n v_i(\partial/\partial x_i)|_p, w=\sum\limits_{j=1}^n w_j(\partial/\partial x_j)|_p$, 那么 $\bar{g}_p(v,w)=\sum\limits_{i=1}^n v_iw_i$.

我们可以在 Riemann 流形上进一步赋予度量空间结构. 设 $(\mathcal{M},g)$ 是 Riemann 流形, $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ 是分段光滑的曲线段. 定义 γ 的**长度**为 $L_g(\gamma)=\int_a^b|\gamma'(t)|_g dt$. 对任给 $p,q\in\mathcal{M}$, 定义

$$d_g(p,q)=\inf\{L_g(\gamma)|\gamma\text{是}p\text{到}q\text{的分段光滑曲线段}\},$$

称为 p 到 q 的 **Riemann 距离**. 这诱导映射 $d_g:\mathcal{M}\times\mathcal{M}\to\mathbb{R}$, 可以证明 $(\mathcal{M},d_g)$ 是度量空间并且度量拓扑就是 $\mathcal{M}$ 作为流形自带的拓扑 (见 [Lee12, p.339, Theorem 13.29]).

Definition 3.3. 设 $\xi:\mathcal{E}\to\mathcal{M}$ 是光滑流形 $\mathcal{M}$ 上的光滑向量丛, 记 $\Gamma(\mathcal{E})$ 是截面模. 如果映射

$$\nabla:\mathfrak{X}(\mathcal{M})\times\Gamma(\mathcal{E})\to\Gamma(\mathcal{E}),(X,Y)\mapsto\nabla_XY$$

满足对固定的 $Y\in\Gamma(\mathcal{E})$, 映射 $\mathfrak{X}(\mathcal{M})\to\Gamma(\mathcal{E}),X\mapsto\nabla_XY$ 是 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同态; 对固定的 $X\in\mathfrak{X}(\mathcal{M})$, 映射 $\Gamma(\mathcal{E})\to\Gamma(\mathcal{E}),Y\mapsto\nabla_XY$ 是 $\mathbb{R}$-线性变换; 对任何 $f\in C^\infty(\mathcal{M})$ 满足 $\nabla_X(fY)=f\nabla_XY+(Xf)Y$, 则称 ∇ 为 E 中的**联络**或 **E-联络**. 称 ∇_XY 为 Y 在 X 方向上的**协变导数**.

Definition 3.4. 设 $\xi:\mathcal{E}\to\mathcal{M}$ 是光滑流形 $\mathcal{M}$ 上的光滑向量丛, 并带有联络 $\nabla:\mathfrak{X}(\mathcal{M})\times\Gamma(\mathcal{E})\to\Gamma(\mathcal{E})$. 称

$$R:\mathfrak{X}(\mathcal{M})\times\mathfrak{X}(\mathcal{M})\times\Gamma(\mathcal{E})\to\Gamma(\mathcal{E}),(X,Y,Z)\mapsto\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z$$

为 E-联络 ∇ 的**曲率**. 称曲率为零的 E-联络是**平坦的**.

Definition 3.5. 设 $\xi:\mathcal{E}\to\mathcal{M}$ 是光滑流形 $\mathcal{M}$ 上的光滑向量丛满足 $(\Gamma(\mathcal{E}),[-,-])$ 是 $\mathbb{R}$-Lie 代数, 并有丛态射 $\alpha:\mathcal{E}\to T\mathcal{M}$, 将 α 所诱导的 $\Gamma(\mathcal{E})$ 到 $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同态仍记作 α. 如果进一步满足:
(1) $\alpha([Y_1,Y_2])=[\alpha(Y_1),\alpha(Y_2)],\forall Y_1,Y_2\in\Gamma(\mathcal{E})$;
(2) $[Y_1,fY_2]=f[Y_1,Y_2]+(\alpha(Y_1)f)Y_2,\forall Y_1,Y_2\in\Gamma(\mathcal{E}),f\in C^\infty(\mathcal{M})$,
则称 $(\mathcal{E},[-,-],\alpha)$ 为 **Lie algebroid**. 可类似在 Lie algebroid 场景定义联络和曲率.

参考文献

[Lee12] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218. Springer Science & Business Media, 2012.

[Lee18] J.M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*, volume 176. Springer International Publ., 2018.

[Nes03] J. Nestruev. *Smooth manifolds and observables*, volume 220. Springer, 2003.