极大谱的一些拓扑性质

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 12 月 25 日

这份笔记主要用于记录含幺环的极大谱赋予素谱的 Zariski 子空间拓扑后的一些基本性质. 设 R 是含幺交换环, 那么 $\mathrm{Spec}R$ 是不可约空间的充要条件是素根 $N(R)$ 是 R 的素理想. 使用类似方法可以得到

Proposition 1. 设 R 是含幺交换环, 那么 $\mathrm{maxSpec}R$ 是不可约空间的充要条件是 $\mathrm{Jac}R$ 是素理想.

Proof. 必要性：设理想 I, J 满足 $IJ \subseteq \mathrm{Jac}R$, 那么 $V(I) \cup V(J) = \mathrm{maxSpec}R$. 于是 $V(I)$ 与 $V(J)$ 中至少有一个是 $\mathrm{maxSpec}R$, 不妨设 $V(I) = \mathrm{maxSpec}R$, 那么 I 含于 R 的所有极大理想之交中. 因为 R 是交换的, 所以 $I \subseteq \mathrm{Jac}R$. 充分性：设理想 I, J 满足 $V(I) \cup V(J) = \mathrm{maxSpec}R$, 那么 $IJ \subseteq \mathrm{Jac}R$, 于是 $I \subseteq \mathrm{Jac}R$ 或 $J \subseteq \mathrm{Jac}R$, 不妨设 $I \subseteq \mathrm{Jac}R$, 那么 $V(I) = \mathrm{maxSpec}R$. 这说明 $\mathrm{maxSpec}R$ 是不可约空间. □

一般地, 当 $\mathrm{Spec}R$ 是不可约空间时, 未必有 $\mathrm{maxSpec}R$ 不可约. 下面的例子来自黄逸敏.

Example 2. 设 R 是 P.I.D., 且至少有两个不相伴的素元 p, q. 取 $S = \{a \in R | p, q\text{均不整除}a\}$, 则 R_S 的素谱 $\mathrm{Spec}R$ 是不可约空间但极大谱 $\mathrm{maxSpec}R$ 是可约的.

Proof. 因为 R 是整区, 所以 R_S 仍为整区. 这说明 R_S 的素谱 $\mathrm{Spec}R$ 是不可约空间. 设 R_S 的 Jacobson 根为 I_S, 这里 $I = (a)$ 是 R 的主理想. 那么由 $(p)_S$ 和 $(q)_S$ 是 R_S 的极大理想可知 $I_S \subseteq (p)_S \cap (q)_S$. 由此可直接验证 $a \in (p) \cap (q)$, 因此 pq 整除 a. 这说明 I_S 不是 R_S 的素理想. 由 [命题1] 得到 $\mathrm{maxSpec}R$ 非不可约. □

Proposition 3. 设含幺交换环 R 是 Jacobson 环, 那么 $\mathrm{maxSpec}R$ 不可约的充要条件是 $\mathrm{Spec}R$ 不可约.

Proof. 这时 R 的素根与 R 的 Jacobson 根相同, 所以由 [命题1] 立即得到结论. □

一般地, 交换环的极大谱未必是素谱的开子空间, 也未必是闭子空间.

Example 4. 设 $R = \mathbb{C}[x]$, 那么 $\mathrm{Jac}R = 0$, 所以不存在非零理想 I 使得 $\mathrm{maxSpec}R = V(I) \subseteq \mathrm{Spec}R$. 于是由零理想不是极大理想知 R 的极大谱不是素谱的闭子空间.

Example 5. 设 $R = \mathbb{C}[[x]]$ 为形式幂级数环, 那么 $\mathrm{Spec}R = \{0, (x)\}$ 且 $\mathrm{macSpec}R = \{(x)\}$. 于是由零理想不是 R 的极大理想可知 R 的极大谱不是素谱的开子空间. 这一例子也表明 $\mathrm{macSpec}R$ 在 $\mathrm{Spec}R$ 中未必稠密.