模的基座

戚天成

2023 年 3 月 19 日

每个含幺环有 Jacobson 根的概念, 类似地可定义模的根——全体极大子模之交. 这里的基座是模的根的对偶概念.

1 基本性质

Definition 1.1. 设 R 是含幺环, M 是左 R-模, 称 M 全体不可约子模之和为 M 的**基座** (socle), 记为 $\mathrm{soc}M$. 如果 M 不存在不可约子模, 那么 $\mathrm{soc}M = 0$.

Remark 1.2. 根据定义可知, 当 $\mathrm{soc}M \neq 0$ 时, 它是 M 所包含的最大完全可约模. 所以对非零模 M, M 是完全可约模的充要条件是 $\mathrm{soc}M = M$.

Proposition 1.3. 设 M 是左 R-模, 则 $\mathrm{soc}M$ 是 M 全体本质子模之交.

证明: 记 E 是 M 的全体本质子模之交, 我们需要验证 $\mathrm{soc}M = E$. 因为任何一个单模都含于任意本质子模, 因此 $\mathrm{soc}M \subseteq E$. 下面说明 $E \subseteq \mathrm{soc}M$. 不妨设 $E \neq 0$, 我们说明 E 是完全可约模, 进而得到 E 是一些不可约子模的和. 为此只需证明 E 任何子模 S 是 E 的直和因子. 作 $\{C \subseteq M | C\text{是子模且}C \cap S = 0\}$ 易知它关于集合包含关系构成非空偏序集且任何全序子集有上界, 依 Zorn 引理, 有极大元 C, 那么 $S \oplus C$ 是 M 的本质子模, 由此立即得到 $E = S \oplus (C \cap E)$, 故 S 是 E 的直和因子, 我们得到 E 是完全可约模. □

Corollary 1.4. 设 R 是含幺环, M 是左 R-模, 记 $E(M)$ 是 M 的内射包, 则 $\mathrm{soc}M = \mathrm{soc}E(M)$.

证明: 因为 M 的不可约子模也是 $E(M)$ 的不可约子模, 所以 $\mathrm{soc}M \subseteq \mathrm{soc}E(M)$. 任取 M 的本质子模, 它也一定是 $E(M)$ 的本质子模, 故由基座为全体本质子模之交得到 $\mathrm{soc}M \supseteq \mathrm{soc}E(M)$. □

因为 R 的 Jacobson 根是 R 全体不可约表示的核之交, 所以对每个 $a \in \mathrm{Jac}R$, a 零化任何不可约左 R-模, 那么我们得到 $(\mathrm{Jac}R)(\mathrm{soc}M) = 0$. 也就是说 $\mathrm{soc}M \subseteq \{x \in M | \mathrm{Jac}(R)x = 0\}$. 一个基本的观察是：

Lemma 1.5. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是局部环, 这里 $\mathfrak{m}$ 表示全体不可逆元构成的理想. 那么任何左 R-模 M 满足

$$\mathrm{soc}M = \{x \in M | \mathrm{Jac}(R)x = 0\}.$$

那么我们可以问：

Question 1.6. 设 M 是左 R-模, 是否总有 $\mathrm{soc}M = \{x \in M | \mathrm{Jac}(R)x = 0\}$ 成立?

Proposition 1.7. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是交换局部环, 那么任何 R-模 M 满足 k-线性同构 $\mathrm{soc}M \cong \mathrm{Hom}_R(k, M)$.