离散赋值环与仿射曲线的光滑性

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 11 月 7 日

1 离散赋值环

我们知道代数闭域上仿射簇在一点处光滑的充要条件是该簇在此点处局部环是正则局部环. 本节介绍的离散赋值环是一类特殊的 1 维 Noether 局部整区 (见 [定理1.12]), 它是对应于仿射曲线在一点处光滑性的代数概念. 我们将看到仿射曲线在一点处光滑的充要条件是该曲线在这点处局部环是离散赋值环 [例2.1].

Definition 1.1. 设 F 是域, F 上的**离散赋值**是指满足下述条件的满射 $v: F^* \to \mathbb{Z}$:
(1) $v(xy) = v(x) + v(y), \forall x, y \in F^*$, 即 v 是乘法群 F^* 到加法群 $\mathbb{Z}$ 的群同态;
(2) $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}, \forall x, y, x+y \in F^*$.

Remark 1.2. 若考虑 F^* 的子集 $\{x \in F^* | v(x) \geq 0\}$, 那么该子集与零元构成 F 的子环 R, 易见 R 是整区并且由 $v(1) = 0$ 以及 $v(1) = v(x) + v(x^{-1}), \forall x \in F^*$ 可知对任何 $x \in F^*$, 有 $x \in R$ 或 $x^{-1} \in R$. 进而知 F 中元素总可表示为 $as^{-1}, a, s \in R$ 的形式, 这说明 F 是 R 的商域. 回忆整区 R 被称为**赋值环**, 如果 R 的商域中任何非零元 x 满足 $x \in R$ 或 $x^{-1} \in R$. 因此前面的观察表明任何域 F 上的离散赋值 $v: F^* \to \mathbb{Z}$ 能够产生赋值环 $R = \{x \in F^* | v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$, 称为**离散赋值 v 的赋值环**. 有时通过定义 $v(0) = +\infty$ 将 v 延拓至 F 上.

Example 1.3. 固定素数 p, 定义 $v: \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Z}$ 为: 对任何非零有理数 $x \in \mathbb{Q}$, 可表示为 $p^n y$ 的形式, 其中 n 是整数, y 是分子分母不含素因子 p 的有理数. 算术基本定理保证了 n 不依赖于满足上条件分解的选取方式, 置 $v(x) = n$. 易见如上定义的映射 $v: \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Z}$ 是满射且是 $\mathbb{Q}$ 上的离散赋值. 这时 v 的赋值环同构于 $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Remark 1.4. 一般地, 如果 R 是 U.F.D., 取定 R 的素元 p, 都可以类似构造 R 商域上的离散赋值.

在进一步介绍离散赋值环的刻画前, 回忆赋值环所具有的基本性质.

Lemma 1.5. 设整区 R 是赋值环, 那么 R 是局部整闭整区并且 R 和其商域间的整区也是赋值环.

Proof. 要说明 R 是局部环只需验证 R 所有不可逆元构成理想. 由 R 的交换性, 只需验证任意两个非零不可逆元之和也是不可逆元. 设 R 所有不可逆元构成的集合为 $\mathfrak{m}$, 则对非零元 $a, b \in \mathfrak{m}$, 有 $a^{-1}b \in R$ 或 $ab^{-1} \in R$. 不妨设 $a^{-1}b \in R$, 那么 $a + b = a(1 + a^{-1}b) \in \mathfrak{m}$. 因此赋值环是局部整区. 根据赋值环的定义不难看出介于赋值环与其商域之间的整区都是赋值环. 最后我们需要说明赋值环 R 在其商域 F 内整闭. 任取 $\alpha \in F$ 为 R 上整元, 那么存在正整数 n 以及 $a_0, ..., a_{n-1} \in R$ 使得 α 满足 $a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \alpha^n = 0$. 如果 $\alpha \notin R$, 那么 $\alpha^{-1} \in R$, 于是由 $a_0\alpha^{1-n} + a_1\alpha^{2-n} + \cdots + a_{n-1} + \alpha = 0$ 得到 $\alpha \in R$, 矛盾. 故 R 是整闭局部整区. □

Definition 1.6. 设 R 是整区, 称 R 为**离散赋值环**, 如果 R 的商域上存在离散赋值 v 使得 R 是 v 的赋值环.

Remark 1.7. 根据 [引理1.5] 可知离散赋值环是局部整区. 设 R 是离散赋值环, 则有其商域上的离散赋值 $v: F^* \to \mathbb{Z}$ 使得 R 是 v 的赋值环. 如果 $x \in R$ 满足 $v(x) > 0$, 那么 x 是 R 中不可逆元, 否则 $x^{-1} \in R$ 蕴含 $0 = v(1) = v(x) + v(x^{-1}) > 0$, 矛盾. 类似地, 易验证 R 中可逆元在 v 下的像为零. 由此可知 R 中所有不可逆元构成的唯一的极大理想 $\mathfrak{m} = \{x \in R | v(x) > 0\}$($v$ 的满射条件保证了 $\mathfrak{m} \neq 0$). 由此可知离散赋值环 R 的任意两个元素 $x, y \in R$ 只要在离散赋值 v 下具有相同的取值, 那么 $(x) = (y)$: 这时有 $v(x) = v(y)$, 如果 $x = y = 0$, 结论直接成立. 下设 $y \neq 0$, 那么 $v(x) = v(y)$ 蕴含 $v(xy^{-1}) = 0$, 因此 $xy^{-1} \in R$(回忆根据定义 R 便含有 F 中所有在 v 作用下非负的元素) 且 xy^{-1} 是 R 中可逆元. 这意味着 (x) 与 (y) 是 R 的两个相同的主理想.

事实上整环的离散赋值性蕴含了 Noether 性质, 具体地, 对每个自然数 k, 记 $\mathfrak{m}_k = \{a \in R | v(a) \geq k\}$, 我们说明离散赋值环 $(R, \mathfrak{m})$ 的任何非零理想都在理想降链 $R = \mathfrak{m}_0 \supseteq \mathfrak{m}_1 \supseteq \mathfrak{m}_2 \supseteq \cdots$ 中. 根据之前的约定, $v(0) = +\infty$, 所以由 R 是离散赋值环不难看到每个 $\mathfrak{m}_k$ 都是 R 的理想. 任取 R 的非零理想 I, 置 $k = \min\{v(a) | a \neq 0 \in I\}$, 下面验证 $I = \mathfrak{m}_k$. 根据 k 的选取方式立即有 $I \subseteq \mathfrak{m}_k$ 且存在 $a \neq 0 \in I$ 使得 $v(a) = k$. 对每个 $b \neq 0 \in R$, 只要 $v(b) \geq k$, 那么存在自然数 n 使得 $v(ba^{-1}) = v(b) - v(a) \geq 0$, 这说明 $ba^{-1} \in R$, 从而 $b \in (a) \subseteq I$, 这就说明了 $\mathfrak{m}_k \subseteq I$. 并注意到 R 唯一的极大理想 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1$. 由此得到:

Proposition 1.8. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是离散赋值环, R 的商域 F 上有离散赋值 $v: F^* \to \mathbb{Z}$, 对每个自然数 k, 记 $\mathfrak{m}_k = \{a \in R | v(a) \geq k\}$. 那么每个 $\mathfrak{m}_k$ 为 R 的理想并且 R 的任何非零理想都为理想降链 $R = \mathfrak{m}_0 \supseteq \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \supseteq \mathfrak{m}_2 \supseteq \cdots$ 中的某项 (因为 v 是满射所以该降链严格). 特别地, 离散赋值环总是 Noether 局部整区.

Example 1.9. 设 $R = \Bbbk[[x]]$ 是域 $\Bbbk$ 上形式幂级数环, 那么 R 是主理想整区, 它的任何非零理想形如 $(x^s), s \in \mathbb{N}$. 不难看出 $x \in R$ 是 R 作为 P.I.D. 的一个素元, 因此该素元可诱导 R 的商域上的一个离散赋值 $v: \Bbbk(x)^* \to \mathbb{N}$, 这里 v 将每个非零有理函数映射至将有理函数表示为 $x^n f/g$(这里 f, g 是常数项非零的形式幂级数, n 是整数) 后 x 的幂指数 n. 注意到 R 中元素可逆当且仅当该元素是常数项非零的形式幂级数, 所以 v 的赋值环就是 R, 这说明 R 是离散赋值环.

如果 $(R, \mathfrak{m})$ 的商域 F 上的离散赋值是 $v: F^* \to \mathbb{Z}$, 那么由 v 是满射便知存在 $x \neq 0 \in R$ 使得 $v(x) = 1$, 这意味着 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 = (x)$. 于是对任何自然数 k 有 $\mathfrak{m}_k = (x^k)$, 进而知 R 所有非零理想都出现在理想降链 $R \supsetneq (x) \supsetneq (x^2) \supsetneq \cdots$ 中, 这是形式幂级数环理想特征的推广. 我们把这总结为:

Proposition 1.10. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是离散赋值环, 并设其商域 F 上的离散赋值是 $v: F^* \to \mathbb{Z}$, 取 $x \in \mathfrak{m}$ 满足 $v(x) = 1$, 那么 R 的任何非零理想形如 $(x^s), s \in \mathbb{N}$. 特别地, 离散赋值环是主理想局部整区, 并且 $\mathfrak{m} \neq 0$.

Remark 1.11. 根据该命题, 离散赋值环 $(R, \mathfrak{m})$ 的素理想只有 0 与 $\mathfrak{m}$, 故 $\text{k.dim}R = 1$.

前面我们看到离散赋值环总是 1 维 Noether 局部整区, 现在可以给出离散赋值环的等价刻画.

Theorem 1.12. 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是 1 维交换 Noether 局部整区, 其中 $k = R/\mathfrak{m}$, 那么以下六条等价：
(1) R 是离散赋值环.
(2) R 是整闭整区.
(3) $\mathfrak{m}$ 是主理想.
(4) $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$.

(5) R 的任何非零理想是 $\mathfrak{m}$ 的自然数幂.
(6) 存在 $x \in R$ 使得 R 的任何非零理想形如 $(x^s), s \in \mathbb{N}$.

Proof. (1)⇒(2): 根据 [引理1.5], 任何赋值环是整闭整区, 所以离散赋值环也是整闭整区.

(2)⇒(3): 因为 R 是 1 维局部整区, 所以 R 的非零素理想只有 $\mathfrak{m}$. 这意味着 R 的任何非零真理想 I 的根理想 $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$, 所以由 R 的 Noether 性立即得到存在正整数 n 使得 $\mathfrak{m}^n \subseteq I$. 现设 $a \neq 0 \in \mathfrak{m}$ 并取 $I = (a)$. 不妨设 n 是满足条件的最小正整数, 那么 $\mathfrak{m}^{n-1} \nsubseteq (a)$ 且 $\mathfrak{m}^n \subseteq (a)$, 所以可取 $b \in \mathfrak{m}^{n-1}$ 满足 $b \notin (a)$. 置 $x = ab^{-1} \in F$, 这里 F 是 R 的商域. 下面说明 $\mathfrak{m} = Rx$ 来得到 $\mathfrak{m}$ 是主理想. 因为 $b \notin (a)$, 所以 $x^{-1} \notin R$, 进而 x^{-1} 不是 R 上整元. 这说明 $x^{-1}\mathfrak{m} \nsubseteq \mathfrak{m}$(若不然, 注意到 $\mathfrak{m}$ 是有限生成 R-模, 设作为 R-模有生成元集 $\{y_1, ..., y_n\}$, 那么利用 xy_i 可被 $\{y_1, ..., y_n\}$ 来 R-线性表出可知存在 $A \in \mathrm{M}_n(R)$ 使得 $x^{-1}(y_1, ..., y_n)^T = A(y_1, ..., y_n)^T$, 进而知 $\det(x^{-1}I_n - A) \in \mathrm{Ann}_{R[x^{-1}]}\mathfrak{m}$, 因为 $\mathfrak{m}$ 作为 $R[x^{-1}]$-模是忠实的, 所以 $\det(x^{-1}I_n - A) = 0$, 由此得到 x^{-1} 是 R 上整元). 此外, 由 $b\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^n \subseteq (a)$ 得到 $x\mathfrak{m} = a^{-1}b\mathfrak{m} \subseteq R$, 因此 $x^{-1}\mathfrak{m}$ 是 R 的不含于 $\mathfrak{m}$ 的理想. 于是由 R 是局部环迫使 $x^{-1}\mathfrak{m} = R$, 即有 $\mathfrak{m} = Rx$, 这说明 $\mathfrak{m}$ 是 R 的主理想.

(3)⇒(4): R 作为 1 维局部整区可得 $\mathfrak{m} \neq 0$, 结合 $\mathfrak{m}$ 是有限生成 R-模, 由 Nakayama 引理得到 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$. 因此由 $\mathfrak{m}$ 作为 R-模可由一个元素生成立即得到 $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$.

(4)⇒(5): 在 (2)⇒(3) 的过程中已经指出 R 的任何非零理想 I 满足存在正整数 n 使得 $\mathfrak{m}^n \subseteq I$. $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$ 表明 $\mathfrak{m}$ 是主理想. 现考察商环 $R/\mathfrak{m}^n$, 易见该商环任何素理想是极大的, 所以由 R 是 Noether 环知 $R/\mathfrak{m}^n$ 是 Artin 局部环, 由下面的 [引理1.14] 知 $I/\mathfrak{m}^n$ 是主理想并且是 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n$ 的自然数幂. 故 I 是 $\mathfrak{m}$ 的自然数幂.

(5)⇒(6): 这时 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$, 故可取 $x \in \mathfrak{m}$ 满足 $x \notin \mathfrak{m}^2$. 那么由条件知 $(x) = \mathfrak{m}$, 其余明显成立.

(6)⇒(1): 首先 x 不是可逆元, 否则 R 是域. 所以 $\mathfrak{m} = (x)$, 进而 Nakayama 引理保证了 $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}, \forall n \geq 1$. 这也说明 $(x^n) \supsetneq (x^{n+1}), \forall n \geq 1$. 所以对任何 $a \neq 0 \in R$, 存在唯一的自然数 k 使得 $(a) = (x^k)$. 于是对任何非零元 $a, b \in R$, 通过定义 $v(ab^{-1}) = v(a) - v(b)$, 可直接验证 $v : F \to \mathbb{Z}$ 是定义合理的离散赋值映射. 并且 v 的赋值环就是 R, 因此 R 是离散赋值环. □

Remark 1.13. 如果 1 维 Noether 局部整区 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 的 P.I.D., 那么 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$ 且 R 的任何主理想 $I \neq 0$ 满足存在正整数 n 使得 $\mathfrak{m}^n \subseteq I$, 进而下面的 [引理1.14] 保证了 Artin 局部环 $R/\mathfrak{m}^n$ 的任何非零理想是 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n$ 的自然数幂, 由此得到 R 的任何非零理想是 $\mathfrak{m}$ 的自然数幂. 所以 1 维 Noether 局部整区是 P.I.D. 的充要条件是它是离散赋值环. 或者说一个整区是离散赋值环当且仅当它是主理想局部整区且不是域.

Lemma 1.14. 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是 Artin 局部环, 则以下三条等价:
(1) R 的任何理想是主理想.
(2) R 唯一的极大理想 $\mathfrak{m}$ 是主理想.
(3) $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq 1$.
并且当 $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$ 时, R 任何非零理想是 $\mathfrak{m}$ 的自然数幂.

Proof. 只需验证 (3)⇒(1): 如果 $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 0$, 由 Nakayama 引理可知 $\mathfrak{m} = 0$, 所以 R 是域. 下设 $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$, 那么存在 $x \in R$ 使得 $(x) = \mathfrak{m}$. 对 R 的任何非零真理想 I, 由 $\mathfrak{m} = \mathrm{Jac}(R)$ 是幂零理想知存在正整数 n 使得 $I \subseteq \mathfrak{m}^n$ 但 $I \nsubseteq \mathfrak{m}^{n+1}$. 易见 $I \subseteq (x^n)$. 因为 $I \nsubseteq \mathfrak{m}^{n+1}$, 所以存在 $y = ax^n \in I$ 使得 $y \notin \mathfrak{m}^{n+1}$, 这说明 $a \notin \mathfrak{m}$. 于是 a 是 R 中可逆元, 进而 $x^n \in I$, 所以 $I = (x^n) = \mathfrak{m}^n$. □

Corollary 1.15. 设 R 是 1 维交换 Noether 局部整区, 那么 R 是正则局部环的充要条件是 R 是离散赋值环.

2 仿射曲线的光滑性

设 X 是拓扑空间, 称 $\sup\{n \in \mathbb{N} | X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n$是不可约闭子集链$\}$ 是 X 的 (Krull) **维数**, 记作 $\dim X$. 设 $p \in X$, 称 $\sup\{n \in \mathbb{N} | X_0 = \{p\} \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n$是不可约闭子集链$\}$ 为 p **点的局部维数**, 记为 $\dim_p X$. 回忆代数闭域 $\Bbbk$ 上任何仿射簇 $X \subseteq \Bbbk^n$ 坐标环的 Krull 维数与该仿射簇作为拓扑空间的维数一致. 类似地, 局部维数定义立即看到仿射簇 X 在点 p 处局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 的 Krull 维数就是 p 所在的 X 不可约分支中维数最大者的维数. 特别地, 不可约仿射簇每一点的局部维数就是该仿射簇的维数.

Example 2.1. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇. 称 X 是**仿射曲线**, 如果 X 不可约且 $\dim X = 1$. 那么根据仿射簇坐标环的维数刻画知一个仿射簇是曲线等价于说该仿射簇坐标环是整区且 Krull 维数是 1. 回忆仿射簇 X 在点 p 处光滑的充要条件是局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是正则局部环. 因此仿射曲线 X 在点 $p \in X$ 处光滑时, $\mathcal{O}_{X,p}$ 是 Noether 局部整区. 通过 X 是仿射曲线, 即由 $\text{k.dim} A(X) = \text{k.dim } \Bbbk[x_1, ..., x_n]/I(X) = 1$ 以及 $I(X)$ 是 $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 的素理想知 $\mathcal{O}_{X,p}$ 的 Krull 维数恰好是 1(利用局部化的局部整体性质以及 $I(X)$ 是非极大的素理想). 因此仿射曲线在一点处的局部环总是 1 维 Noether 局部整区. 对交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$, 若记 $k = R/\mathfrak{m}$, 那么总有 $\text{k.dim} R \leq \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, 这里不等号的等号成立当且仅当 R 是正则局部环. 因此, 一条仿射曲线 X 在一点 p 处光滑的充要条件是该仿射曲线在这点处的局部环 $(\mathcal{O}_{X,p}, \mathfrak{m}, k)$ 满足 $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$. 根据 [定理1.12] 立即得到仿射曲线在一点处光滑的充要条件是该仿射曲线在这点处的局部环是离散赋值环.