光滑流形的光滑函数环

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 7 月 23 日

研究几何对象上的函数环的代数结构来获取几何信息一直是几何学科中的经典思想. 例如, 域上的仿射簇同构的充要条件是它们具有同构的坐标环 [Har77, p.19, Proposition 3.5]. 因为交换环的 Morita 等价就是同构, 所以域上仿射簇 X,Y 满足 $X\cong Y$ 的充要条件是 $\mathcal{O}(X)$-**Mod** $\cong \mathcal{O}(Y)$-**Mod**, 其中 $\mathcal{O}(X),\mathcal{O}(Y)$ 分别表示 X 和 Y 的坐标环. 这一观察说明研究仿射簇正则函数代数的表示范畴已经蕴含了簇所有的几何信息. 在范畴层面, 代数闭域 $\Bbbk$ 上的仿射簇范畴与 $\Bbbk$-有限生成约化交换代数范畴间有自然的范畴对偶 (不可约的情形可见 [Har77, p.20, Corollary 3.8]). 如果考虑交换环范畴, 那么仿射概形范畴与交换环范畴范畴对偶 [GW20, p.61, Theorem 2.35]. 类似地, 我们有域 $\Bbbk$ 上仿射概形范畴与 $\Bbbk$-交换代数范畴的范畴对偶以及 $\Bbbk$ 上有限型约化仿射概形 (一般也称为 $\Bbbk$-仿射代数簇) 范畴与 $\Bbbk$ 上有限生成约化交换代数范畴间的范畴对偶. 从这个角度看, 研究 $\Bbbk$ 上非交换代数也可以理解为研究某种“非交换空间”. 这份笔记主要关心光滑流形的光滑函数环范畴.

既然仿射簇坐标环的代数结构可完全决定簇的结构, 一个自然的问题是光滑流形的光滑函数环是否也承载了光滑流形所有的几何信息? 即若光滑流形 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 满足 $C^\infty(\mathcal{M})$ 与 $C^\infty(\mathcal{N})$ 是同构的 $\mathbb{R}$-代数, 是否有微分同胚 $\mathcal{M}\cong\mathcal{N}$? 这个问题的回答是肯定的, 并且早已经在 [GAV91, Proposition 2.1] 中被证明.

这份笔记的目的是讨论光滑流形范畴到 $\mathbb{R}$-交换代数范畴的自然函子的基本性质, 主要参考 [GAV91] 和 [Lee12]. 我们将看到光滑流形范畴可忠实满地嵌入实数域上的交换代数范畴 (见 [推论2.4]).

1 基本准备

我们先固定一些基本记号, 记所有光滑流形与光滑流形间光滑映射构成的范畴是 **Diff**, $\mathbb{R}$-**CAlg** 是 $\mathbb{R}$ 上交换代数范畴. 任给光滑映射 $F:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$, 可逆变地诱导出 $\mathbb{R}$-代数同态 $F^*:C^\infty(\mathcal{N})\to C^\infty(\mathcal{M}), g\mapsto gF$. 于是通过定义 $\mathscr{F}(\mathcal{M})=C^\infty(\mathcal{M})$, 对任何光滑映射 $F:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ 定义 $\mathscr{F}(F)=F^*$, 可自然产生逆变函子 $\mathscr{F}:$ **Diff** $\to\mathbb{R}$-**CAlg**. 之后我们将说明 $\mathscr{F}$ 是忠实的满函子, 但 $\mathscr{F}$ 并不是本质满函子. 首先我们需要

Lemma 1.1. 设 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 是光滑流形, $F:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ 是映射. 则 F 光滑当且仅当对任何 $g\in C^\infty(\mathcal{N})$, gF 光滑.

Proof. 只需验证充分性. 先说明 F 连续, 任取 $\mathcal{N}$ 的闭子集 X, 由 [Lee12, p.47, Theorem 2.29], 存在 $g\in C^\infty(\mathcal{N})$ 使得 $g^{-1}(0)=X$. 所以 $F^{-1}(X)=(gF)^{-1}(0)$ 是 $\mathcal{M}$ 的闭子集. 所以 F 是连续映射. 于是对任给 $p\in M$ 可选取 $\mathcal{M}$ 的含 p 光滑坐标卡 (U,φ) 和 $\mathcal{N}$ 的含 $F(p)$ 坐标卡 (V,ψ) 使得 $F(U)\subseteq V$. 进而由 ψF 在 U 上光滑得到 $\psi F\varphi^{-1}$ 是 $\varphi(U)$ 上光滑函数, 这说明 F 光滑. □

Lemma 1.2. 设 $\mathcal{M}$ 是光滑流形, $\theta : C^\infty(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$-代数同态, 则存在 $p \in M$ 使得

$$\theta(f) = f(p), \forall f \in C^\infty(\mathcal{M}).$$

Proof. 参见 [GAV91, Proposition 1.1]. □

2 函子 $\mathscr{F}$ 的性质

通过之前 $\mathscr{F} : \mathbf{Diff} \to \mathbb{R}\text{-}\mathbf{CAlg}$ 的定义, 我们看到 $\mathscr{F}$ 是逆变函子. 注意到任何光滑流形的光滑函数环只要不是零环或 $\mathbb{R}$ 就一定是有零因子环, 因此 $\mathscr{F}$ 不是本质满函子 (例如 $\mathbb{C}$ 不同构于某个光滑流形的函数环).

下面我们来说明 $\mathscr{F}$ 是忠实满函子, 即需说明对任何光滑流形 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$, 映射

$$\mathscr{F} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{CAlg}}(C^\infty(\mathcal{N}), C^\infty(\mathcal{M})), F \mapsto F^*$$

是双射. 如果光滑映射 $F, G : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 满足 $gF = gG, \forall g \in C^\infty(\mathcal{N})$. 如果存在 $p \in M$ 使得 $F(p) \neq G(p)$, 那么由 [Lee12, p.47, Theorem 2.29] 可选取 $h \in C^\infty(\mathcal{N})$ 使得 $hF(p) = 0, hG(p) \neq 0$, 这和 $hF = hG$ 矛盾. 因此 $\mathscr{F}$ 是忠实函子. 任取 $\mathbb{R}$-代数同态 $\theta : C^\infty(\mathcal{N}) \to C^\infty(\mathcal{M})$, 需要构造光滑映射 $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 使得 $\theta = F^*$ 来说明 $\mathscr{F}$ 是满射. 对每个 $p \in M$, 记 $\mathrm{ev}_p : C^\infty(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}, f \mapsto f(p)$ 是 p 处的赋值映射. 根据 [引理1.2], 存在 $q \in \mathcal{N}$ 使得 $\mathrm{ev}_q = \mathrm{ev}_p\theta$, 同样由 [Lee12, p.47, Theorem 2.29] 保证了 q 被 p 唯一确定. 记 $F(p) = q$, 我们得到映射 $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$. 下面说明 F 是光滑的, 为此, 任取 $g \in C^\infty(\mathcal{N})$, $(gF)(p) = g(q) = \mathrm{ev}_q(g) = (\mathrm{ev}_p\theta)(g) = \theta(g)(p)$. 因此由 $gF = \theta(g) \in C^\infty(\mathcal{M})$ 以及 [引理1.1] 可得 F 是光滑映射. 由 F 的构造知 $\mathscr{F}(F) = F^* = \theta$, 因此 $\mathscr{F}$ 是满射. 我们把刚刚的讨论总结为

Proposition 2.1. 逆变函子 $\mathscr{F} : \mathbf{Diff} \to \mathbb{R}\text{-}\mathbf{CAlg}$ 是忠实满函子, 但不是本质满的.

于是由忠实满函子的性质和 Morita 等价的性质立即得到下面这些推论.

Corollary 2.2. 设 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 是光滑流形, 则 $\mathbb{R}$-代数同构 $C^\infty(\mathcal{M}) \cong C^\infty(\mathcal{N})$ 当且仅当微分同胚 $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

Corollary 2.3. 考虑标准光滑流形 $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$, 那么 $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cong C^\infty(\mathbb{R}^m)$ 当且仅当 $n = m$.

Corollary 2.4. 光滑流形范畴 $\mathbf{Diff}$ 可忠实满地嵌入交换代数范畴 $\mathbb{R}\text{-}\mathbf{CAlg}$.

Corollary 2.5. 设 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 是光滑流形, 则 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{N}$ 微分同胚当且仅当范畴等价 $C^\infty(\mathcal{M})$-$\mathbf{Mod} \cong C^\infty(\mathcal{N})$-$\mathbf{Mod}$.

参考文献

[GAV91] R.V. Gamrelidze, A.A. Agrachev, and S.A. Vakhrameev. Ordinary differential equations on vector bundles and chronological calculus. *J Math Sci*, 55:1777–1848, 1991.

[GW20] U. Görtz and T. Wedhorn. *Algebraic Geometry I: Schemes*. Springer Spektrum Wiesbaden, 2020.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 1977.

[Lee12] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218. Springer Science & Business Media, 2012.