仿射簇的正则函数环层

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 1 月 1 日

1 拟仿射簇的正则函数环

本节介绍拟仿射簇上的正则函数环, 并说明代数闭域上仿射簇的正则函数环代数同构于其坐标环.

Definition 1.1 (拟仿射簇)**.** 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, 称 X 的开子集为**拟仿射簇**.

Remark 1.2. 仿射簇总是拟仿射簇. 拟仿射簇作为某个仿射簇的开子集天然继承 Zariski 拓扑的子空间拓扑.

在微分几何中的 Serre-Swan 定理说连通光滑流形 $\mathcal{M}$ 的光滑函数环 $C^\infty(\mathcal{M})$ 上的有限生成模范畴与 $\mathcal{M}$ 上的光滑向量丛范畴有自然的范畴等价. 因此人们可以从光滑函数环 $C^\infty(\mathcal{M})$ 的表示中读出一些 $\mathcal{M}$ 的几何. 通过研究几何对象上的函数环的代数结构来认识几何对象一直是几何学科中的标准方法.

Definition 1.3 (正则性, 正则函数)**.** 设 $X \subseteq \Bbbk^n$ 是域 $\Bbbk$ 上拟仿射簇, $p \in X$. 称 X 上函数 $\varphi : X \to \Bbbk$ 在点 p 处**正则**, 如果存在 p 点的开邻域 U 以及多项式 $f, g \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 使得 $g(q) \neq 0, \forall q \in U$ 并且

$$\varphi(q) = \frac{f(q)}{g(q)}, \forall q \in U.$$

如果 X 上函数 $\varphi : X \to \Bbbk$ 在 X 内每点正则, 称 f 是 X 上**正则函数**.

Remark 1.4. 拟仿射簇上任意两个正则函数有标准的加法与乘法. 因此任何拟仿射簇 X 可定义其上所有正则函数构成的函数环, 称为**正则函数环**, 记作 $\mathcal{O}_X(X)$. 仿射簇 X 的坐标环这里记为 $A(X)$, 根据坐标环的定义, 可以将坐标环视作仿射簇上所有多项式函数构成的函数环. 之后会说明 $\Bbbk$ 是代数闭域时有 $A(X) \cong \mathcal{O}_X(X)$.

若 $\varphi : X \to \Bbbk$ 是拟仿射簇 X 上正则函数, 由于 $\Bbbk$ 上有 Zariski 拓扑, 故自然可以考虑正则函数的连续性.

Proposition 1.5. 设 $\varphi : X \to \Bbbk$ 是拟仿射簇 X 上正则函数, 则 φ 是连续映射.

Proof. 由于 $\Bbbk$ 关于 Zariski 拓扑的真闭子集都是有限集, 所以只需验证任何 $\alpha \in \Bbbk$ 有 $\varphi^{-1}(\alpha)$ 在 X 中闭即可. 通过下面的 [引理1.6], 只需证明对 X 的某个开覆盖 $\{U_i | i \in I\}$, $\varphi^{-1}(\alpha) \cap U_i$ 在每个 U_i 中闭即可. 由正则函数的定义, 不妨设每个 U_i 满足存在多项式 $f_i, g_i \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 使得 g_i 在 U_i 上取值均非零且 φ 在 U_i 上可表示为 f_i/g_i. 于是 $\varphi^{-1}(\alpha) \cap U_i = \{q \in U_i | f_i(q) = \alpha g_i(q)\} = U_i \cap V(f_i - \alpha g_i)$ 是 U_i 中闭集. □

Lemma 1.6. 设 Y 是拓扑空间, 有子集 Z 以及 Y 有开覆盖 $\{U_i|i \in I\}$. 那么 Z 是 Y 中的闭集当且仅当 $Z \cap U_i$ 在每个 U_i 中是闭集.

Proof. 只需证明充分性: 即证 $Y - Z$ 是 Y 中开子集. 由条件, 对每个 $i \in I$, $U_i - Z = U_i - Z \cap U_i$ 是 U_i 的开子集, 所以 $U_i - Z$ 也是 Y 的开子集. $U_i - Z$ 再关于所有的指标 $i \in I$ 取并仍是 Y 的开子集. □

我们自然希望仿射簇的正则函数就是由某个多项式函数决定的, 因为一旦成立仿射簇的坐标环和正则函数环之间便有标准的同构. 但遗憾的是对一般的域而言结论未必成立. 例如

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$$

是正则函数但它不能被某个多项式决定. 但在代数闭域条件下上述问题有肯定的答复.

Theorem 1.7. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, 如果 $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, 则任何 $f \in \mathcal{O}_X(X)$ 是多项式函数.

Proof. 任取 $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Zarisiki 拓扑有拓扑基 $\{\mathcal{O}_f = \Bbbk^n - V(f) | f \in k[x_1, ..., x_n]\}$, 于是知存在有限个多项式 $f_1, ..., f_m$ 使得 $X = (X \cap \mathcal{O}_{f_1}) \cup (X \cap \mathcal{O}_{f_2}) \cup \cdots \cup (X \cap \mathcal{O}_{f_m})$ 满足在每个 $X \cap \mathcal{O}_{f_i}$ 上, f 可表示为 g_i/h_i 的形式, 这里 g_i, h_i 是多项式且 h_i 在 $\mathcal{O}_{f_i}$ 上取值处处非零. 所以对任何 $p \in V(h_i) \cap X$ 有 $f_i(p) = 0$, 即 $f_i \in I(V(h_i) \cap X)$. 由 Hilbert 零点定理 (这使用了代数闭域条件) 可得存在正整数 l 以及多项式 C_i 使得 $f_i^l - C_i h_i \in I(X)$, 这也说明 C_i 在 $X \cap \mathcal{O}_{f_i}$ 上取值处处非零, 所以由 $X \cap \mathcal{O}_{f_i} = X \cap \mathcal{O}_{C_i h_i}$ 可知我们可以不妨设 $h_i = f_i, 1 \leq i \leq m$. 即这时 $X = (X \cap \mathcal{O}_{f_1}) \cup (X \cap \mathcal{O}_{f_2}) \cup \cdots \cup (X \cap \mathcal{O}_{f_m})$ 满足 f 在每个 $X \cap \mathcal{O}_{f_i}$ 上可表示为 g_i/f_i 的形式. 因为在 $X \cap \mathcal{O}_{f_i f_j}$ 上总有 $g_i/f_i = g_j/f_j$ 成立, 所以由 $X = (X \cap \mathcal{O}_{f_i f_j}) \cup (X \cap V(f_i f_j))$ 可知作为 X 上函数有 $f_i f_j (g_i f_j - g_j f_i) = 0$. 现用 G_i 替换 $f_i g_i$, H_i 替换 f_i^2, 则 $X = (X \cap \mathcal{O}_{H_1}) \cup (X \cap \mathcal{O}_{H_2}) \cup \cdots \cup (X \cap \mathcal{O}_{H_m})$, 在每个 $X \cap \mathcal{O}_{H_i}$ 上 f 可表为 G_i/H_i, 并且在 X 上恒有 $G_i H_j = G_j H_i$. 因为 $H_1, ..., H_m$ 在 X 上没有公共零点, 所以再应用 Hilbert 零点定理得到存在多项式 $a_1, ..., a_m$ 使得 $\sum_{i=1}^{m} a_i H_i - 1 \in I(X)$. 构造多项式 $g = \sum_{i=1}^{m} a_i G_i$, 那么在每个 $X \cap \mathcal{O}_{H_i}$ 上有

$$H_i g = \sum_{j=1}^{m} a_j G_j H_i = \sum_{j=1}^{m} a_j G_i H_j \Rightarrow g = \frac{G_i}{H_i},$$

所以 f 作为 X 上正则函数可由多项式函数 g 给出. □

Corollary 1.8. 设 X 是代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射簇, 则 X 的坐标环和正则函数环间有标准的 $\Bbbk$-代数同构.

[定理1.7] 的证明过程也告诉我们代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射簇 $X \subseteq \Bbbk^n$ 和任给多项式 $f \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 满足 $X - V(f)$ 上任何正则函数可表示为 g/f^m 的形式, 其中 $g \in \Bbbk[x_1, ..., x_n], m \in \mathbb{N}$. 这一观察表明

Corollary 1.9. 设 X 是代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射簇, $f \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 并记 $D_f = X - V(f)$. 那么有标准 $\Bbbk$-代数同构 $\mathcal{O}_{D_f}(D_f) \cong A(X)_f$. 这里 $A(X)_f$ 表示 $A(X)$ 的由 $f + I(X) \in A(X)$ 所生成的乘法幺半群处的局部化.

Definition 1.10 (仿射簇在一点处的局部环)**.** 设 $X \subseteq \Bbbk^n$ 是域 $\Bbbk$ 上仿射簇, $p \in X$. 考虑集合 $T = \{(U, f) | p \in U\text{是开邻域且}f : U \to \Bbbk\text{正则函数}\}$, 定义 T 上二元关系 $(U, f) \sim (V, g)$ 当且仅当存在 p 的开邻域 $W \subseteq U \cap V$ 使得 $f|_W = g|_W$. 这是 T 上等价关系, 记商集为 $\mathcal{O}_{X,p}$. 可在 $\mathcal{O}_{X,p}$ 上天然赋予 $\Bbbk$-代数结构使之成为以

$$\{[(U, f)] \in \mathcal{O}_{X,p} | U\text{是}p\text{的开邻域且正则函数}f\text{满足}f(p) = 0\}$$

为唯一极大理想的交换局部代数, 称 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是**仿射簇 X 在 p 点处局部环**.

Remark 1.11. 可直接验证仿射簇 X 在 $p\in X$ 处局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 代数同构于 $A(X)_{\mathfrak{m}_p}$, 其中 $\mathfrak{m}_p$ 是点 p 在 $A(X)$ 中对应的极大理想. 特别地, $\mathcal{O}_{X,p}$ 是交换 Noether 局部代数. 局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 的代数性质可反映仿射簇在点 p 处的局部特性. 例如引入仿射簇在一点处的 Zariski 切空间后我们能够看到 X 在 p 点光滑当且仅当 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是正则局部环. 仿射簇 X 在点 p 处局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 若是 Cohen-Macaulay 的, 则 X 所有穿过点 p 的不可约分支具有相同的维数. 故对坐标环 $A(X)$ 在 $p\in X$ 对应的极大理想 $\mathfrak{m}_p$ 处作局部化可用于研究 X 在 p 点附近的特性.

2 正则函数环层

给定仿射簇 $X\subseteq \Bbbk^n$, 任何 X 的非空开子集 U 作为拟仿射簇都有正则函数环, 记作 $\mathcal{O}_X(U)$. 当 $U=\varnothing$ 时, 定义 $\mathcal{O}_X(U)=0$. 那么对任何 X 的开子集 U,V, 只要 $V\subseteq U$, 就有自然的限制映射 $\mathrm{Res}^U_V: U\to V, \mathcal{O}_X(U)\to \mathcal{O}_X(V), \varphi\mapsto \varphi|_V$. 因为正则函数的定义是局部的, 因此拟仿射簇上的正则函数在更小的开子集上的限制是开子集上的正则函数. 如果记 X 所有开子集关于包含关系给出的偏序范畴是 $\mathcal{U}$(即 $\mathcal{U}$ 的对象类是 X 的开子集全体, 对任何 $V,W\in \mathrm{ob}\mathcal{U}$, 如果 $V\subseteq W$, 则 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(V,W)=\{(V,W)\}$, 否则 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(V,W)=\varnothing$, 同时终对象和始对象相同的两个态射集间有自然的合成映射, 由此给出范畴 $\mathcal{U}$), 那么这里的限制映射 $\mathrm{Res}^U_V: U\to V, \mathcal{O}_X(U)\to\mathcal{O}_X(V), \varphi\mapsto\varphi|_V$ 就是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(U,V)$ 中唯一的态射 (U,V) 所对应的保幺环同态. 因此通过定义 $\mathcal{O}_X: \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(U,V)\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{CRing}}(\mathcal{O}_X(U),\mathcal{O}_X(V)), (U,V)\mapsto \mathrm{Res}^U_V$ 可以得到逆变函子 $\mathcal{O}_X:\mathcal{U}\to\mathbf{CRing}$, 其中 $\mathbf{CRing}$ 表示由所有含幺交换环和保幺环同态构成的含幺交换环范畴. 因此我们得到了拓扑空间 X 上的预层 $\mathcal{O}_X$. 因为正则性的定义是局部的, 故容易验证 $\mathcal{O}_X$ 满足层的粘接公理. 称含幺交换环层 $\mathcal{O}_X$ 为 X 上**正则函数环层**或**结构层**. 根据仿射簇 X 在一点 p 处局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 的定义立即看到 $\mathcal{O}_{X,p}$ 就是正则函数环层 $\mathcal{O}_X$ 在点 $p\in X$ 处的茎 (有时也被称为**正则函数芽环**). 我们把 [推论1.8] 与 [推论1.9] 用正则函数环层的语言总结为:

Proposition 2.1. 设 X 是代数闭域 $\Bbbk$ 上的仿射簇, 那么:
(1) 对 $p\in X$, $\mathcal{O}_X$ 在 p 点处的茎就是仿射簇在该点的局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$.
(2) 对 X 标准拓扑基的每个主开集 $D_f=X-V(f)$, 其中 $f\in\Bbbk[x_1,...,x_n]$, 有 $\mathcal{O}_X(D_f)\cong A(X)_f$.
(3) 正则函数环层的整体截面 $\mathcal{O}_X(X)\cong A(X)$.

Remark 2.2. 前面提到, 仿射簇 X 在点 $p\in X$ 处局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 的代数性质可反映簇 X 在点 p 附近的局部几何性质. 这也给我们研究拓扑空间上的层的茎的动机——捕捉几何对象一点附近的局部特性.

Definition 2.3 (局部赋环空间)**.** 设 X 是拓扑空间, 记 $\mathcal{U}$ 是 X 所有开子集关于包含关系给出的偏序范畴. 如果 $\mathcal{O}_X$ 是拓扑空间 X 上含幺交换环层 $\mathcal{O}_X:\mathcal{U}\to\mathbf{CRing}$, 称 $(X,\mathcal{O}_X)$ 是一个**赋环空间**. 称赋环空间 $(X,\mathcal{O}_X)$ 是**局部赋环空间**, 如果对任何 $p\in X$, $\mathcal{O}_X$ 在点 p 处的茎是局部环.

Example 2.4. 设 X 是仿射簇, $\mathcal{O}_X$ 是 X 上正则函数环层. 则 $(X,\mathcal{O}_X)$ 是局部赋环空间.

Example 2.5. 设 X 是域 $\Bbbk$ 上仿射簇, $\mathcal{O}_X$ 是 X 上正则函数环层. 则对 $p\in X$, 切空间

$$T_pX = V\left(\left\{\sum_{i=1}^n (\partial F/\partial x_i)(p)x_i | F\in I(X)\right\}\right)\subseteq \Bbbk^n$$

作为 $\Bbbk$-线性空间有 $T_pX\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_p}(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2, \mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_p)=\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2,\Bbbk)$, 这里 $\mathfrak{m}_p$ 是正则函数芽环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 唯一的极大理想, $\mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_p=\Bbbk$. 因此也可用 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 作为 $\mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_p$ 上线性空间的对偶空间来定义 X 在 p 点

的切空间, 用 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 来定义 p 处的余切空间. 称 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 中元素为 X 在 p 点的**余切向量**, $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ 为 p 点的**切向量**. 如果记 $\mathfrak{m}$ 是 p 对应坐标环 $A(X)$ 唯一的极大理想, 可直接验证 $\Bbbk$-线性同构 $\mathrm{Hom}_\Bbbk(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2,\Bbbk)\cong\mathrm{Hom}_\Bbbk(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,\Bbbk)$. 通过定义 $f\cdot\alpha=f(p)\alpha,\forall f\in A(X),\alpha\in\Bbbk$ 可将 $\Bbbk$ 视作 $A(X)$-模 (这里把坐标环与 X 上多项式函数环视作等同). 定义 $\eta:\mathrm{Der}_\Bbbk(A(X),\Bbbk)\to\mathrm{Hom}_\Bbbk(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,\Bbbk),D\mapsto\eta(D)$, 其中 $\eta(D):\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\to\Bbbk,f+\mathfrak{m}^2\mapsto D(f)$, 那么 η 明显是定义合理的线性映射. 下面构造 η 的逆映射来说明 η 是线性同构. 作 $\xi:\mathrm{Hom}_\Bbbk(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,\Bbbk)\to\mathrm{Der}_\Bbbk(A(X),\Bbbk),\delta\mapsto\xi(\delta)$, 其中 $\xi(\delta):A(X)\to\Bbbk,f\mapsto\delta((f-f(p))+\mathfrak{m}^2)$, 易验证这也是定义合理的线性映射. 可直接计算验证 η 与 ξ 互为逆映射来得到 $\Bbbk$-线性同构 $\mathrm{Der}_\Bbbk(A(X),\Bbbk)\cong\mathrm{Hom}_\Bbbk(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,\Bbbk)$. 任给 $D\in\mathrm{Der}_\Bbbk A(X)$, 置 $\mathcal{V}_p(D):A(X)\to\Bbbk,f\mapsto D(f)(p)$, 那么 $\mathcal{V}_p(D)\in\mathrm{Der}_\Bbbk(A(X),\Bbbk)$, 因此任何 $A(X)$ 上导子可诱导 p 点处切向量. 反之, 任给 $V\in\mathrm{Der}_\Bbbk(A(X),\Bbbk)$, 把 $V(f)$ 与 X 上相应常值多项式函数视作等同, 则 $D:A(X)\to A(X),f\mapsto V(f)$ 是 $A(X)$ 上导子, 所以 X 在 p 点处每个切向量可由 $\mathrm{Der}_\Bbbk A(X)$ 中元素作赋值诱导. 下面来定义仿射簇 X 的切丛, 作

$$TX=\coprod_{p\in X}T_pX=\{(p,v_p)\in\Bbbk^{2n}|p\in X,v_p\in T_pX\}\subseteq\Bbbk^{2n},$$

那么 $TX=V(S)\subseteq\Bbbk^{2n}$, 其中 S 为 $\{f(x_1,...,x_n)\in\Bbbk[x_1,...,x_n,...,x_{2n}]|f(x_1,...,x_n)\in I(X)\}$ 与

$$\left\{\sum_{i=1}^n\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,...,x_n)x_{i+1}\in\Bbbk[x_1,...,x_{2n}]|F\in I(X)\right\}$$

的并集, 所以 TX 也是仿射簇, 称为 X 的**切丛**. 称 X 到 TX 的正则映射 $\mathcal{V}$ 为 X 上的一个 (多项式) **向量场**, 如果 $\pi\mathcal{V}=\mathrm{id}$, 这里 $\pi:TX\to X$ 是标准投射. 记 X 上所有向量场构成的集合为 $\Gamma(TX)$. 进而可在 $\Gamma(TX)$ 上赋予 $A(X)$-模结构: 其上加法运算利用每点处切空间上加法运算赋予, 数乘作用定义为 $\mu:A(X)\times\Gamma(TX)\to\Gamma(TX),(f,\mathcal{V})\to\mu(f,\mathcal{V})$, 其中 $\mu(f,\mathcal{V}):X\to TX,p\mapsto f(p)v_p$, 其中 $\mathcal{V}(p)=(p,v_p)$. 由此不难看出 $\Gamma(TX)$ 是 $A(X)$-模. 之前我们看到每个 $A(X)$ 上导子 D 可以产生 X 每点 p 处的切向量 $\mathcal{V}_p(D):A(X)\to\Bbbk,f\mapsto D(f)(p)$. 于是 $(\mathcal{V}_p(D)(x_1),\mathcal{V}_p(D)(x_2),...,\mathcal{V}_p(D)(x_n))=(D(x_1)(p),...,D(x_n)(p))\in T_pX$. 对每个固定的正整数 $1\leq j\leq n$, $D(x_j)$ 为 X 上多项式函数, 所以 $\mathcal{V}(D):X\to TX,p\mapsto(p,\mathcal{V}_p(D))$ 是 X 上向量场. 反之, 任给 X 上向量场 $\mathcal{W}:X\to TX,p\mapsto(p,f_1(p),...,f_n(p))$, 这里 $f_j\in A(X)$ 并且 $(f_1(p),...,f_n(p))\in T_pX$. 作

$$D(f)=f_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(f_1,...,f_n)+f_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(f_1,...,f_n)+\cdots+f_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(f_1,...,f_n),\forall f\in A(X),$$

这里每个 $(\partial f/\partial x_j)(f_1,...,f_n)$ 表示对偏导数多项式 $\partial f/\partial x_j$ 作赋值 $(x_1,...,x_n)=(f_1,...,f_n)$. 注意到对每个 $h\in I(X)$, $D(h)$ 作为 X 上多项式函数为零, 所以 $D:A(X)\to A(X)$ 是定义合理的线性变换. 并且不难看出 $D\in\mathrm{Der}_\Bbbk A(X)$ 且 $\mathcal{W}=\mathcal{V}(D)$. 根据前面的讨论, 命 $\mathcal{V}:\mathrm{Der}_\Bbbk A(X)\to\Gamma(TX),D\mapsto\mathcal{V}(D)$, 那么这是定义合理的满 $\Bbbk$-线性映射. 假设 $D,D'\in\mathrm{Der}_\Bbbk A(X)$ 满足 $\mathcal{V}(D)=\mathcal{V}(D')$, 那么对每个正整数 $1\leq j\leq n$, $D(x_j)$ 与 $D'(x_j)$ 作为 X 上多项式函数相同, 进而 $D(x_j)=D'(x_j),\forall 1\leq j\leq n$. 进而由 X 上坐标函数集 $\{x_1,...,x_n\}$ 是 $A(X)$ 作为 $\Bbbk$-代数的一个生成元集知 $D=D'$. 因此得到线性同构 $\mathrm{Der}_\Bbbk A(X)\cong\Gamma(TX)$. 结合 $\Gamma(TX)$ 上 $A(X)$-模结构的定义易见该同构也是 $A(X)$-模同构. 故也称导子模 $\mathrm{Der}_\Bbbk A(X)$ 中元素为 X 上**向量场**. 回忆对任何域 $\Bbbk$ 上交换代数 R, 导子模 $\mathrm{Der}_\Bbbk R$ 上有标准的 $\Bbbk$-Lie 代数结构: $[\delta_1,\delta_2]=\delta_1\delta_2-\delta_2\delta_1,\forall\delta_1,\delta_2\in\mathrm{Der}_\Bbbk R$. 因此 $\mathrm{Der}_\Bbbk A(X)$ 上标准 Lie 代数结构给出了 $\Gamma(TX)$ 上 Lie 代数结构.