代数闭域上一类齐次多项式的可约性

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 6 月 5 日

设 $\Bbbk$ 是代数闭域, 正整数 $n \geq 2$, 这份笔记的目的是记录下述观察的证明:

对任给 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \Bbbk$, $y^n + \alpha_1 x y^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} x^{n-1} y + \alpha_n x^n$ 是 $\Bbbk[x, y]$ 中可约多项式.

更进一步, 如果设 $c_1, ..., c_n \in \Bbbk$ 是多项式 $t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} t + \alpha_n$ 在 $\Bbbk$ 中的根, 则有

$$y^n + \alpha_1 x y^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} x^{n-1} y + \alpha_n x^n = \prod_{i=1}^{n} (y - c_i x).$$

下面介绍的绝妙证明方法来自黄逸敏: 沿用前面的记号, 这时在多项式代数 $\Bbbk[t]$ 中有分解

$$t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} t + \alpha_n = (t - c_1)(t - c_2) \cdots (t - c_n).$$

考虑 $y/x \in \Bbbk(x, y)$, 对上式作赋值 $t = y/x$ 得到

$$(\frac{y}{x})^n + \alpha_1 (\frac{y}{x})^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} (\frac{y}{x}) + \alpha_n = (\frac{y}{x} - c_1)(\frac{y}{x} - c_2) \cdots (\frac{y}{x} - c_n).$$

对上式等号两边乘上 x^n, 得到

$$y^n + \alpha_1 x y^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} x^{n-1} y + \alpha_n x^n = \prod_{i=1}^{n} (y - c_i x).$$

我们把刚才的讨论记录为

Proposition 1. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, 正整数 $n, m \geq 2$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \Bbbk$, 并设 $c_1, ..., c_n \in \Bbbk$ 是多项式 $t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} t + \alpha_n$ 在 $\Bbbk$ 中的根. 那么在多项式代数 $\Bbbk[x_1, x_2, ..., x_m]$ 中有

$$x_2^n + \alpha_1 x_1 x_2^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} x_1^{n-1} x_2 + \alpha_n x_1^n = \prod_{i=1}^{n} (x_2 - c_i x_1).$$

特别地, 在 $\Bbbk[x_1, x_2, ..., x_m]$ 中 $(x_2^n + \alpha_1 x_1 x_2^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} x_1^{n-1} x_2 + \alpha_n x_1^n)$ 不是素理想.

作为 [命题1] 的应用, 我们来计算 [BG03, 3.2 Remark] 中考虑的多项式 Poisson 代数的 Poisson 素谱.

Corollary 1 ([BG03])**.** 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, 考虑 $C = \Bbbk[x, y, z]$ 上由

$$\{x, y\} = 0, \{x, z\} = x, \{y, z\} = y$$

所定义出的 Poisson 结构 $(C, \{-, -\})$. 那么 C 的 Poisson 素谱由以下形式的素理想构成:

$$0, (x - \alpha y), (y), (x, y), (x, y, z - \beta), \text{ 其中} \alpha, \beta \in \Bbbk.$$

Proof. 根据 [Dix77, Lemma 3.3.2] 以及 C 的仿射性, C 的 Poisson 素理想就是素 Poisson 理想. 设 $\alpha, \beta \in \Bbbk$, 易计算验证 $0, (x - \alpha y), (y), (x, y)$ 以及 $(x, y, z - \beta)$ 均为素 Poisson 理想. 设 $P \in \mathrm{Spec} C$, 我们说明 P 只可能是 $0, (x - \alpha y), (y), (x, y), (x, y, z - \beta)$ 中的某个 (其中 $\alpha, \beta \in \Bbbk$). 下面主要分 x 是否在 P 中这两种情况讨论.

Case 1. 设 $x \in P$, 我们说明 $P = (x)$ 或 (x, y) 或存在 $\beta \in \Bbbk$ 使得 $P = (x, y, z - \beta)$. 假设 $P \supsetneq (x)$, 那么 $P/(x)$ 是 $\Bbbk[x, y, z]/(x) \cong \Bbbk[y, z]$ 的素理想, 将 $\Bbbk[y, z] = \Bbbk[z][y]$ 视作 P.I.D. 上一元多项式环, 那么由 P.I.D. 上多项式环的素理想的刻画 (例如见 [AK13, Theorem 2.20]), 非极大的非零素理想是某个不可约多项式生成的主理想. 因此当非零素理想 $P/(x)$ 不是极大理想时, 存在不可约多项式 $f \in \Bbbk[y, z]$ 使得 $P/(x) = (f)$. 注意 $\{f, z\} = y(\partial f/\partial y)$, 所以由 f 整除 $\{f, z\}$(注意 (x) 是 C 的 Poisson 理想, 所以自然诱导 $\Bbbk[y, z]$ 上 Poisson 结构), f 是不可约多项式以及 $\mathrm{char}\Bbbk = 0$ 得到 $\deg f = 1$. 于是 $P = (x, y - \alpha)$, 其中 $\alpha \in \Bbbk$. 注意到 $\{y - \alpha, z\} = y$, 所以 $y \in P$ 迫使 $\alpha = 0$, 得到 $P = (x, y)$. 现在设 $P/(x)$ 是 $\Bbbk[y, z]$ 的极大理想, 那么存在 $\alpha, \beta \in \Bbbk$ 使得 $P = (x, y - \alpha, z - \beta)$, 结合 $\{y - \alpha, z\} = y$ 得到 $\alpha = 0$. 所以 $P = (x, y, z - \beta)$.

Case 2. 设 $x \notin P$, 我们说明 $P = 0$ 或 (y) 或存在 $\alpha \neq 0 \in \Bbbk$ 使得 $P = (x - \alpha y)$. 不妨设 $P \neq 0$. 注意到对任何 $f \in P$ 有 $\{x, f\} = x(\partial f/\partial z) \in P$, 因此 $x \notin P$ 保证了对所有 $f \in P$ 有 $\partial f/\partial z \in P$. 对每个 P 中多项式 $f = f(x, y, z)$, 总可表达为 $f = a_0(x, y) + a_1(x, y)z + \cdots + a_s(x, y)z^s$ 的形式, 其中 $a_j(x, y) \in \Bbbk[x, y], s \in \mathbb{N}$. 反复利用 f 关于 z 的偏导数在 P 中可知 $a_0(x, y), ..., a_s(x, y) \in P$. 这一观察说明 P 的生成元集总可选取在 $\Bbbk[x, y]$ 中. 因此只要确定了 $P \cap \Bbbk[x, y]$ 的生成元集, 那么该生成元集在 C 中生成的理想就是 P. 易知 $P \cap \Bbbk[x, y]$ 是 $\Bbbk[x, y]$ 的素理想, 同样由 P.I.D. 上多项式环的素理想的刻画, 当 $P \cap \Bbbk[x, y]$ 不是极大理想时必定是某个不可约多项式生成的主理想. 当 $P \cap \Bbbk[x, y]$ 是极大理想时, 存在 $\alpha, \beta \in \Bbbk$ 使得 $P \cap \Bbbk[x, y] = (x - \alpha, y - \beta)$, 于是 $P = (x - \alpha, y - \beta)$. 现在 $\{x - \beta, z\} = x \in P$, 这与假设矛盾. 所以当 $x \notin P$ 时, $P \cap \Bbbk[x, y]$ 不是 $\Bbbk[x, y]$ 的极大理想. 于是由前面的讨论知存在 $\Bbbk[x, y]$ 中不可约多项式 f 使得 $P = (f)$. 将 $f = f(x, y)$ 写作

$$f = a_0(x) + a_1(x)y + \cdots + a_s(x)y^s, a_j(x) \in \Bbbk[x], s \in \mathbb{N}, a_s(x) \neq 0.$$

现在由 $\{f, z\} = a_0'(x)x + (a_1'(x)x + a_1(x))y + (a_2'(x)x + 2a_2(x))y^2 + \cdots + (a_s'(x)x + sa_s(x))y^s \in P$ 知存在正整数 ℓ 使得 $\{f, z\} = \ell f$(这里 ℓ 就是 $s + \deg a_s(x)$). 即对每个 $0 \leq j \leq s$ 有 $a_j'(x)x + ja_j(x) = \ell a_j(x)$. 于是利用 $\mathrm{char}\Bbbk = 0$ 知对每个 $0 \leq j \leq s$, 有 $a_j(x) = b_{\ell-j}x^{\ell-j}$, 这里 $b_{\ell-j} \in \Bbbk$. 于是知 f 可表示为 $x^\ell, x^{\ell-1}y, ..., x^{\ell-s}y^s$ 的 $\Bbbk$-线性组合. 如果 $s = 0$, 那么 $f = b_\ell x^\ell$, 由 f 的不可约性迫使 $\ell = 1$, 进而 $x \in P$, 得到矛盾. 所以 $s \geq 1$. 如果 $s \geq 2$, 那么 $\ell \geq 2$, 这一观察说明 f 的项 x^ℓ 的系数是非零的 (否则 f 可分解为 y 与某个非常数多项式的乘积), 于是应用 [命题1] 得到 f 是可约多项式, 矛盾. 至此我们得到在 $x \notin P$ 的假设下, $s = 1$, 即 $f = b_\ell x^\ell + b_{\ell-1}x^{\ell-1}y$. 因为 f 是不可约多项式, 所以 $\ell = 1$. 进而 $f = b_\ell x + b_{\ell-1}y$, 这里 $b_\ell, b_{\ell-1}$ 不全为零. 当 $b_\ell \neq 0$ 时, 那么 $P = (f)$ 可表示为形如 $(x - \alpha y)$ 的形式, 其中 $\alpha \in \Bbbk$(因为要求了 $x \notin P$, 所以这时 $\alpha \neq 0$). 当 $b_\ell = 0$ 时, $P = (f) = (y)$.

至此我们得到 C 任何 Poisson 理想来自 $0,(x-\alpha y),(y),(x,y),(x,y,z-\beta)$, 其中$\alpha,\beta\in\Bbbk$, 中的一类. $\square$

Remark 1. 在 [BG03, 3.2 Remark] 给出的 Poisson 素谱描述中遗漏了形如 $(x,y,z-\beta),\beta\in\Bbbk$ 的素理想.

Hilbert 零点定理使得我们能够把握代数闭域 $\Bbbk$ 上多项式代数 $\Bbbk[x,y,z]$ 的极大谱, 于是我们能够在 [推论1] 基础上进一步来计算其中的 Poisson 代数的 Poisson 本原理想 (这里要求 $\mathrm{char}\Bbbk=0$). 固定 $C=\Bbbk[x,y,z]$ 上由 [推论1] 条件定义的 Poisson 结构, 任何 $\mathfrak{m}\in\mathrm{maxSpec}C$ 形如 $(x-\alpha_1,y-\alpha_2,z-\alpha_3)$, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\Bbbk$. 我们把 $\mathfrak{m}$ 包含的 Poisson 本原理想记作 $\mathcal{P}(\mathfrak{m})$, $\mathfrak{m}$ 所在的辛核记作 $\mathscr{C}(\mathfrak{m})$.

Case 1. 当 $\alpha_1\in\Bbbk^\times$ 时, $x\notin\mathcal{P}(\mathfrak{m})$, 所以由 $\mathcal{P}(\mathfrak{m})$ 是素 Poisson 理想知 $\mathcal{P}(\mathfrak{m})$ 只可能是 0 或 (y) 或 $(x-\alpha y)$, 这里 $\alpha\in\Bbbk^\times$. 由 $\mathcal{P}(\mathfrak{m})$ 的定义知 $\mathcal{P}(\mathfrak{m})\neq 0$. 所以当进一步 $\alpha_2\in\Bbbk^\times$ 时, $\mathcal{P}(\mathfrak{m})=(x-\alpha_1 y/\alpha_2)$. 否则, 即 $\alpha_2=0$ 时, $\mathcal{P}(\mathfrak{m})=(y)$(否则, 由 $y\in\mathfrak{m}$ 得到 $x\in\mathfrak{m}$, 矛盾).

Case 2. 当 $\alpha_1=0$ 时, $\mathcal{P}(\mathfrak{m})=(x)$ 或 (x,y) 或存在 $\beta\in\Bbbk$ 使得 $\mathcal{P}(\mathfrak{m})=(x,y,z-\beta)$. 如果 $\alpha_2\in\Bbbk^\times$, 那么 $y\notin\mathcal{P}(\mathfrak{m})$, 于是知 $\mathcal{P}(\mathfrak{m})=(x)$. 如果 $\alpha_2=0$, 那么 $(x,y)\subseteq\mathcal{P}(\mathfrak{m})$. 于是 $\mathcal{P}(\mathfrak{m})=(x,y,z-\alpha_3)=\mathfrak{m}$.

总结一下, 对 [推论1] 中 Poisson 代数 $(C,\{-,-\})$ 以及 $\mathfrak{m}=(x-\alpha_1,y-\alpha_2,z-\alpha_3)\in\mathrm{maxSpec}C$ 有:

$$\mathcal{P}(\mathfrak{m})=\begin{cases}(x-(\alpha_1\alpha_2^{-1})y), & \alpha_1,\alpha_2\in\Bbbk^\times\\ (y), & \alpha_1\in\Bbbk^\times,\alpha_2=0\\ (x), & \alpha_1=0,\alpha_2\in\Bbbk^\times\\ (x,y,z-\alpha_3), & \alpha_1=\alpha_2=0.\end{cases}$$

因此 $(C,\{-,-\})$ 的所有 Poisson 本原理想是: $(y),(x-\alpha y),(x,y,z-\beta)$, 其中 $\alpha,\beta\in\Bbbk$.

上述 Poisson 本原素谱的计算表明考虑的 Poisson 代数具有无穷多个不同的辛核 (因为 $(x-(\alpha_1\alpha_2^{-1})y)$ 中 $\alpha_1,\alpha_2\in\Bbbk^\times$ 可以产生无穷多个不同的 Poisson 本原理想). 下面我们罗列所有的辛核:

- 对 $\beta\in\Bbbk^\times$, Poisson 本原理想 $(x-\beta y)$ 决定的辛核是

$$\mathscr{C}_\beta=\{(x-\alpha_1,y-\alpha_2,z-\alpha_3)\in\mathrm{maxSpec}C|\alpha_1,\alpha_2\in\Bbbk^\times,\alpha_1=\beta\alpha_2\}.$$

- Poisson 本原理想 (x) 决定的辛核是 $\mathscr{C}_x=\{(x-\alpha_1,y-\alpha_2,z-\alpha_3)\in\mathrm{maxSpec}C|\alpha_1=0,\alpha_2\in\Bbbk^\times\}$.
- Poisson 本原理想 (y) 决定的辛核是 $\mathscr{C}_y=\{(x-\alpha_1,y-\alpha_2,z-\alpha_3)\in\mathrm{maxSpec}C|\alpha_1\in\Bbbk^\times,\alpha_2=0\}$.
- 对 $\gamma\in\Bbbk$, Poisson 本原理想 $\mathfrak{m}=(x,y,z-\gamma)$ 决定的辛核 $\mathscr{C}(\mathfrak{m})=\{\mathfrak{m}\}$.

这里 $\mathscr{C}_\beta(\beta\in\Bbbk^\times),\mathscr{C}_x$ 和 $\mathscr{C}_y$ 都是 maxSpec$C$ 中的局部闭子集, $\mathfrak{m}=(x,y,z-\gamma)$ 决定的辛核自然是闭集.

参考文献

[AK13] Allen Altman and Steven Kleiman. *A term of commutative algebra*. Worldwide Center of Mathematics, 2013.

[BG03] Kenneth A. Brown and Iain Gordon. Poisson orders, symplectic reflection algebras and representation theory. *J. Reine Angew. Math.*, 559:193–216, 2003.

[Dix77] Jacques Dixmier. *Enveloping algebras*, volume Vol. 14 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977. Translated from the French.