有理映射与仿射簇的双有理等价

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 1 月 5 日

这份笔记主要用于介绍仿射簇场景下的有理映射与双有理等价, 主要参考了 [Sha94] 与 [Har77]. 这里的仿射簇均指仿射空间在 Zariski 拓扑下的闭子集, 有可能是可约空间. [Har77] 中介绍的有理映射场景更一般.

由于水平有限, 虽然我全力以赴, 但还是无法避免笔记中存在不足与错误, 欢迎大家指出, 谢谢.

1 有理映射

设 X, Y 是域 $\Bbbk$ 上仿射簇, 若分别记它们的坐标环为 $\mathcal{O}(X), \mathcal{O}(Y)$, 则 $X \cong Y \Leftrightarrow \mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(Y)$. 这表明仿射簇在同构意义下完全被其坐标环分类. 类似于考虑拓扑空间之间的同伦等价、非交换环中间的 Morita 等价, 人们关心同类数学对象间比同构更弱的某种等价关系来分类数学对象. 下面我们介绍不可约仿射簇到仿射簇的有理映射的概念, 它产生的不可约仿射簇间的等价关系被称为“双有理等价”, 是比同构更弱的等价关系.

现设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是不可约仿射簇, $Y \subseteq \Bbbk^m$ 是仿射簇. 考虑集合

$$T = \{(U, f) | U\text{为}X\text{的非空开子集}, f : U \to Y\text{是正则映射}\},$$

在 T 上定义二元关系 $(U, f) \sim (V, g) \Leftrightarrow f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$. 由 X 的不可约性, X 的任何非空开子集稠密, 所以上述二元关系的定义也等价于存在非空开子集 $W \subseteq U \cap V$ 使得 $f|_W = g|_W$. 称 T 关于 $\sim$ 的每个等价类为 X 到 Y 的一个**有理映射**. 如果进一步 $Y = \Bbbk$, 称有理映射为不可约仿射簇 X 上**有理函数**.

Remark 1.1. 对一般的仿射簇 X, 可将集合 T 定义中开子集 U 要求为稠密开子集来定义有理映射的概念.

设 $X \subseteq \Bbbk^n$ 是域 $\Bbbk$ 上不可约仿射簇, 不难看出 X 上所有有理函数通过考察代表元有自然的加法运算和乘法运算, 由此构成的环记作 $\Bbbk(X)$. 该环的零元为 $(X, 0)$ 所在的等价类, 幺元为 $(X, 1)$ 所在的等价类. 任取非零元 $[(U, f)] \in \Bbbk(X)$, 那么存在 $p \in U$ 使得 $f(p) \neq 0$. 由 f 的正则性, 存在 p 的开邻域 $V \subseteq U$ 以及多项式 $h_1, h_2 \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 使得 h_1 和 h_2 在 V 上处处非零且 $f(q) = h_1(q)/h_2(q), \forall q \in V$. 因此可定义 V 上正则函数 $h : V \to \Bbbk$ 使得在 V 上 $fh = 1$. 故 $[(U, f)]$ 关于乘法有逆元, 这说明 $\Bbbk(X)$ 是域, 我们将 $\Bbbk$-代数 $\Bbbk(X)$ 称为不可约仿射簇 X 的**有理函数域**. 事实上不可约仿射簇的有理函数域就是其坐标环的商域.

Theorem 1.2. 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是不可约仿射簇, 则 $\Bbbk(X) \cong \mathrm{Frac}\mathcal{O}(X)$, 这里 $\mathrm{Frac}\mathcal{O}(X)$ 是 $\mathcal{O}(X)$ 的商域.

Proof. 命 $\eta : \mathrm{Frac}\mathcal{O}(X) \to \Bbbk(X), f/g \mapsto [(X - V(g), f/g)]$. 下面说明 η 是定义合理的映射. 首先 g 是 X 上非零多项式函数, 所以 $X - V(g)$ 是 X 的非空开子集. 如果 $f_1/g_1 = f_2/g_2$, 那么存在 X 上非零多项式函数 u 使得 $u(f_1g_2 - f_2g_1) = 0$. 因此在 $(X - V(u)) \cap (X - V(g_1)) \cap (X - V(g_2))$ 这一非空开集 (X 不可约) 上 f_1/g_1 与 f_2/g_2 是相同的正则函数, 由此知 $[(X - V(g_1), f_1/g_1)] = [(X - V(g_2), f_2/g_2)]$. 所以 η 是定义合理的映射, 它明显是 $\Bbbk$-代数同态. 由于 $\mathrm{Frac}\mathcal{O}(X)$ 是域, 所以 η 是单射. 最后只要再验证 η 是满射. 任取 X 上有理函数 $[(U, f)]$, 那么存在 U 的开子集 V, X 上多项式函数 g, h 使得 h 在 V 上处处非零并且在 V 上 $f = g/h$. 因为 h 是 X 上非零多项式函数, 故 $[(V, g/h)]$ 就是 $g/h \in \mathrm{Frac}\mathcal{O}(X)$ 关于 η 的像. 于是 η 是代数同构. □

每个不可约仿射簇 X 到仿射簇 Y 的有理映射满足存在 X 的非空开子集 U 和 U 上正则映射 $g : U \to Y$ 使得该有理映射是 $[(U, g)]$. 若将 $[(U, g)]$ 设为 $\{(U_i, g_i)|i \in \Gamma\}$, 那么可定义

$$\varphi : W = \bigcup_{i\in\Gamma} U_i \to Y, p \mapsto g_i(p) (p \in U_i),$$

不难看出 $\varphi : W \to Y$ 是定义合理的映射并且是拟仿射簇 W 到 Y 的正则映射. 这里的 W 被给定的双有理映射唯一确定, 称之为该有理映射的**定义域**. $\varphi : W \to Y$ 在每个开子集 U_i 上的限制就是 g_i. 因此 φ 也被给定的有理映射唯一确定. 事实上, 若在有理映射 $\{(U_i, g_i)|i \in \Gamma\}$ 中定义二元关系 $(U_i, g_i) \le (U_j, g_j) \Leftrightarrow U_i \subseteq U_j$, 那么 $\le$ 是偏序关系并且上述构造的 (W, φ) 是 $\{(U_i, g_i)|i \in \Gamma\}$ 中唯一的最大元. 如果给定有理映射关于上述定义的偏序关系有最大元 (W, φ), 那么 W 就是上面定义的定义域, 这时将有理映射记作 $\varphi : X \dashrightarrow Y$.

Remark 1.3. 不可约仿射簇 X 到仿射簇 Y 的有理映射 $\varphi : X \dashrightarrow Y$ 并不是映射, 但它对应 X 的某个开子集 W 上的正则映射 $\varphi : W \to Y$. 如果进一步 Y 也是不可约仿射簇, 那么对任何 Y 到仿射簇 Z 的有理映射 $\psi : Y \to Z$, 只要 $\mathrm{Im}\varphi$ 在 Y 中稠密, 则可定义 φ 与 ψ 的合成. 具体地, 设 ψ 的定义域为 V, 那么 $\mathrm{Im}\varphi \cap V \neq \varnothing$. 进而 $\varphi^{-1}(V) \cap W$ 是 X 的非空开子集. 定义 $\psi\varphi : X \dashrightarrow Y$ 为 $(W \cap \varphi^{-1}(V), \psi\varphi)$ 所在的等价类.

Definition 1.4 (支配有理映射)**.** 设 $\varphi : X \dashrightarrow Y$ 是不可约拟仿射簇 X 到仿射簇 Y 的有理映射. 如果 $\mathrm{Im}\varphi$ 是 Y 的稠密子集, 则称该有理映射是**支配的**. 可直接验证不可约仿射簇间支配有理映射的合成仍支配.

设 $\varphi : X \dashrightarrow Y$ 是不可约拟仿射簇 X 到不可约仿射簇 Y 的支配有理映射, 那么对 Y 上任何有理函数 $f : Y \dashrightarrow \Bbbk$, 有 X 上有理函数 $f\varphi : X \dashrightarrow \Bbbk$. 这给出了 $\Bbbk$-代数同态 $\varphi^* : \Bbbk(Y) \to \Bbbk(X), f \mapsto f\varphi$. 进而由 $\Bbbk(Y)$ 是域得到 φ^* 是代数嵌入. 考虑域 $\Bbbk$ 上所有不可约仿射簇与簇间支配有理映射构成的范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\Bbbk$ 上所有有限生成域以及代数同态构成的范畴 $\mathcal{D}$. 那么前面的讨论表明我们有逆变函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 使得 $F(X) = \Bbbk(X)$ 并将每个支配有理映射 $\varphi : X \dashrightarrow Y$ 映至代数同态 $\varphi^* : \Bbbk(Y) \to \Bbbk(X)$. 一个基本的观察是

Lemma 1.5. 设 X, Y 是域 $\Bbbk$ 上不可约仿射簇, 则前述函子 F 是忠实的满函子. 即对域 $\Bbbk$ 上任何不可约仿射簇 X, Y, 上述定义出的映射 $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FY, FX) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Bbbk(Y), \Bbbk(X)), \varphi \mapsto \varphi^*$ 是双射.

Proof. 先证 F 是单射, 如果支配有理映射 $\varphi : X \dashrightarrow Y$ 满足 $\varphi^* = 0$. 设 $Y \subseteq \Bbbk^m$, 那么对 Y 上 m 个坐标投射函数 $p_i : Y \to \Bbbk (1 \le i \le m)$ 有 $p_i\varphi = 0$. 因此存在 X 的非空开子集 W 使得 W 含于 φ 的定义域并且 $\varphi(W) = 0$. 于是根据有理映射的定义便知 $\varphi = 0$, 所以 F 是单射. 再说明 F 是满射. 任取 $\Bbbk$-代数同态 $\xi : \Bbbk(Y) \to \Bbbk(X)$, 对 Y 上每个坐标投射函数 $p_i : Y \to \Bbbk (1 \le i \le m)$, 设 $\xi([(Y, p_i)]) = [(U_i, f_i/g_i)]$, 这里 f_i, g_i 均为 U_i 上多项式函数满足 g_i 在 U_i 上处处非零. 于是可知对任何满足多项式 $h \in I(Y)$, 由 ξ 是代数同态得到 $h(f_1(p)/g_1(p), ..., f_m(p)/g_m(p)) = 0, \forall p \in U_1 \cap \cdots \cap U_m$. 这一观察表明当 $p \in U_1 \cap \cdots \cap U_m$ 时,

$(f_1(p)/g_1(p), ..., f_m(p)/g_m(p)) \in V(I(Y)) = Y$. 因此 $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_m \to Y, p \mapsto (f_1(p)/g_1(p), ..., f_m(p)/g_m(p))$ 定义出的有理映射 $\psi : X \dashrightarrow Y$ 满足 ψ^* 和 ξ 在 $[(Y, p_i)], 1 \leq i \leq m$ 上取值相同. 于是由 $\{[(Y, p_i)] | 1 \leq i \leq m\}$ 对应 $\mathcal{O}(Y)$ 作为 $\Bbbk$-代数的一个生成元集以及 [定理1.2] 得 $\xi = \psi^* = F(\psi)$, 所以 F 是满射. □

若进一步 $\Bbbk$ 是代数闭域, 易见任何 $\Bbbk$ 上有限生成域同构于某个不可约仿射簇 X 的坐标环 $\mathcal{O}(X)$, 进而由 $\mathcal{O}(X) \cong \mathrm{Frac}\mathcal{O}(X)$ 以及 [定理1.2] 得到下述范畴对偶.

Theorem 1.6. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, 则前述逆变函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 给出范畴对偶.

2 双有理等价

从 [引理1.5] 中我们看到两个不可约仿射簇 X, Y 之间存在支配有理映射 $\varphi : X \dashrightarrow Y, \psi : Y \dashrightarrow X$ 使得 $\psi\varphi = 1_X$ 且 $\varphi\psi = 1_Y$ 的充要条件是 $\Bbbk(X) \cong \Bbbk(Y)$. [定理1.2] 表明同构的不可约仿射簇总满足该条件.

Definition 2.1. 设 X, Y 是域 $\Bbbk$ 上不可约仿射簇, $\varphi : X \dashrightarrow Y$ 是支配有理映射. 若存在支配有理映射 $\psi : Y \dashrightarrow X$ 使得 $\psi\varphi = 1_X$ 且 $\varphi\psi = 1_Y$, 则称 $\varphi : X \dashrightarrow Y$ 是**双有理映射**. 这时称 X 与 Y 是**双有理等价的**.

Remark 2.2. 根据 [定理1.2] 和 [引理1.5], 不可约仿射簇 X 与 Y 双有理等价当且仅当 $\mathrm{Frac}\mathcal{O}(X) \cong \mathrm{Frac}\mathcal{O}(Y)$. 如果不可约仿射簇 X 与某个仿射空间双有理等价, 称该簇是**有理的**.

下面再介绍两个不可约仿射簇双有理等价的等价刻画.

Theorem 2.3. 设 X, Y 是域 $\Bbbk$ 上不可约仿射簇, 则以下三条等价:
(1) 仿射簇 X 与 Y 双有理等价.
(2) 存在 X 的非空开子集 X_1 和 Y 的非空开子集 Y_1 作为拟仿射簇同构.
(3) 有理函数域 $\Bbbk(X) \cong \Bbbk(Y)$.

Proof. 通过 [引理1.5] 立即看到 (1) 与 (3) 等价. 如果 X 和 Y 双有理等价, 那么存在支配有理映射 $\varphi : X \dashrightarrow Y, \psi : Y \dashrightarrow X$ 使得 $\psi\varphi = 1_X$ 且 $\varphi\psi = 1_Y$. 设 φ 的定义域是 U, ψ 的定义域是 V, 那么存在 $\varphi^{-1}(V)$ 的非空开子集 $W \subseteq U$ 使得 $\psi\varphi|_W = \mathrm{id}_W$. 注意到 $\varphi(W)$ 是 Y 的稠密子集, 所以 $W \cap \varphi^{-1}(V)$ 是 V 的非空开子集, 同理 $V \cap \psi^{-1}(W)$ 是 V 的非空开子集. 由 $\varphi\psi = 1_Y$ 知存在 $V \cap \psi^{-1}(W)$ 的非空开子集 T 使得 $\varphi\psi|_T = \mathrm{id}_T$. 进而 φ 与 ψ 给出了 $\varphi^{-1}(T)$ 与 T 间的同构. 现取 $X_1 = \varphi^{-1}(T), Y_1 = T$ 便得 $X_1 \cong Y_1$, 这证明了 (1)⇒(2). 而 (2)⇒(1) 由有理映射及其合成的定义立即得到. □

通过双有理等价可给出不可约仿射簇类上一个相较同构类更粗的划分. 有理映射、双有理等价的概念都可以对更一般的不可约拟射影簇定义, 人们感兴趣对每个不可约拟射影簇所在的双有理等价类中寻找光滑的代表元 (与之相关的理论被称为**奇点解消**) 以及构造双有理不变量等. 1964 年 H. Hironaka(日本, 1931-) 证明了特征零的域上任何不可约拟射影簇总双有理等价于某个光滑的不可约射影簇.

参考文献

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 1977.

[Sha94] I. R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry 1*, volume 2. Springer, 1994.