投射模的秩

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 11 月 25 日

对含幺交换环上的自由模, 我们有秩的概念. 这份笔记主要介绍交换代数中有限生成投射模的秩.

设 R 是含幺交换环, M 是秩为 n 的自由 R-模, 则对 R 的乘闭子集 $S(0 \notin S)$, M_S 是秩为 n 的自由 R-模. 这是因为作为 R_S-模有 $M_S \cong R_S \otimes_R M \cong R_S \otimes_R R^n \cong (R_S \otimes_R R)^n \cong R_S^n$. 如果 M 是由 n 个元素生成的投射 R-模, 那么 M_S 是由 n 个元素生成的投射 R_S-模. 这是因为这时存在 R-模 N 使得 $M \oplus N \cong R^n$, 于是 $(R_S \otimes_R M) \oplus (R_S \otimes_R N) \cong R_S^n$, 所以 $M_S \oplus N_S \cong R_S^n$, 这说明 M_S 是由 n 个元素生成的投射 R_S-模.

对含幺交换环 R 的每个素理想 P, 若 M 是由 n 个元素生成的投射 R-模, 那么 M_P 是秩不超过 n 的自由 R_P-模. 对每个素理想 P, 记 $\gamma_M(P)$ 是 M_P 作为自由 R_P-模的秩, 命 $\gamma_M : \operatorname{Spec}(R) \to \mathbb{Z}, P \mapsto \gamma_M(P)$.

Definition 1. 如果投射模 M 满足 γ_M 是常值函数, 则称该常数为有限生成投射模 M 的**秩**, 记为 $\operatorname{rank}(M)$.

我们已经看到, 当 M 是有限生成自由模时, 对任何素理想 P, R_P-模 M_P 作为自由模的秩就是 M 作为自由 R-模的秩. 因此我们在有限生成投射模上定义秩与有限生成自由模的秩是一致的. 我们将 $\mathbb{Z}$ 赋予 $\mathbb{R}$ 上欧式拓扑的子空间拓扑, 那么 $\mathbb{Z}$ 上带有离散拓扑, 一个自然的问题是拓扑空间之间的映射 $\gamma_M : \operatorname{Spec}(R) \to \mathbb{Z}$ 是否是连续映射? 为了解答这个问题我们需要下面的引理.

Lemma 2. 设 R 是含幺交换环, M 是有限生成投射 R-模, P 是 R 的一个素理想, 则存在 $a \notin P$, 使得 $M_{\langle a \rangle}$ 作为 $R_{\langle a \rangle}$-模是自由的, 其中 $\langle a \rangle$ 表示由 a 在含幺半群 $(R, \cdot)$ 中生成的含幺子半群 $\{a^n | n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$.

Proof. 因为 M 是有限生成投射 R-模, 所以 M_P 作为 R_P-模也是有限生成投射模. 由于 R_P 是局部环, 所以 M_P 是秩有限 (且不超过 M_P 的生成元个数) 的自由 R_P-模. 设自由 R_P-模 M_P 有基 $\{x_1/s_1, x_2/s_2, ..., x_n/s_n\}$, 那么 $\{x_1/1_R, x_2/1_R, ..., x_n/1_R\}$ 也是 M_P 的基. 命

$$f : R^n \to M, (a_1, a_2, ..., a_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

是 R-模同态, 那么 $f_P : (R^n)_P \to M_P$ 是 R_P-模同构 (直接计算验证可知同态 f_P 将 $(R^n)_P$ 中的基

$$\{(1_R, 0, ..., 0)/1_R, (0, 1_R, 0, ..., 0)/1_R, ..., (0, ..., 0, 1_R)/1_R\}$$

映到 M_P 的基 $\{x_1/1_R, x_2/1_R, ..., x_n/1_R\}$), 因此 $\operatorname{Ker} f_P = \{0\}, \operatorname{Coker} f_P = \{0\}$. 于是 $(\operatorname{Coker} f)_P = \{0\}, (\operatorname{Ker} f)_P = \{0\}$. 由 M 是有限生成投射模可知 $\operatorname{Coker} f$ 也是有限生成模, 因此存在 $b \in R - P$ 使得 $b \in \operatorname{Ann}_R(\operatorname{Coker} f)$, 因

此 $(\mathrm{Coker}f)_{\langle b\rangle} = \{0\}$. 由此得到正合列 $0 \longrightarrow (\mathrm{Ker}f)_{\langle b\rangle} \longrightarrow (R^n)_{\langle b\rangle} \xrightarrow{f_{\langle b\rangle}} M_{\langle b\rangle} \longrightarrow 0$, 利用 $M_{\langle b\rangle}$ 是有限生成投射 $R_{\langle b\rangle}$-模知这一短正合列可裂, 所以 $(\mathrm{Ker}f)_{\langle b\rangle}$ 是有限生成的, 由此容易得到 (对生成元分析) 存在 $c \in R - P$ 使得 $(c/1_R)(\mathrm{Ker}f)_{\langle b\rangle} = \{0\}$. 因此 $(\mathrm{Ker}f)_{\langle bc\rangle} = \{0\}$. 记 $a = bc \in R - P$, 那么 $(\mathrm{Ker}f)_{\langle a\rangle} = \{0\}$, 易见此时也有 $(\mathrm{Coker}f)_{\langle a\rangle} = \{0\}$. 对正合列 $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}f \longrightarrow R^n \xrightarrow{f} M \longrightarrow \mathrm{Coker}f \longrightarrow 0$ 作用局部化函子 $(-)_{\langle a\rangle}$ 可得 $R_{\langle a\rangle}$-模同构 $M_{\langle a\rangle} \cong (R^n)_{\langle a\rangle} \cong R^n_{\langle a\rangle}$ 是自由 $R_{\langle a\rangle}$-模. □

下面的结果表明映射 $\gamma_M : \mathrm{Spec}(R) \to \mathbb{Z}$ 是连续的.

Proposition 3. 设 M 是含幺交换环 R 上有限生成投射模, 那么 $\gamma_M : \mathrm{Spec}(R) \to \mathbb{Z}$ 是连续映射.

Proof. 因为 $\mathbb{Z}$ 上带有离散拓扑, 所以只需证明任意 $n \in \mathbb{Z}$ 关于 γ_M 的原像集是开集. 如果 $\gamma_M^{-1}(n)$ 是空集, 结论已成立. 下设 $P \in \gamma_M^{-1}(n)$, 根据前面的引理, 存在 $a \in R - P$ 使得 $M_{\langle a\rangle}$ 作为 $R_{\langle a\rangle}$-模是秩有限的自由模, 设 $\mathrm{rank}_{R_{\langle a\rangle}} M_{\langle a\rangle} = \ell \geq 1$(如果 $M_{\langle a\rangle}$ 是零模, 利用 M 是有限生成的容易得到结论成立). 我们断言主开集 $X_a \subseteq \gamma_M^{-1}(n)$, 任取 $Q \in X_a$, 我们说明 M_Q 作为 R_Q 的秩是 m. 事实上由 $\mathrm{rank}_{R_{\langle a\rangle}} M_{\langle a\rangle} = \ell$ 可知存在 $x_1, x_2, ..., x_\ell \in M$ 使得 $\{x_1/1_R, x_2/1_R, ..., x_\ell/1_R\}$ 是 $M_{\langle a\rangle}$ 作为 $R_{\langle a\rangle}$-模的一个基. 我们验证 $\{x_1/1_R, x_2/1_R, ..., x_\ell/1_R\} \subseteq M_Q$ 是 M_Q 作为 R_Q-模的一个基: 首先在 $M_{\langle a\rangle}$ 中, 对任给 $m \in M$, 存在 $r_1, r_2, ..., r_\ell \in R, s_1, s_2, ..., s_\ell \in \langle a\rangle \subseteq R-Q$ 使得

$$\frac{m}{1_R} = \frac{r_1}{s_1}\frac{x_1}{1_R} + \frac{r_2}{s_2}\frac{x_2}{1_R} + \cdots + \frac{r_\ell}{s_\ell}\frac{x_\ell}{1_R} = \frac{r_1 s_2 \cdots s_\ell x_1 + r_2 s_1 s_3 \cdots s_\ell x_2 + \cdots + r_\ell s_1 s_2 \cdots s_\ell x_\ell}{s_1 s_2 \cdots s_\ell},$$

这表明存在 $u \in \langle a\rangle \subseteq R - Q$ 使得

$$u(s_1 s_2 \cdots s_\ell m - r_1 s_2 \cdots s_\ell x_1 + r_2 s_1 s_3 \cdots s_\ell x_2 + \cdots + r_\ell s_1 s_2 \cdots s_\ell x_\ell) = 0,$$

因此在 M_Q 中我们也有

$$\frac{m}{1_R} = \frac{r_1 s_2 \cdots s_\ell x_1 + r_2 s_1 s_3 \cdots s_\ell x_2 + \cdots + r_\ell s_1 s_2 \cdots s_\ell x_\ell}{s_1 s_2 \cdots s_\ell} = \frac{r_1}{s_1}\frac{x_1}{1_R} + \frac{r_2}{s_2}\frac{x_2}{1_R} + \cdots + \frac{r_\ell}{s_\ell}\frac{x_\ell}{1_R},$$

由此可知 M_Q 中任意元素可被 $\{x_1/1_R, x_2/1_R, ..., x_\ell/1_R\}$ 线性表出. 如果存在 $a_1, a_2, ..., a_\ell \in R, t_1, t_2, ..., t_\ell \in R - Q$ 使得

$$\frac{a_1}{t_1}\frac{x_1}{1_R} + \frac{a_2}{t_2}\frac{x_2}{1_R} + \cdots + \frac{a_\ell}{t_\ell}\frac{x_\ell}{1_R} = \frac{0}{1_R},$$

那么存在 $v \in R - Q$ 使得 $v(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_\ell x_\ell) = 0$, 于是在 $M_{\langle a\rangle}$ 中有

$$\frac{va_1}{1_R}\frac{x_1}{1_R} + \frac{va_2}{1_R}\frac{x_2}{1_R} + \cdots + \frac{va_\ell}{1_R}\frac{x_\ell}{1_R} = \frac{0}{1_R},$$

所以对每个 va_k, 都存在 $c_k \in \langle a\rangle \subseteq R - Q$ 使得 $c_k v a_k = 0$, 由此立即得到在 R_Q 中 $a_k/t_k = 0/1_R$, 这就说明了 $\{x_1/1_R, x_2/1_R, ..., x_\ell/1_R\} \subseteq M_Q$ 是 M_Q 作为 R_Q-模的基. 因此 $\mathrm{rank}_{R_Q} M_Q = \ell$. 特别地, $\mathrm{rank}_{R_P} M_P = \ell$, 所以 $n = \ell$, 从而 $X_a \subseteq \gamma_M^{-1}(n) = \gamma_M^{-1}(\ell)$. 因此 γ_M 是连续映射. □

Corollary 4. 如果含幺交换环 R 是连通的, 那么 R 上的有限生成投射模的秩是定义合理的.

Theorem 5. 设 R 是含幺交换环, M 是 R 上有限生成投射模, 则 $\gamma_M(\mathrm{Spec}(R))$ 是有限集, 设为 $\{n_1, n_2, ..., n_s\}$, 那么存在 R 的非零理想直和分解 $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots \oplus R_s$ 使得每个 R_k 都是含幺交换环且 $R_k M$ 是 R_k 上秩为 n_k 的有限生成投射模.

Proof. 不妨设 M 是非零模, 否则取 $s=1$ 即可. 因为 M 是 R 上有限生成模, 所以 $\gamma_M:\mathrm{Spec}(R)\to\mathbb{Z}$ 是连续映射, 于是 $\{\gamma_M^{-1}(n)|n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ 构成 $\mathrm{Spec}(R)$ 的一个开覆盖, 因为素谱是拟紧的, 所以该开覆盖有有限子覆盖, 设 $n_1,n_2,...,n_s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 满足 $\mathrm{Spec}(R)=\bigcup\limits_{k=1}^{s}\gamma_M^{-1}(n_k)$. 注意到 $\mathbb{Z}$ 上的是离散拓扑, 因此每个 $\gamma_M^{-1}(n_k)$ 是素谱 $\mathrm{Spec}(R)$ 中既开又闭集, 于是对每个 k 存在 R 中幂等元 e_k 使得 $X_{e_k}=\gamma_M^{-1}(n_k)$. 不妨设所有的 e_k 非零. 对 $1\leq i\neq j\leq s$, 有 $X_{e_ie_j}=X_{e_i}\cap X_{e_j}=\varnothing$, 因此 e_ie_j 是幂零元, 于是由 e_i,e_j 的幂等性知 $e_ie_j=0$. 因为这时 $\mathrm{Spec}(R)=\bigcup\limits_{k=1}^{s}X_{e_k}$, 所以 $V(\{e_1,e_2,...,e_s\})=V(\sum\limits_{k=1}^{s}e_k)=\varnothing$, 于是知 $\sum\limits_{k=1}^{s}e_k$ 是 R 中可逆元. 由于 $\sum\limits_{k=1}^{s}e_k$ 幂等可知 $\sum\limits_{k=1}^{s}e_k=1_R$. 易见 $R=Re_1\oplus Re_2\oplus\cdots\oplus Re_s$, 因为每个 $e_k\neq 0$, 所以每个 $R_k=Re_k$ 是 R 中非零理想, 且是含幺交换环, 幺元为 e_k. 易见每个 R_k-模 N 都有 R-模结构: $R\times N\to N,(r,n)\mapsto re_kn$, 由此不难证明 M_k 作为 R_k-模是投射的. 由 M 是有限生成 R-模可知 M_k 是有限生成投射 R_k-模. 任取 $P_k\in\mathrm{Spec}(R_k)$, 下面证明 $\mathrm{rank}_{R_k}M_{P_k}=n_k$. 命 $P=P_k+\sum\limits_{j\neq k}R_j$, 注意到 $e_k\notin P$, 故容易验证 P 是 R 中素理想. 由 n_k 的选取方式知 M_P 作为 R_P-模是秩为 n_k 的自由模. 如果 $M_P=\{0\}$, 容易验证 $M_{P_k}=\{0\}$. 因此我们只需考虑 $n_k\geq 1$ 的情形, 为叙述方便, 记 n_k 为 ℓ. 设 M_P 作为 R_P-模有基 $\{x_1/1_R,x_2/1_R,...,x_\ell/1_R\}$, 容易验证 M_{P_k} 作为 R_k-模有基 $\{e_kx_1/e_k,e_kx_2/e_k,...,e_kx_\ell/e_k\}$, 因此 $\mathrm{rank}_{R_k}M_{P_k}=n_k$, 故 M_k 作为有限生成投射 R_k-模的秩为 n_k. □