商范畴

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 8 月 9 日

这份笔记主要记录了我在 2023 年 8 月 4 日至 8 月 9 日学习商范畴 (Serre 商) 的基本知识, 结论大都来自 [Smi97], 证明细节主要参考了 [Gab62], [Pop73] 和 [Sta23]. 商范畴最早由 A. Grothendieck 在 [Gro57] 中引入, 后由其博士生 P. Gabriel 在博士论文 [Gab62] 中系统地补充了商范畴的基本性质的证明细节并发展了应用 (这篇文章中使用了 Grothendieck 宇宙的假定, 而这里使用 von Neumann-Bernays-Gödel 公理系统并承认全局选择公理). 内容主要由以下三部分构成:

- 首先介绍 Serre 子范畴 (见 [定义1.1]) 的基本概念, 它可以被认为是抓住挠 Abel 群范畴作为 **Ab** 全子范畴中的一个特性的抽象产物. 随后详细地定义 Abel 范畴关于一个 Serre 子范畴的商范畴 (见 [定义1.5]), 它是具有和原有 Abel 范畴相同的对象类的 Abel 范畴, 并且原先范畴到其商范畴的标准函子 (以下称为商函子) 是正合函子. 与原先的 Abel 范畴不同的是, 原先 Abel 范畴的 Serre 子范畴中的对象对应到商范畴中全部变成了零对象, 原先 Abel 范畴中核 (余核) 在 Serre 子范畴中的态射对应到商范畴中全部变成了 monic(epic) 态.
- 随后推导了商范畴的基本性质并验证了商范畴的泛性质 (见 [定理2.11]). 并给了两个重要例子, 一是任何含幺环 R 如果有右分母集 S, 那么 **Mod-**R 中所有 S-挠模构成 Serre 子范畴 $\mathcal{S}$(见 [例1.3]) 并且 **Mod-**R 关于 $\mathcal{S}$ 的商范畴和 **Mod-**R_S 是范畴等价的 (见 [例2.15]). 特别地, **Ab** 关于挠 Abel 群范畴的商范畴范畴等价于 $\mathbb{Q}$ 上线性空间范畴; 二是不加证明地介绍了作为 0 次部分 S_0 上代数可由有限个 1 次部分 S_1 生成的交换 Noether 正分次环 S 决定的射影概形 Proj$S$ 上的凝聚层范畴 **Coh**(Proj$S$) 和 S 上有限生成分次模范畴关于某种意义下的挠子模范畴的商范畴范畴等价 (见 [例2.16]), 这表明商范畴可以作为联系几何范畴与代数范畴的基本语言.
- 最后介绍了当商函子的右伴随存在时, 商函子与右伴随具有的性质, 例如这时右伴随与商函子的合成自然同构于商范畴上的恒等函子 (见 [命题3.3]), 因此一般称商函子的右伴随为截面函子.

由于水平有限, 虽然我全力以赴, 但还是无法避免笔记中存在不足与错误, 欢迎批评指正.

1 商范畴的构造

本节我们学习从一个 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 出发, 关于它的一个 Serre 子范畴 $\mathcal{S}$(见 [定义1.1]) 的商范畴 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$(见 [定义1.5]) 的具体构造, 关于商范畴细致地讨论最早来自 P. Gabriel 的博士论文 [Gab62].

Set-theoretical Assumption. 为避免集合论层面的问题, 如无特别说明, 对所考虑的 Abel 范畴的任何对象 X, 该对象所有不同的子对象构成的类 $\mathrm{Sub}(X)$ 是集合, 这一假定包含了 (非) 分次模范畴. 并且把对象 X 的子对象全体构成的集合 $\mathrm{Sub}(X)$ 与所有子对象的一个代表元集 (子对象本身是用等价类定义) 视作等同.

首先正式引入 Serre 子范畴的概念, 挠 Abel 群全子范畴就是 $\mathbf{Ab}$ 特殊的 Serre 子范畴.

Definition 1.1 (Serre 子范畴)**.** Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的非空全子范畴 $\mathcal{S}$ 被称为 **Serre 子范畴**, 如果它满足对任何 $\mathcal{A}$ 中正合列 $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$, 有 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$ 当且仅当 $X', X'' \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$.

Remark 1.2. 通过定义易见 Abel 范畴的一个非空全子范畴是 Serre 子范畴的充要条件是它对取子对象、取商对象和取扩张对象封闭. 特别地, Serre 子范畴关于同构封闭. 一般也把 $\mathcal{S}$ 中对象称为是关于该 Serre 子范畴的**挠对象** (torsion subobject). 如果 Abel 范畴中一个对象 X 满足 X 的子对象只有零对象在给定的 Serre 子范畴中, 则称 X 关于该 Serre 子范畴是**无挠的** (torsion-free). 如果记 $\mathcal{F}$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中所有关于 Serre 子范畴 $\mathcal{S}$ 无挠的对象构成的全子范畴, 那么任给 $T \in \mathrm{ob}\mathcal{S}, F \in \mathrm{ob}\mathcal{F}$, 易见 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T, F) = 0$. 并且若 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 满足对任何 $T \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$ 有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T, X) = 0$, 那么 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{F}$. 之后会指出在一定条件下, $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ 可构成**挠对**.

下面我们来看一个来自非交换代数局部化理论的 Serre 子范畴经典例子.

Example 1.3. 设 R 是含幺环, 乘闭子集 S 是右分母集, M 是右 R-模, 回忆 M 的 **S-挠部分**是指 $t_S(M) = \{x \in M | 存在 s \in S, 使得 xs = 0\}$ 是. 易见 $t_S(M)$ 确实是 M 的子模 (原因是对每个 $x_1, x_2 \in t_S(M)$, 设 $s_1, s_2 \in S$ 使 $x_1 s_1 = x_2 s_2 = 0$. 因为 S 满足右 Ore 条件, 存在 $a \in R, t \in S$ 使得 $s_1 a = s_2 t = u \in S$, 从而 $x_1 u = x_2 u = 0$, 即 $(x_1 - x_2)u = 0$, 所以 $x_1 - x_2 \in t_S(M)$. 下面再说明 $x_1 r \in t_S(M), \forall r \in R$. 同样由右 Ore 条件, 存在 $b \in R, v \in S$ 使 $s_1 b = rv$, 于是 $x_1 rv = 0$). 如果 $t_S(M) = M$, 即对任何 $x \in M$, 存在 $s \in S$ 使得 $xs = 0$, 则称 M 是 **S-挠模** (S-torsion). 如果 M 满足能够被 S 中某个元素零化的元素只有零, 即 $t_S(M) = 0$, 称 M 是 **S-无挠** (S-torsionfree). 易见任何右 R-模 M, $M/t_S(M)$ 总是 S-无挠. 和交换代数类似, 这时有局部化函子 $(-)_S : \mathbf{Mod}\text{-}R \to \mathbf{Mod}\text{-}R_S$, 它满足自然同构 $(-)_S \cong - \otimes_R R_S$ 并且仍是正合函子. 此外, 根据右 R-模关于 S 作局部化的定义, 容易证明：对任何右 R-模 M, M 是 S-挠模的充要条件是 $M_S = 0$. 于是利用局部化函子是正合函子可知, 全子范畴 $\mathcal{S} = \{M \in \mathbf{Mod}\text{-}R | M 是 S\text{-}挠模\}$ 是 $\mathbf{Mod}\text{-}R$ 的 Serre 子范畴.

Remark 1.4. 若取 $R = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z} - \{0\}$, 那么 $\mathcal{S}$ 就是挠 Abel 群范畴. 一般地, 若 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的正合函子, 那么全子范畴 $\mathrm{Ker}F = \{X \in \mathrm{ob}\mathcal{A} | FX = 0\}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Serre 子范畴.

我们之后定义的商范畴 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 它的对象类会和 $\mathcal{A}$ 的对象类一致, 下面先对之后定义商范畴的 Hom 集作准备. 设 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 有 Serre 子范畴 $\mathcal{S}$, 对 $\mathcal{A}$ 中任意两个对象 X, Y, 考虑

$$I = \{(X', Y') | X' \subseteq X, Y' \subseteq Y 使得 X/X', Y' \in \mathrm{ob}\mathcal{S}\},$$

它本身是 $\mathrm{Sub}(X) \times \mathrm{Sub}(Y)$ 的子类, 根据我们的假定, $\mathrm{Sub}(X) \times \mathrm{Sub}(Y)$ 是集合, 所以 I 也是集合. 下面在 I 上定义二元关系：$(X', Y') \leq (X'', Y'')$, 如果 $X'' \subseteq X', Y' \subseteq Y''$. 容易看出 $(I, \leq)$ 是正向集, 并且有范畴 $\mathbf{Ab}$

上以 I 为指标集的正向系 $\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X',Y/Y'),\varphi_j^i\}_I$, 这里 φ_j^i 如下定义：当 $i=(X',Y')\le(X'',Y'')=j\in I$ 时, 记 $\pi:Y/Y'\to Y/Y''$ 是由子对象关系 $Y'\subseteq Y''$ 诱导的标准 epic 态, $l:X''\to X'$ 是子对象包含关系对应的 monic 态. 那么定义 $\varphi_j^i:\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X',Y/Y')\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X'',Y/Y''), f\mapsto\pi fl$, 这明显是加群同态. 因为模范畴中正向系的正向极限总存在 (回忆对 $\mathbf{Mod}\text{-}R$ 中以正向集 I 为指标的正向系 $\{F_i,\varphi_j^i\}_I$, 置 $F=\oplus_{i\in I}F_i$, 设 $\lambda_i:F_i\to F$ 是标准映射, 若记 S 是由集合 $\{\lambda_i(a_i)-\lambda_j\varphi_j^i(a_i)|a_i\in F,i\le j\in I\}$ 所生成的 F 的子模, 并记 $\alpha_i:F_i\to F/S$ 是由 λ_i 诱导的自然同态, 可直接验证 F 与 $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ 即为上述正向系的正向极限), 故可定义

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,Y)=\varinjlim_{(X',Y')\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X',Y/Y')$$

接下来我们说明对任给 $X,Y,Z\in\mathrm{ob}\mathcal{A}$, 可定义合成 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,Y)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,Z)$. 由于在一般的 Abel 范畴中定义合成映射的细节较为复杂, 下面仅对 $\mathcal{A}=\mathbf{Ab}$ 的情形定义, 它至少已经包含了模范畴层面的验证. 先引入一些记号, 设正向系

$$\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X',Y/Y'),\varphi_j^i\}_I,\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y'',Z/Z'),\varphi_{j'}^{i'}\}_{I'},\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X'',Z/Z''),\varphi_{j''}^{i''}\}_{I''}$$

的正向极限由下图给出：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,Y) & & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,Z) & & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(Y,Z) \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X',Y/Y') \arrow[ul, "\alpha_i"] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X'',Z/Z'') \arrow[u, "\gamma_{i''}"] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y'',Z/Z') \arrow[ur, "\beta_{i'}"'] &
\end{tikzcd}$$

任给 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,Y),g\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(Y,Z)$, 因为 I,I' 均为正向集, 所以存在 $i=(X',Y')\in I$ 以及 $i'=(Y'',Z')\in I'$ 使得存在 $\sigma\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X',Y/Y'),\tau\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y'',Z/Z')$ 满足 $\alpha_i(\sigma)=f,\beta_i(\tau)=g$. 根据指标集 I,I' 的定义, 这时有 $X/X',Y',Y/Y'',Z'\in\mathrm{ob}\mathcal{S}$. 作 $X''=\sigma^{-1}(Y'+Y''/Y')\subseteq X'$ 以及 $Z''=p^{-1}(\tau(Y'\cap Y''))\subseteq Z$, 这里 $p:Z\to Z/Z'$ 是标准投射, 若记 $\tau(Y'\cap Y'')=T/Z',T\supseteq Z'$, 则 $Z''=T+Z'$, 特别地, $Z'\subseteq Z''\subseteq Z$.

Lemma. 上面构造的 X'' 和 Z'' 满足 $X/X'',Z''\in\mathrm{ob}\mathcal{S}$.

Proof. 对 $X''\subseteq X'\subseteq X$, 总有正合列 $0\longrightarrow X'/X''\longrightarrow X/X''\longrightarrow X/X'\longrightarrow 0$, 其中 $X/X'\in\mathrm{ob}\mathcal{S}$, 所以要说明 $X/X''\in\mathrm{ob}\mathcal{S}$ 只需说明 $X'/X''\in\mathrm{ob}\mathcal{S}$. 考虑 $\sigma:X'\to Y/Y'$ 诱导的下述交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\sigma}"] & X' \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & X'/X'' \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\sigma}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y'+Y''/Y' \arrow[r] & Y/Y' \arrow[r] & Y/(Y'+Y'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

易知 $Y/(Y'+Y'')$ 作为 Y/Y'' 的商对象也在 $\mathcal{S}$ 中. 根据 X'' 的定义可直接验证 $\overline{\sigma}$ 是单射, 所以利用 $\mathcal{S}$ 是 Serre 子范畴得到 X'/X'' 作为 $Y/(Y'+Y'')$ 的子对象也在 $\mathcal{S}$ 中. 下面说明 $Z''\in\mathrm{ob}\mathcal{S}$. 因为 $\tau(Y'\cap Y'')$ 是 Y' 的子商, 故 $\tau(Y'\cap Y'')\in\mathrm{ob}\mathcal{S}$. 注意 $0\longrightarrow Z'\longrightarrow Z''\xrightarrow{\overline{p}}\tau(Y'\cap Y'')\longrightarrow 0$ 正合, 所以由 $Z'\in\mathrm{ob}\mathcal{S}$ 立即得到 $Z''\in\mathrm{ob}\mathcal{S}$. $\square$

于是 $(X'',Z'')\in I''=\{(X'',Z'')|X''\subseteq X,Z''\subseteq Z\text{使得}X/X'',Z''\in\mathrm{ob}\mathcal{S}\}$, 记 $\tilde{\tau}:Y''/Y'\cap Y''\to Z/Z''$ 是 τ 诱导的自然同态, 我们定义 $\theta:X''\to Z/Z''$ 是下述同态序列的合成：

$$X''\xrightarrow{\tilde{\sigma}}Y'+Y''/Y'\xrightarrow{\cong}Y''/Y'\cap Y''\xrightarrow{\tilde{\tau}}Z/Z''$$

定义 $gf\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,Z)$ 为 $\theta\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X'',Z/Z'')$ 关于 $\gamma_{i''}$(这里 $i''=(X'',Z'')\in I''$) 下的像. 为说明 gf 的定义合理, 需要说明 $gf=\gamma_{i''}(\theta)$ 不依赖于 $\sigma\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X',Y/Y'),\tau\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y'',Z/Z')$ 的选取. 因此关于 gf 定义合理的验证可以化归为两步: (1) 验证对固定的选取 $\tau\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y'',Z/Z')$, 如果 $\sigma_1\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_1',Y/Y_1'),\sigma_2\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_1',Y/Y_1')$ 满足它们在正向极限 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,Y)$ 中的像一致, 那么通过 σ_1 定义出的 $\theta_1\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_1'',Z/Z_1'')$ 和 σ_2 定义出的 $\theta_2\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_2'',Z/Z_2'')$ 在正向极限 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,Z)$ 中的像一致; (2) 对固定的选取 $\sigma\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X',Y/Y')$, 验证对满足条件不同的 τ 诱导出的 σ 对应正向极限 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,Z)$ 中相同的像. 以 (1) 为例, 根据正向极限的性质, 对满足条件的 $\sigma_1\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_1',Y/Y_1'),\sigma_2\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_1',Y/Y_1')$(以下记 $i_1=(X_1',Y_1'),i_2=(X_2',Y_2')$), 一定存在 $i_3=(X_3',Y_3')\in I$ 使得 $i_1,i_2\leq i_3$ 以及 $\varphi_{i_3}^{i_1}(\sigma_1)=\varphi_{i_3}^{i_2}(\sigma_2)=\sigma_3\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_3',Y/Y_3')$. 因此, 关于 (1) 的验证可以化归为验证下述特殊情形.

Lemma. 设 $i_1=(X_1',Y_1'),i_2=(X_2',Y_2')$ 满足 $i_1\leq i_2$ 且 $\sigma_1\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_1',Y/Y_1'),\sigma_2\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_1',Y/Y_1')$ 满足 $\sigma_2=\varphi_{i_2}^{i_1}(\sigma_1)$, 那么 σ_1 诱导的 θ_1 与 σ_2 诱导的 θ_2 在正向极限 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,Z)$ 中的像一致.

Proof. 因为这时 $X_2'\subseteq X_1',Y_1'\subseteq Y_2'$, 所以有 $X_2''\subseteq X_1'',Z_1''\subseteq Z_2''$ 记 $l:X_2''\to X_1''$ 是标准嵌入, $\pi:Z/Z_1''\to Z/Z_2''$ 是标准投射, 那么下图交换:

$$\begin{array}{ccccccc}
X_1'' & \xrightarrow{\tilde{\sigma_1}} & Y_1'+Y_1''/Y_1' & \xrightarrow{\cong} & Y_1''/Y_1'\cap Y_1'' & \xrightarrow{\tilde{\tau_1}} & Z/Z_1'' \\
{\scriptstyle j}\uparrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
X_2'' & \xrightarrow{\tilde{\sigma_2}} & Y_2'+Y_2''/Y_2' & \xrightarrow{\cong} & Y_2''/Y_2'\cap Y_2'' & \xrightarrow{\tilde{\tau_2}} & Z/Z_2''
\end{array}$$

这意味着 $\theta_2=\varphi_{i_2''}^{i_1''}(\theta_1)$, 其中 $i_1''=(X_1'',Z_1''),i_2''=(X_2'',Z_2'')\in I''$, 故结论成立. □

于是我们得到态射 $f\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,Y),g\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(Y,Z)$ 的合成 $gf\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,Z)$ 定义合理, 并且根据合成的定义可以看到合成具备结合律, 并满足对任给 $f,f_1,f_2\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,Y),g,g_1,g_2\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(Y,Z)$ 有

$$g(f_1+f_2)=gf_1+gf_2,(g_1+g_2)f=g_1f+g_2f.$$

此外, 对任给 $X\in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 取 $X'=X,Y'=0$, 那么 (X',Y') 满足 $X/X',Y'\in \mathrm{ob}\mathcal{S}$, 进而有恒等态 $\mathrm{id}_X\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X',Y/Y')=\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,X)$, 容易验证 id_X 在正向极限 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,X)$ 中的像 1_X 满足对任何态射 $f\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,Y),g\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(Z,X)$ 有 $f1_X=f,1_Xg=g$. 现在我们可以给出商范畴的正式定义.

Definition 1.5 (商范畴)**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Serre 子范畴, 通过如下方式定义的范畴 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 称为 $\mathcal{A}$ 关于 $\mathcal{S}$ 的**商范畴** (quotient category)(或称之为 **Serre 商**):
(1) 定义 $\mathrm{ob}\mathcal{A}/\mathcal{S}=\mathrm{ob}\mathcal{A}$;
(2) 对任意两个对象 $X,Y\in \mathrm{ob}\mathcal{A}/\mathcal{S}=\mathrm{ob}\mathcal{A}$, 定义

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,Y)=\varinjlim_{(X',Y')\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X',Y/Y'),$$

其中 $I=\{(X',Y')|X'\subseteq X,Y'\subseteq Y使X/X',Y'\in \mathrm{ob}\mathcal{S}\}$ 与正向系 $\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X',Y/Y'),\varphi_j^i\}_I$ 的定义如前所述;
(3) 对任给 $f\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,Y),g\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(Y,Z)$, 设 $i=(X',Y')\in I$ 以及 $i'=(Y'',Z')\in I'$ 使得存在 $\sigma\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X',Y/Y'),\tau\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y'',Z/Z')$ 满足 $\alpha_i(\sigma)=f,\beta_i(\tau)=g$. 作 $X''=\sigma^{-1}(Y'+Y''/Y')\subseteq X'$ 以及

$Z'' = p^{-1}(\tau(Y' \cap Y'')) \subseteq Z$, 其中 $p : Z \to Z/Z'$ 是标准投射, 并设 $\tilde{\sigma} : X'' \to Y' + Y''/Y'$ 是 σ 诱导的标准态射, $\tilde{\tau} : Y''/Y' \cap Y'' \to Z/Z''$ 是 τ 诱导的自然同态, 定义 $\theta : X'' \to Z/Z''$ 是下述同态序列的合成：

$$X'' \xrightarrow{\tilde{\sigma}} Y' + Y''/Y' \xrightarrow{\cong} Y''/Y' \cap Y'' \xrightarrow{\tilde{\tau}} Z/Z''$$

再定义 $gf \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X, Z)$ 为 θ 关于 $\gamma_{i''}$(这里 $i'' = (X'', Z'') \in I''$) 下的像来得到合成映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X, Z).$$

根据前面的讨论, $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 确实构成范畴.

对商范畴 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 中任意两个对象 X, Y, 取 $X' = X, Y' = 0$, 则任何 $\mathcal{A}$ 中态射 $f : X \to Y$ 对应 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X, Y)$ 中态射 $\pi(f)$(通过正向极限中的同态), 那么明显有 $\pi(f+f') = \pi(f)+\pi(f'), \forall f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ 以及 $\pi(\mathrm{id}_X) = 1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X, X)$, 这里 $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X)$ 是单位态. 如果定义 $\pi : \mathrm{ob}\mathcal{A} \to \mathrm{ob}\mathcal{A}/\mathcal{S}$, 就得到共变函子 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$. 于是由 $\mathcal{A}$ 是加性范畴保证了 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 也是加性范畴. 进而 π 是加性函子.

Definition 1.6 (商范畴的商函子)**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Serre 子范畴, 通过上述方式定义的共变加性函子 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ 称为**商函子**.

2 商范畴基本性质

本节固定记号：$\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Serre 子范畴, $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ 表示商函子. 我们将证明商范畴是 Abel 范畴且商函子是正合函子, 为了证明这一事实, 需要做一些准备.

先指出, 根据商范畴中态射合成的定义, 有如下的基本观察 (通过态射合成定义直接验证可得).

Proposition 2.1 ([Pop73])**.** 如果 $\mathcal{A}$ 中态射 $s : X \to Y$ 满足 $\mathrm{Ker}s, \mathrm{Coker}s \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$, 则 $\pi(s)$ 是 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 中同构. 对 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 中任意态射 $f : X \to Y$, 设 $(X', Y') \in I$ 满足 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X', Y/Y')$ 中有态射 $g : X' \to Y/Y'$ 使得 g 对应在正向极限 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X, Y)$ 中元素是 f, 那么对子对象包含关系对应的 monic 态 $l : X' \to X$ 和标准 epic 态 $p : Y \to Y/Y'$ 有 $\pi(g) = \pi(p) f \pi(l)$, 其中 $\pi(p), \pi(l)$ 都是同构.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, "\pi(p)"] \\ X' \arrow[u, "\pi(l)"] \arrow[r, "\pi(g)"'] & Y/Y' \end{tikzcd}$$

Remark 2.2. 对每个 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}/\mathcal{S}$, 该命题也表明存在 $X' \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 使得 $\pi(X') \cong X$, 即商函子是稠密的.

下面的引理表明 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 关于给定的 Serre 子范畴作商后将 $\mathcal{S}$ 中对象全部变成零对象.

Lemma 2.3 ([Smi97])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Serre 子范畴, $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ 是商函子. 则对 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, $X \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$ 的充要条件在商范畴 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 中 $X = \pi(X) = 0$. 即商函子作用后是零的对象恰好是 $\mathcal{S}$ 中对象.

Proof. 必要性：只需说明 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X, X) = 0$, 记 $I = \{(X', Y') | X' \subseteq X, Y' \subseteq X \text{使得} X/X', Y' \in \mathrm{ob}\mathcal{S}\}$. 任取 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X, X)$, 因为商范畴中态射集用正向集上正向系定义, 所以存在 $i = (X', Y') \in I$ 使得有

$\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X', X/Y')$ 使得 σ 对应正向极限 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,X)$ 中元素是 f. 注意到 $j=(X',Y') \le (0,Y') \in I$, 所以 f 也是 $\varphi_j^i(\sigma) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(0, X/Y')$ 在正向极限中对应的元素, 进而 $f=0$.

充分性：此时 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,X)=0$, 这说明 1_X 作为 $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,X)$ 在正向极限中对应的元素也是零, 因为 I 是正向集, 所以对 $i=(X,0)\in I$, 存在 $j=(X',Y') \ge i$ 使得 $\varphi_j^i(\mathrm{id}_X)=0$. 具体地, 记 $l: X' \to X$ 是子对象关系对应的 monic 态, $p: X \to X/Y'$ 是 epic 态, 那么 $0=\varphi_j^i(\mathrm{id}_X)=pl: X' \to X/Y'$. 于是存在态射 $q: X' \to Y'$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Y' \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "p"] & X/Y' \arrow[r] & 0 \\ & & X' \arrow[u, "l"] \arrow[ul, dashed, "q"] & & \end{tikzcd}$$

因为 $Y' \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$, 所以由 $q: X' \to Y'$ 是 monic 态得到 $X' \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$, 于是由 $X/X' \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$ 得到 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$. □

Lemma 2.4 ([Gab62]). 设 $f: X \to Y$ 是 $\mathcal{A}$ 中态射. 那么 $\pi(f)=0$ 的充要条件是 $\mathrm{Im}f \in \mathcal{S}$.

Proof. 充分性由 [引理2.3] 立即得到. 必要性：如果 $\pi(f)=0$, 那么存在 $j=(X',Y')\in I$ 使得对 $i=(X,0)\in I$ 有 $\varphi_j^i(f)=0$, 若记 $l: X' \to X$ 是子对象关系的嵌入, $p: Y \to Y/Y'$ 是标准投射, 则 $f'=pfl: X' \to Y/Y'$ 是零态. 这意味着 f 诱导出态射 $\tilde{f}: X' \to Y'$ 满足对标准态射 $\overline{f}: X \to \mathrm{Im}f + Y'$ 有下图交换 (上下两行正合)：

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}"] & X \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f}"] & X/X' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\hat{f}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y' \arrow[r] & \mathrm{Im}f + Y' \arrow[r, "p"] & (\mathrm{Im}f + Y')/Y' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

可直接验证 $p\overline{f}$ 是 epic 态 (细节繁琐, 不过当 $\mathcal{A}=\mathbf{Ab}$ 时明显成立), 故 $\hat{f}$ 是 epic 态. 于是由 $X/X' \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$ 知 $(\mathrm{Im}f+Y')/Y' \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$. 结合 $Y' \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$ 知 $\mathrm{Im}f+Y'$ 在 $\mathcal{S}$ 中. 那么 $\mathrm{Im}f$ 作为 $\mathrm{Im}f+Y'$ 的子对象也在 $\mathcal{S}$ 中. □

Lemma 2.5 ([Gab62]). 设 $f: X \to Y$ 是 $\mathcal{A}$ 中态射. 那么：(1)$\pi(f)$ 是 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 中 monic 态的充要条件是 $\mathrm{Ker}f \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$. (2)$\pi(f)$ 是 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 中 epic 态的充要条件是 $\mathrm{Coker}f \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$.

Proof. 仅验证 (1), (2) 类似可证. 必要性：如果 $\pi(f)$ 是 monic 态, 那么对 $k: \mathrm{Ker}f \to Y$ 有 $\pi(k)=0$, 进而 [引理2.4] 表明 $\mathrm{Ker}f \cong \mathrm{Im}k \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$. 充分性：设 $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Im}k \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$, 下面通过说明对任何 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 中非零态射 $g: Z \to X$ 有 $\pi(f)g \neq 0$ 来得到 $\pi(f)$ 是 monic 态. 根据商范畴中 Hom 集的定义, 存在 Z 的子对象 Z' 与 X 的子对象 X' 满足 $Z/Z', X' \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$ 并且有 $\theta: Z' \to X/X'$ 使得 θ 对应在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(Z,X)$ 中的像是 g. 不妨设 $X' \supseteq \mathrm{Ker}f$, 否则用 $X'+\mathrm{Ker}f$ 替换 X' 讨论 (这里用到了 $\mathrm{Ker}f$ 在 $\mathcal{S}$ 中). 设 $t: X' \to X$ 是子对象关系的标准嵌入, 现在考虑下述交换图：

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "t"] \arrow[d, "e"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X/X' \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Im}(ft) \arrow[r, "m"] & Y \arrow[r, "p"] & Y/\mathrm{Im}(ft) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

其中上下两行正合, e 是 epic 态, m 是 monic 态. 因为 $X' \supseteq \mathrm{Ker}f$, 所以 $\tilde{f}: X/X' \to Y/\mathrm{Im}(ft)$ 是 monic 态 (在模范畴层面追图易证, 可使用 Freyd-Mitchell 嵌入定理转化为模范畴得到). 因为 $g \neq 0$, 所以 [命题2.1] 表

明 $\pi(\theta)\neq 0$, 进而 $\mathrm{Im}\theta\notin \mathrm{ob}\mathcal{S}$. 于是 $\mathrm{Im}(\tilde{f}\theta)\cong \mathrm{Im}\theta\notin \mathrm{ob}\mathcal{S}$. 于是 $\pi(\tilde{f}\theta)\neq 0$, 下证 $\pi(f)g\neq 0$. 记 X 到 X/X' 的标准 epic 态是 p_1, $l_1: Z'\to Z$ 是标准 monic 态, 那么 $\tilde{f}p_1=pf$, 两边作用 π 得到

$$\pi(\tilde{f})\pi(p_1)=\pi(p)\pi(f).$$

由 [命题2.1] 知 $g=\pi(p_1)^{-1}\pi(\theta)\pi(l_1)^{-1}$. 对上面的等式两边右乘上 $\pi(p_1)^{-1}\pi(\theta)$ 得到 $0\neq\pi(\tilde{f})\pi(\theta)=\pi(p)\pi(f)g\pi(l_1)$, 这说明 $\pi(f)g\neq 0$, 因此 $\pi(f)$ 是 monic 态. □

Remark 2.6. 由于零对象总在 $\mathcal{S}$ 中, 所以 $\mathcal{A}$ 中任何 monic 态在商函子作用下成为 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 中 monic 态, $\mathcal{A}$ 中任何 epic 态在商函子作用下成为 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 中 epic 态. 换言之, 商函子保持 monic 态与 epic 态.

Lemma 2.7 ([Gab62])**.** 设 $f: X\to Y$ 是 $\mathcal{A}$ 中态射, $k: \mathrm{Ker}f\to X$ 是 f 的核, $c: Y\to \mathrm{Coker}f$ 是 f 的余核. 那么 $\pi(k)$ 是 $\pi(f)$ 的核, $\pi(c)$ 是 $\pi(f)$ 的余核. 特别地, 利用 [命题2.1] 中商范畴中态射的分解式立即得到商范畴 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 中任何态射存在核与余核, 并且 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 中任何 monic 态是它余核的核、任何 epic 态是核的余核.

Proof. 仅验证 $\pi(k)$ 是 $\pi(f)$ 的核, 余核情形类似可证. 在 Abel 范畴层面细节验证过于复杂, 所以这里仅验证 $\mathcal{A}=\mathbf{Ab}$ 的情形 (这里使用的方法可推广至 Abel 范畴, 只是泛性质细节较多). 因为商函子保持 monic 态, 所以 $\pi(k)$ 是 monic 态, 由 π 是加性函子立即得到 $\pi(f)\pi(k)=0$. 所以还需验证对任何满足 $\pi(k)g=0$ 的态射 $g\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(Z,X)$, 存在态射 $h\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(Z,\mathrm{Ker}f)$ 使得 $\pi(k)h=g$. 对于上述 $g: Z\to X$, 存在 Z 的子对象 Z' 与 X 的子对象 X' 使得 $Z/Z', X'\in\mathrm{ob}\mathcal{S}$ 以及 $g'\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z', X/X')$ 使得 g 是 g' 对应在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(Z,X)$ 中的像. 若设 $l: Z'\to Z$ 是标准 monic 态, $p: X\to X/X'$ 是标准 epic 态, 则 $\pi(g')=\pi(p)g\pi(l)$. 考虑交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f \arrow[r, "k"] \arrow[d, "p_3"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "p_1"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f/(\mathrm{Ker}f\cap X') \arrow[r, "k'"] & X/X' \arrow[r, "\tilde{f}"] & Y/f(X')
\end{tikzcd}$$

其中上下两行正合, k' 来自标准同构 $\mathrm{Ker}f/(\mathrm{Ker}f\cap X')\cong(\mathrm{Ker}f+X')/X'$, $\tilde{f}$ 由 $f: X\to Y$ 自然诱导. 利用 $\pi(f)g=0$ 以及 $f(X')\in\mathrm{ob}\mathcal{S}$, 将 $g=\pi(p)^{-1}\pi(g')\pi(l)^{-1}$ 代入等式可得 $\pi(\tilde{f}g')=0$. 应用 [引理2.4] 得 $\mathrm{Im}(\tilde{f}g')\in\mathrm{ob}\mathcal{S}$. 所以 $Z'/\mathrm{Ker}(\tilde{f}g')\cong\mathrm{Im}(\tilde{f}g')\in\mathrm{ob}\mathcal{S}$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f/(\mathrm{Ker}f\cap X') \arrow[r, "k'"] & X/X' \arrow[r, "\tilde{f}"] & Y/f(X') \\
& \mathrm{Ker}\tilde{f}g' \arrow[r, "i"] & Z' \arrow[u, "g'"] &
\end{tikzcd}$$

记 $i: \mathrm{Ker}\tilde{f}g'\to Z'$ 是标准嵌入, 那么 $\tilde{f}g'i=0$, 因此由 k' 是 $\tilde{f}$ 的核知存在态射 $q: \mathrm{Ker}\tilde{f}g'\to\mathrm{Ker}f/(\mathrm{Ker}f\cap X')$ 使得 $k'q=g'i$. 注意到 $\mathrm{Ker}f\cap X'\subseteq X'$ 在 $\mathcal{S}$ 中, 所以 $\pi(p_3)$ 在 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 中可逆, 于是 $\pi(k')=\pi(p)\pi(k)\pi(p_3)^{-1}$. 现在对等式 $k'q=g'i$ 两边作用商函子 π 得到 $\pi(g')\pi(i)=\pi(k')\pi(q)=\pi(p)\pi(k)\pi(p_3)^{-1}\pi(q)$, 所以

$$\pi(p)\pi(k)\pi(p_3)^{-1}\pi(q)=\pi(p)g\pi(l)\pi(i),$$

消去同构 $\pi(p)$ 得到 $\pi(k)\pi(p_3)^{-1}\pi(q)=g\pi(l)\pi(i)$, 之前已经说明 $Z'/\mathrm{Ker}(\tilde{f}g')$ 在 $\mathcal{S}$ 中, 所以 $\pi(i)$ 是同构, 进而 $g=\pi(k)\pi(p_3)^{-1}\pi(q)\pi(i)^{-1}\pi(l)^{-1}$. 取 $h=\pi(p_3)^{-1}\pi(q)\pi(i)^{-1}\pi(l)^{-1}\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(Z,\mathrm{Ker}f)$, 则 $g=\pi(k)h$. □

Theorem 2.8 ([Gab62])**.** 商范畴 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 是 Abel 范畴并且商函子 $\pi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 是正合函子.

Proof. 根据 [引理2.7], 马上看到 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 是 Abel 范畴. π 保持核说明 π 左正合, π 保持余核说明 π 右正合. □

Remark 2.9. 之前指出任意两个 Abel 范畴间的正合函子的核是 Serre 子范畴, 该定理也表明 Serre 子范畴是某个 Abel 范畴间正合函子的核. 因此, Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的一个非空全子范畴 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Serre 子范畴当且仅当 $\mathcal{S}$ 是某个从 $\mathcal{A}$ 出发的正合函子的核.

Corollary 2.10 ([Gab62])**.** 设 $f:X\to Y$ 是 $\mathcal{A}$ 中态射. 则 $\pi(f)$ 是 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 中同构当且仅当 $\mathrm{Ker}f,\mathrm{Coker}f\in\mathrm{ob}\mathcal{S}$.

Theorem 2.11 (商范畴泛性质)**.** 对任何 Abel 范畴 $\mathcal{B}$ 以及正合函子 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, 只要 $FX=0,\forall X\in\mathrm{ob}\mathcal{S}$(这等价于要求正合函子 F 将 $\mathcal{A}$ 中所有核和余核在 $\mathcal{S}$ 中的态射映为同构), 那么存在一个唯一的函子 $\tilde{F}:\mathcal{A}/\mathcal{S}\to\mathcal{B}$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathcal{A}/\mathcal{S} \arrow[dl, dashed, "\tilde{F}"] \\
& \mathcal{B} &
\end{tikzcd}$$

并且这里 $\tilde{F}:\mathcal{A}/\mathcal{S}\to\mathcal{B}$ 是正合函子.

Proof. 对商范畴 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 中任何态射 $f:X\to Y$, 依 [命题2.1] 有分解 $f=\pi(p)^{-1}\pi(g)\pi(l)^{-1}$：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, "\pi(p)"] \\
X' \arrow[u, "\pi(l)"] \arrow[r, "\pi(g)"'] & Y/Y'
\end{tikzcd}$$

定义 $\tilde{F}X=X,\forall X\in\mathrm{oAb}\mathcal{A}/\mathcal{S},\tilde{F}(f)=F(p)^{-1}F(g)F(l)^{-1}$(从这里也可以看到 $\tilde{F}$ 的唯一性), 利用 $I=\{(X',Y')|X'\subseteq X,Y'\subseteq Y\text{使得}X/X',Y'\in\mathrm{ob}\mathcal{S}\}$ 是正向集以及 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 中态射合成的定义可直接验证 $\tilde{F}$ 是定义合理的函子 (用心去感受). $\tilde{F}$ 的正合性可以从下面的引理直接看到. □

Remark 2.12. 事实上商范畴也可用 $\mathcal{A}$ 中所有核与余核均在 $\mathcal{S}$ 中的态射构成的乘法系 $\mathscr{S}$ 取局部化构造 [Sta23, Tag 02MN]. 通过该定理知 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 就是在上述泛性质意义下将 $\mathscr{S}$ 中态射变成同构的“最小”Abel 范畴.

Lemma. 对商范畴 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 中任何正合列 $0\longrightarrow U\xrightarrow{f}V\xrightarrow{g}W\longrightarrow 0$, 存在 $\mathcal{A}$ 中正合列

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{\sigma}B\xrightarrow{\tau}C\longrightarrow 0$$

以及 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 中同构 $\alpha:U\to A,\beta:V\to B,\gamma:W\to C$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\pi(\sigma)"] & B \arrow[r, "\pi(\tau)"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Proof. 根据 [命题2.1], 存在 V 的子对象 V', W 的子对象 W' 使得 $V/V',W'\in\mathrm{ob}\mathcal{S}$ 并且有分解

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "g"] & W \arrow[d, "\pi(p)"] \\
\pi(V') \arrow[u, "\pi(l)"] \arrow[r, "\pi(g')"] & \pi(W/W')
\end{tikzcd}$$

其中 $l : V' \to V$ 是子对象关系的 monic 态, $p : W \to W/W'$ 是标准 epic 态. 因为 g 是商范畴中 epic 态, 所以 [引理2.5] 表明 $\mathrm{Coker}g' \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$. 考虑 g' 的满单分解

$$V' \xrightarrow{p_1} \mathrm{Img}' \xrightarrow{j} W/W'$$

因为 g' 的余核也是 j 的余核, 所以 $\pi(j)$ 是商范畴中 epic 态, 结合 π 是正合函子得到 $\pi(j)$ 是同构, 这时

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "g"] & W \arrow[d, "\pi(j)^{-1}\pi(p)"] \\
\pi(V') \arrow[u, "\pi(l)"] \arrow[r, "\pi(p_1)"] & \pi(\mathrm{Img}')
\end{tikzcd}$$

交换. 作 p_1 的核得到 $\mathcal{A}$ 中正合列 $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}p_1 \xrightarrow{t} V' \xrightarrow{p_1} \mathrm{Img}' \longrightarrow 0$, 因为 π 是正合函子, 所以我们得到下面上下两行都正合的交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "f"] & V \arrow[r, "g"] & W \arrow[r] \arrow[d, "\pi(j)^{-1}\pi(p)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi(\mathrm{Ker}p_1) \arrow[r, "\pi(t)"] & \pi(V') \arrow[u, "\pi(l)"] \arrow[r, "\pi(p_1)"] & \pi(\mathrm{Img}') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

并且竖直方向的态射都是商范畴中的同构. 因为商范畴是 Abel 范畴, 所以存在态射 $\theta : U \to \pi(\mathrm{Ker}p_1)$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\theta"] & V \arrow[r, "g"] & W \arrow[r] \arrow[d, "\pi(j)^{-1}\pi(p)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi(\mathrm{Ker}p_1) \arrow[r, "\pi(t)"] & \pi(V') \arrow[u, "\pi(l)"] \arrow[r, "\pi(p_1)"] & \pi(\mathrm{Img}') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由五引理, 态射 θ 也是商范畴中同构, 故引理得证. □

Corollary 2.13. 设 $\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴, $H : \mathcal{A}/\mathcal{S} \to \mathcal{B}$ 是函子. 则 $H\pi$ 是正合函子的充要条件是 H 是正合函子.

Proposition 2.14. 设 $\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴, $H : \mathcal{A}/\mathcal{S} \to \mathcal{B}$ 是正合函子. 那么 H 是忠实函子的充要条件是 $\mathrm{Ker}H\pi = \{X \in \mathrm{ob}\mathcal{A} | H\pi(X) = 0\} = \mathrm{ob}\mathcal{S}$. 特别地, 如果正合函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 满足 $\mathrm{Ker}F = \mathrm{ob}\mathcal{S}$, 那么 F 所诱导的满足 $\tilde{F}\pi = F$ 的正合函子 $\tilde{F}$ 是忠实函子.

Proof. 必要性：只需验证每个满足 $H\pi(X) = 0$ 的对象 X 在 $\mathcal{S}$ 中. 此时 $H\pi(\mathrm{id}_X) = 0$, 所以 H 的忠实性保证了 $\pi(X) = 0$, 于是 [引理2.3] 保证了 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$. 充分性：如果商范畴中态射 $f : X \to Y$ 满足 $H(f) = 0$, 设 f 有分解 $f = \pi(p^{-1})\pi(f')\pi(l)^{-1}$, 那么 $H\pi(f') = 0$, 所以利用 $H\pi$ 的正合性可知 $\mathrm{Im}f' = 0$, 通过 [引理2.4] 知这等价于 $\pi(f') = 0$, 因此 $f = 0$. 所以 H 是忠实函子. □

Example 2.15 ([Sta23, Tag 0B0J])**.** 设 R 是含幺环, S 是右分母集, 在 [例1.3] 中我们已经看到 **Mod-**R 中 S-挠模构成的全子范畴 $\mathcal{S}$ 是 **Mod-**R 的 Serre 子范畴, 接下来说明商范畴 **Mod-**$R/\mathcal{S}$ 与右局部化 R_S 上模范畴 **Mod-**R_S 是范畴等价的. 因为局部化函子 $(-)_S : \textbf{Mod-}R \to \textbf{Mod-}R_S$ 是正合函子, 并且对任何 S-挠模 M 有 $M_S = 0$, 因此由商范畴的泛性质知存在唯一的正合函子 $F : \textbf{Mod-}R/\mathcal{S} \to \textbf{Mod-}R_S$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\textbf{Mod-}R \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "(-)_S"'] & & \textbf{Mod-}R/\mathcal{S} \arrow[dl, dashed, "F"] \\
& \textbf{Mod-}R_S &
\end{tikzcd}$$

注意到由 R-模 M 是 S-挠模的充要条件是 $M_S=0$, 因此应用 [命题2.14] 立即得到 F 是忠实函子. 因为对任何一个右 R_S-模 X, 将其天然视作右 R-模 M 后总有 $X\cong M_S$, 所以局部化函子是稠密函子, 进而 F 也是稠密函子. 为了说明 F 是范畴等价, 只需再验证 F 是满函子. 任取 **Mod-**R 中模 X,Y, 需要说明映射 $F:\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}\text{-}R/\mathcal{S}}(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{R_S}(X_S,Y_S),\xi\mapsto F(\xi)$ 是满射. 任取右 R_S-模同态 $g:X_S\to Y_S$, 记右 R-模同态 $\theta_1:X\to X_S,\theta_2:Y\to Y_S$ 是局部化标准映射. 取 X' 是 X 的一个极大 S-无挠子模 (考虑集合 $\Sigma=\{X'\subseteq X|X'\text{是}S\text{-无挠的}\}$, 它包含零模所以是关于子模包含关系的非空偏序集, 易验证 Σ 任何全序子集有上界, 再应用 Zorn 引理), 对 Y 考虑商模 $Y/t_S(Y)$, 它是 S-无挠模, 进而局部化标准映射 $\theta_3:Y/t_S(Y)\to(Y/t_S(Y))_S$ 是单射, 易见对标准嵌入 $l_1:X'\to X$, $\theta_1l_1:X'\to X_S$ 也是单射. 现在考虑 X' 的子模 $X'\cap(p_Sg\theta_1l)^{-1}(\theta_3(Y/t_S(Y)))$, 记 $l:X'\cap(p_Sg\theta_1l)^{-1}(\theta_3(Y/t_S(Y)))\to X$ 是标准嵌入. 那么

$$\frac{X}{X'\cap(p_Sg\theta_1l)^{-1}(\theta_3(Y/t_S(Y)))}$$

是 S-挠模并且可以天然定义出使得下图交换的右 R-模同态 g'.

$$\begin{tikzcd}
X'\cap(p_Sg\theta_1l)^{-1}(\theta_3(Y/t_S(Y))) \arrow[rr, dashed, "g'"] \arrow[d, "\theta_1 l"'] & & Y/t_S(Y) \arrow[d, "\theta_3"] \\
X_S \arrow[dr, "g"'] & & (Y/t_S(Y))_S \\
& Y_S \arrow[ur, "p_S"'] &
\end{tikzcd}$$

这里 $p:Y\to Y/t_S(Y)$ 是标准投射. 可直接验证 **Mod-**$R/\mathcal{S}$ 中态射 $\xi=\pi(p)^{-1}\pi(g')\pi(l)^{-1}$ 满足 $F(\xi)=g$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\xi"] & Y \arrow[d, "\pi(p)"] \\
X'\cap(p_Sg\theta_1l)^{-1}(\theta_3(Y/t_S(Y))) \arrow[u, "\pi(l)"] \arrow[r, "\pi(g')"] & Y/t_S(Y)
\end{tikzcd}$$

因此 F 是忠实满的稠密函子, 从而知 F 是范畴等价. 因此 **Mod-**R 关于 S-挠模子范畴 $\mathcal{S}$ 的商范畴在本质上就是 **Mod-**R_S. 若取 $R=\mathbb{Z}$, 那么我们得到 Abel 群范畴 **Ab** 关于挠 Abel 群范畴 **Tor** 的商范畴 **Ab/Tor** 范畴等价于 **Mod-**$\mathbb{Q}$, 即有理数域上线性空间范畴.

在本节结尾不加证明地介绍商范畴可以作为联系代数几何中“几何范畴”与“代数范畴”联系的基本语言. 设 S 是含幺交换正分次环, 满足 S_0 是 Noether 环且 S 作为 S_0 上代数可由有限个 S_1 中元素生成 (那么这时 S 明显是 Noether 的), 例如取 S 是域上有限个未定元的多项式代数并赋予自然分次就是满足条件的例子. 引入记号 $S_+=S_1\oplus S_2\oplus\cdots$. 称一个 (整数) 分次 S-模 M 是 S_+**-幂挠模** (S_+-power torsion module), 如果满足对每个 $x\in M$, 存在 $n\geq1$ 使得 $(S_+)^nx=0$. 容易验证对有限生成分次 S-模 M, M 是 S_+-幂挠模的充要条件是对充分大的正整数 n 有 $M_n=0$. 把所有 S_+-幂挠模构成的全子范畴记作 $\mathbf{Tor}(S)$, 有限生成 S_+-幂挠模构成的全子范畴记作 $\mathbf{tor}(S)$. 容易验证 $\mathbf{Tor}(S)$ 是 $\mathbf{Gr}(S)$ 的 Serre 子范畴, $\mathbf{tor}(S)$ 是 $\mathbf{gr}(S)$ 的 Serre 子范畴. 那么有下述结果, 它联系了射影概形 Proj$X$ 上凝聚层范畴与与 S 上有限生成模范畴的商范畴.

Theorem 2.16 (Serre, 见 [Sta23, Tag 01YR])**.** 设 S 是正分次交换环, 满足 S_0 是 Noether 环且 S 作为 S_0 上代数可由有限个 S_1 中元素生成. 考虑射影概型 $X=\mathrm{Proj}S$, 那么 S 上有限生成分次模 M 的层化 $M\mapsto\widetilde{M}$

诱导出的函子 $F:\mathbf{gr}S\mapsto \mathbf{Coh}X$(之前提到当 S 是 Noether 环时, 有限生成分次模 M 的层化 $\widetilde{M}$ 是射影概形 $\mathrm{Proj}S$ 上的凝聚层) 满足将每个 S_+-幂挠模映至零, 所以存在唯一的正合函子 $\widetilde{F}:\mathbf{gr}S\to\mathbf{Coh}X$ 使下图交换：

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{gr}S \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathbf{gr}S/\mathbf{tor}S \arrow[dl, dashed, "\widetilde{F}"] \\
& \mathbf{Coh}X &
\end{tikzcd}$$

并且这里 $\widetilde{F}$ 给出 X 上凝聚层和 S 上有限生成分次模范畴关于有限生成 S_+-幂挠模的商范畴之间的范畴等价.

Remark 2.17. 该定理表明由 1 次部分有限生成的正分次交换 Noether 环 (回忆交换正分次环是 Noether 环的充要条件是它 0 次部分 Noether 且是 0 次部分上的有限生成代数) 的射影概形上凝聚层范畴与该分次环上有限生成分次模范畴关于挠模子范畴的商范畴是范畴等价的. M. Artin 与 Zhang 受此定理启发, 在 [AZ94] 中定义了**非交换射影概形**, 并将上述 Serre 定理推广至非交换情形, 极大地推动了非交换射影代数几何的发展.

3 商函子的右伴随

对含幺环 R 的右分母集 S, 我们有局部化函子 $(-)_S:\mathbf{Mod}\text{-}R\to\mathbf{Mod}\text{-}R_S$. 同时, 任何右 R_S-模可天然视作右 R-模, 这给出函子 $F:\mathbf{Mod}\text{-}R_S\to\mathbf{Mod}\text{-}R$, 对固定的右 R-模 X 以及右 R_S-模 Y, 记 $\theta_X:X\to X_S$ 是局部化标准映射. 作

$$\begin{aligned}\eta_{X,Y}:\mathrm{Hom}_{R_S}(X_S,Y)&\to\mathrm{Hom}_R(X,FY)\\ \varphi&\mapsto\varphi\theta_X\end{aligned}$$

根据局部化的泛性质, 易知 $\eta_{X,Y}$ 是加群同构. 现定义

$$\eta:\mathrm{ob}\mathbf{Mod}\text{-}R\times\mathrm{ob}\mathbf{Mod}\text{-}R_S\to\bigcup_{(X,Y)}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{R_S}(X_S,Y),\mathrm{Hom}_R(X,FY)),(X,Y)\mapsto\eta_{X,Y},$$

其中 $(X,Y)\in\mathrm{ob}\mathbf{Mod}\text{-}R\times\mathrm{ob}\mathbf{Mod}\text{-}R_S$. 可直接验证 η 关于变量 X,Y 都是自然的. 因此

Basic Observation. 设 R 是含幺环, S 有右分母集, 那么局部化函子 $(-)_S:\mathbf{Mod}\text{-}R\to\mathbf{Mod}\text{-}R_S$ 与上述将 R_S-模可天然视作右 R-模所定义的函子 $F:\mathbf{Mod}\text{-}R_S\to\mathbf{Mod}\text{-}R$ 是一对伴随函子, F 是 $(-)_S$ 的右伴随.

在 [例2.15] 中我们看到 $\mathbf{Mod}\text{-}R$ 关于 S-挠模全子范畴的商范畴与 $\mathbf{Mod}\text{-}R_S$ 是范畴等价的, 所以利用前面的 $F:\mathbf{Mod}\text{-}R_S\to\mathbf{Mod}\text{-}R$ 是局部化函子的右伴随函子我们马上得到：

Proposition 3.1. 设 R 是含幺环, S 有右分母集, $\mathcal{S}$ 是 $\mathbf{Mod}\text{-}R$ 中 S-挠模构成的全子范畴, 那么商函子 $\pi:\mathbf{Mod}\text{-}R\to\mathbf{Mod}\text{-}R/\mathcal{S}$ 存在右伴随. 具体地, 若设 $H:\mathbf{Mod}\text{-}R/\mathcal{S}\to\mathbf{Mod}\text{-}R_S$ 是局部化函子通过商范畴泛性质所诱导的范畴等价, 那么 $\omega=FH:\mathbf{Mod}\text{-}R/\mathcal{S}\to\mathbf{Mod}\text{-}R$ 是 π 的右伴随.

Definition 3.2. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $\mathcal{S}$ 是 Serre 子范畴, 如果商函子 $\pi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 存在右伴随 $\omega:\mathcal{A}/\mathcal{S}\to\mathcal{A}$, 则称 ω 是**截面函子** (section functor), 这时称 $\mathcal{S}$ 是**局部化子范畴** (localizing subcategory).

下面的命题解释了为什么当商函子的右伴随函子存在时, 右伴随函子被称为截面函子.

Proposition 3.3. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $\mathcal{S}$ 是 Serre 子范畴, 商函子 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ 存在右伴随 $\omega : \mathcal{A}/\mathcal{S} \to \mathcal{A}$, 则
(1) 对任何对象 $F \in \mathrm{ob}\mathcal{A}/\mathcal{S}$, ωF 是 (关于 $\mathcal{S}$) 无挠的;
(2) 设 $\mathcal{A}$ 中态射 $f : X \to Y$ 满足 $\pi(f)$ 是商范畴中同构, 那么对任何对象 $F \in \mathrm{ob}\mathcal{A}/\mathcal{S}$, 加群同态 $f^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, \omega F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \omega F)$ 是同构;
(3) 对任何对象 $F \in \mathrm{ob}\mathcal{A}/\mathcal{S}$, 商函子诱导的加群同态 $\pi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \omega F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(\pi X, \pi\omega F)$ 是同构;
(4) 设 $\zeta : \pi\omega \to 1_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}$ 是通过伴随函子间的联络诱导的自然变换, 那么 ζ 给出自然同构 $\pi\omega \cong 1_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}$.

Proof. (1) 伴随函子间的联络给出加群同构 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(\pi X, F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \omega F), \forall X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$. 现取 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$, 那么 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \omega F) = 0, \forall X \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$, 这说明 F 关于 $\mathcal{S}$ 是无挠的.

(2) 通过伴随函子间的联络给出下述交换图, 故由条件马上得到结论.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(\pi X, F) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \omega F) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(\pi Y, F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, "(\pi f)^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, \omega F) \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

(3) 通过 (1) 知道 ωF 是无挠的, 所以利用 (2) 知对 X 任何满足 $X/X' \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$ 的子对象 X', $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \omega F)$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X', \omega F)$ 的标准态射是同构. 下面验证加群同态 $\pi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \omega F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(\pi X, \pi\omega F)$ 是同构. 任取 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(\pi X, \pi\omega F)$, 那么存在 $X' \subseteq X$ 使得 $X/X' \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$ 以及 $\mathcal{A}$ 中态射 $g' : X' \to \omega F$ 对应正向极限中的元素是 g. 记 $l : X' \to X$ 是标准 monic 态, 由 $l^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \omega F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X', \omega F)$ 是同构知 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \omega F)$ 中有元素对应在正向极限中的像是 g, 这说明 π 是满射. 下面说明 π 是单射: 如果 $\mathcal{A}$ 中态射 $f : X \to \omega F$ 满足 $\pi(f) = 0$, 那么存在 $X' \subseteq X$ 使得 $X/X' \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$ 并且若记 $l : X' \to X$ 是标准 monic 态, 那么 $l^*(f) = 0$. 但 l^* 是加群同构, 这迫使 $f = 0$. 故 $\pi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \omega F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(\pi X, \pi\omega F)$ 是同构.

(4) 设 π 与 ω 作为一对伴随函子有联络

$$\eta : \mathrm{ob}\mathcal{A} \times \mathrm{ob}\mathcal{A}/\mathcal{S} \to \bigcup_{(X,Y) \in \mathrm{ob}\mathcal{A} \times \mathrm{ob}\mathcal{A}/\mathcal{S}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(\pi X, Y), \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \omega Y)), (X, Y) \mapsto \eta_{X,Y},$$

那么它导出函子 $\pi\omega$ 到恒等函子 $1_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}$ 的自然变换:

$$\zeta : \mathrm{ob}\mathcal{A}/\mathcal{S} \to \bigcup_{Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}/\mathcal{S}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(\pi\omega Y, Y), Y \mapsto \zeta_Y = \eta^{-1}_{\omega Y, Y}(1_{\omega Y}).$$

我们需要验证对每个商范畴中对象 Y, $\eta^{-1}_{\omega Y, Y}(1_{\omega Y})$ 是同构. 通过 Yoneda 引理不难看到, 只需验证 $\eta^{-1}_{\omega Y, Y}(1_{\omega Y})$ 所诱导的自然变换 $(\eta^{-1}_{\omega Y, Y}(1_{\omega Y}))_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(-, \pi\omega Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(-, Y)$ 是自然同构. 因为 π 和 ω 是一对伴随函子, 所以对每个 $\mathcal{A}$ 中对象 X 总有下面的交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(\pi X, Y) \arrow[d, "1"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \omega Y) \arrow[l, "\eta^{-1}_{X,Y}"'] \arrow[d, "\pi"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(\pi X, Y) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\pi X, \pi\omega Y) \arrow[l, "(\eta^{-1}_{\omega Y, Y}(1_{\omega Y}))_*"]
\end{tikzcd}$$

在 (3) 中证明了上图右边竖直方向的同态是同构, 因此自然变换 $(\eta^{-1}_{\omega Y, Y}(1_{\omega Y}))_*$ 作用每个形如 πX 的对象都是同构. 而商函子是稠密函子, 因此 $(\eta^{-1}_{\omega Y, Y}(1_{\omega Y}))_*$ 是自然同构. □

Example 3.4. 设含幺环 R 有右分母集 S, 那么任何右 R_S-模都是 S-无挠的.

如果 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中对象 X 的一个子对象 τX 满足 τX(关于 Serre 子范畴 $\mathcal{S}$) 是挠对象, 并且任何 X 的挠子对象都是 τX 的子对象, 那么称 τX 是 X **最大的挠子对象**. 一个基本的观察是

Basic Observation. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $\mathcal{S}$ 是 Serre 子范畴, 如果对每个 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 有 τX 存在, 那么 $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ 是挠对, 其中 $\mathcal{F}$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中所有关于 Serre 子范畴 $\mathcal{S}$ 无挠的对象构成的全子范畴.

Proof. 结合 Serre 子范畴定义下的注记, 只需再验证如果 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 满足对任何 $F \in \mathrm{ob}\mathcal{F}$ 有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, F) = 0$, 那么 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$. 因为 τX 存在, 所以 $X/\tau X$ 是无挠对象, 考虑标准 epic 态 $p : X \to X/\tau X$, 则由

$$0 \longrightarrow \tau X \xrightarrow{\ l\ } X \xrightarrow{\ p\ } X/\tau X \longrightarrow 0$$

的正合性以及 $p = 0$ 知 $l : \tau X \to X$ 是同构. 因此 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$. □

下面我们说明当商函子的右伴随存在时, 可以保证 Abel 范畴任何对象存在最大挠子对象.

Corollary 3.5. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $\mathcal{S}$ 是 Serre 子范畴, 商函子 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ 存在右伴随 $\omega : \mathcal{A}/\mathcal{S} \to \mathcal{A}$. 那么商函子和其右伴随间的联络

$$\eta : \mathrm{ob}\mathcal{A} \times \mathrm{ob}\mathcal{A}/\mathcal{S} \to \bigcup_{(X,Y)\in \mathrm{ob}\mathcal{A}\times\mathrm{ob}\mathcal{A}/\mathcal{S}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(\pi X, Y), \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \omega Y)), (X, Y) \mapsto \eta_{X,Y},$$

天然诱导出 $1_{\mathcal{A}}$ 到 $\omega\pi$ 的自然变换

$$\xi : \mathrm{ob}\mathcal{A} \to \bigcup_{X\in\mathrm{ob}\mathcal{A}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \omega\pi X), X \mapsto \xi_X = \eta_{X,\pi X}(1_{\pi X}),$$

现固定对象 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 记 $f = \eta_{X,\pi X}(1_{\pi X}) : X \to \omega\pi X$, 则 $\mathrm{Ker}f, \mathrm{Coker}f \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$ 且 $\mathrm{Ker}f$ 是 X 最大挠子对象.

Proof. 考虑 $f : X \to \omega\pi X$ 的标准正合列 $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}f \xrightarrow{\ k\ } X \xrightarrow{\ f\ } \omega\pi X \xrightarrow{\ c\ } \mathrm{Coker}f \longrightarrow 0$. 作用商函子得到商范畴中正合列 $0 \longrightarrow \pi(\mathrm{Ker}f) \xrightarrow{\pi(k)} \pi X \xrightarrow{\pi(f)} \pi\omega\pi X \xrightarrow{\pi(c)} \pi(\mathrm{Coker}f) \longrightarrow 0$. 如果能说明 $\pi(f)$ 是同构, 那么由 [引理2.3], [引理2.7] 以及 [推论2.10] 便知 $\mathrm{Ker}f, \mathrm{Coker}f \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$. 在 [命题3.3(4)] 证明过程中我们已经看到对 $\mathcal{A}$ 中给定的对象 X 总有交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(\pi X, Y) \arrow[d, "1"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \omega Y) \arrow[l, "\eta^{-1}_{X,Y}"'] \arrow[d, "\pi"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(\pi X, Y) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\pi X, \pi\omega Y) \arrow[l, "(\eta^{-1}_{\omega Y,Y}(1_{\omega Y}))_*"]
\end{tikzcd}$$

对上图取 $Y = \pi X$, 那么由 f 的定义知 $1_{\pi X} = \eta^{-1}_{X,\pi X}(f) = (\eta^{-1}_{\omega\pi X,\pi X}(1_{\omega\pi X}))_*(\pi(f)) = \eta^{-1}_{\omega\pi X,\pi X}(1_{\omega\pi X})\pi(f)$. 由 [命题3.3(4)] 知 $\eta^{-1}_{\omega\pi X,\pi X}(1_{\omega\pi X})$ 是同构, 所以 $\pi(f)$ 也是同构. 于是知 $\mathrm{Ker}f, \mathrm{Coker}f \in \mathrm{ob}\mathcal{S}$. 最后验证 $\mathrm{Ker}f$ 是 X 的最大挠子对象. 任取 X 的挠子对象 T, 并设 $l : T \to X$ 是子对象关系的标准 monic 态, 那么由 $\omega\pi X$ 是无挠对象 (见 [命题3.3(1)]) 得到 $fl = 0$. 所以存在 monic 态 $j : T \to \mathrm{Ker}f$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "f"] & \omega\pi X \\
& & T \arrow[u, "l"'] \arrow[ul, dashed, "j"] &
\end{tikzcd}$$

因此 T 是 $\mathrm{Ker}f$ 的挠子对象, 即 $\mathrm{Ker}f$ 是 X 的最大挠子对象. $\square$

Corollary 3.6. 记 $\mathcal{F}$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中所有关于 Serre 子范畴 $\mathcal{S}$ 无挠的对象构成的全子范畴. 如果商函子 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ 存在右伴随 $\omega : \mathcal{A}/\mathcal{S} \to \mathcal{A}$, 那么 $\mathcal{A}$ 中每个对象的最大挠子对象存在并且 $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ 构成挠对.

Remark 3.7. 一个自然的反问题是商函子何时存在右伴随? 可以证明当 $\mathcal{A}$ 有足够多内射对象 $\mathcal{A}$ 中任何对象都存在最大挠子对象时, 商函子的右伴随存在 (见 [Smi97, p.432, Theorem 13.14]).

局部化理论一个经典结论是如果含幺环 R 有右分母集 S, 那么任何内射右 R_S-模作为右 R-模也是内射的 (更一般地, 对含幺环扩张 $\alpha : R \to T$, 如果 $_RT$ 平坦, 则任何内射右 T-模作为右 R-模也内射). 现在我们把这个结论用完全相同的方法推广到商范畴上.

Proposition 3.8. 设商函子 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ 存在右伴随 $\omega : \mathcal{A}/\mathcal{S} \to \mathcal{A}$, 那么 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 中每个内射对象 Q 满足 ωQ 是 $\mathcal{A}$ 中内射对象.

Proof. 伴随函子间的联络给出自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \omega Q) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(\pi -, Q) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(-, Q)\pi,$$

而 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(-, Q)\pi$ 作为正合函子的合成仍正合, 因此 ωQ 是 $\mathcal{A}$ 中内射对象. $\square$

参考文献

[AZ94] Michael Artin and James J Zhang. Noncommutative projective schemes. *Advances in mathematics*, 109(2):228–287, 1994.

[Gab62] P. Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 90:323–448, 1962.

[Gro57] Alexandre Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 9(2):119–183, 1957.

[Pop73] N. Popescu. Abelian categories with applications to rings and modules. 1973.

[Smi97] S. Paul Smith. *Non-commutative Algebraic Geometry.* unpublished book, 1997.

[Sta23] The Stacks project authors. The stacks project. `https://stacks.math.columbia.edu`, 2023.