模的投射盖

戚天成

复旦大学 数学科学学院

2023 年 10 月 16 日

这份笔记主要用于记录一些关于投射盖的基本事实.

目录

1 基本准备

1.1 幂等元

Example 1.1. 设 k 是域, V 是 n 维线性空间, W, L 是 V 的子空间, 满足 $V = W \oplus L$, 则 V 在 W 上的投影 $p : V \to V$ 是线性变换环 $\mathrm{End}_k(V)$ 中的幂等元.

任何含幺环总有幂等元 $0, 1$, 称为平凡幂等元. 异于零元与幺元的幂等元称为**非平凡幂等元**. 如果含幺环 R 上的左模 $M \neq 0$ 满足不存在非零子模 M_1, M_2 使得 $M = M_1 \oplus M_2$, 则称 M 是**不可分模** (否则称为**可分模**). 易见幂等元可给出不可分模的刻画：

Lemma 1.2. 设 R 是含幺环, $M \neq 0$ 是左 R-模, 则 M 是不可分模 $\Leftrightarrow \mathrm{End}_R(M)$ 没有非平凡幂等元.

Proof. 必要性：设 $e \in \mathrm{End}_R(M)$ 是幂等元, 则 $M = eM \oplus (1-e)M$, 故 $eM = 0$ 或 $(1-e)M = 0$, 由此得到 $e = 0$ 或 1. 充分性：假设 M 可分, 有非零子模直和分解 $M = M_1 \oplus M_2$, 考察 M 在 M_1 上的标准投射可得 $\mathrm{End}_R(M)$ 的非平凡幂等元. $\square$

下面的结果是之后所需的重要工具.

Proposition 1.3. 设 R 是含幺环, I 是含于 $\mathrm{Jac}R$ 的理想 (记 $\overline{R} = R/I$), P, Q 是有限生成投射左 R-模, 那么 $P \cong Q$ 作为 R-模同构当且仅当 $P/IP \cong Q/IQ$ 作为 $\overline{R}$-模同构.

Proof. 只要验证充分性：设 $\overline{f} : P/IP \to Q/IQ$ 是左 $\overline{R}$-模同构, 记 $\pi_1 : P \to P/IP, \pi_2 : Q \to Q/IQ$ 是标准投射, 利用 P 是投射模知存在模同态 $f : P \to Q$ 使下图交换：

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, dashed, "f"'] & P/IP \arrow[d, "\overline{f}"] \\ Q \arrow[r, "\pi_2"] & Q/IQ \end{tikzcd}$$

考察 $\pi_2 f$ 的像可得 $\mathrm{Im}f + IQ = Q$, 于是由 Q 是有限生成模, 用 Nakayama 引理得到 $Q = \mathrm{Im}f$.

Claim. f 是 R-模同构.

对满同态 $P \xrightarrow{f} Q \longrightarrow 0$, 由 Q 是投射模得到 P 有直和分解 $P = P' \oplus Q'$, 其中 $P' = \mathrm{Ker}f$ 且有模同构 $f|_{Q'} : Q' \to Q$. 我们有标准同构 $P/IP \cong P'/IP' \oplus Q'/IQ'$, 利用同构 $\overline{f}$ 可以验证 $P'/IP' = 0$(考察此时 Q'/IQ' 到 Q/IQ 的模同态). 注意到 P' 也是有限生成模, 所以再次应用 Nakayama 引理可知 $P' = 0$, 这说明 f 是同构. $\square$

Corollary 1.4. 设 R 是含幺环, e, e' 是幂等元, 如果 $e - e' \in \mathrm{Jac}R$, 那么 $Re \cong Re'$.

Proof. 对幂等元 e, 总有 $\overline{R} = R/\mathrm{Jac}R$-模同构 $\overline{R}\overline{e} \cong Re/\mathrm{Jac}(R)e$, 所以 $Re/\mathrm{Jac}(R)e \cong Re'/\mathrm{Jac}(R)e'$, 注意到 Re, Re' 是有限生成投射模, 故 $Re \cong Re'$. $\square$

称含幺环 R 全体素理想之交为 R 的**素根**, 记为 $N(R)$. 素根是零的含幺环称为**半素环** (回忆 $N(R)$ 就是 R 的**强幂零元**全体, 所以 $N(R)$ 作为 R 的诣零理想总包含于 $\mathrm{Jac}R$ 中). 我们把零理想是素理想的含幺环称为**素环**. 易见半本原环是半素的. 下面是个基本观察.

Lemma 1.5. 设 R 是含幺环, 则 $\mathrm{Jac}R$ 中的幂等元只有 0.

Proof. 设 $e \in \mathrm{Jac}R$ 是幂等元, 则 $1 - e$ 可逆与 $e(1-e) = 0$ 即得 $e = 0$. $\square$

Proposition 1.6. 设 R 是含幺环 (可以是零环), $e \in R$ 是幂等元, 则 $\mathrm{Jac}(eRe) = \mathrm{Jac}R \cap eRe = e\mathrm{Jac}(R)e$. 并且有环同构 $eRe/\mathrm{Jac}(eRe) \cong \overline{e}(R/\mathrm{Jac}R)\overline{e}$, 其中 $\overline{e} \in R/\mathrm{Jac}R$.

Proof. 当 $e = 0$ 或 $R = 0$ 时结论明显成立, 故只要处理 $R \neq 0$ 且 $e \neq 0$ 的情形. 我们通过证明下面的集合包含关系来得到第一个论断：

$$\mathrm{Jac}(eRe) \subseteq \mathrm{Jac}R \cap eRe \subseteq e\mathrm{Jac}(R)e \subseteq \mathrm{Jac}(eRe).$$

第一个包含关系：任取 $r \in \mathrm{Jac}(eRe)$, 要证 $r \in \mathrm{Jac}R$. 只需验证对任何 $a \in R, 1 - ar$ 有左逆. 对 $e - eaer \in eRe$, 它在 eRe 中有左逆 b, 所以 $b(e - eaer) = e \Rightarrow b(1 - ar) = e \Rightarrow arb(1 - ar) = ar \Rightarrow (1 + arb)(1 - ar) = 1$. 这

说明 $1-ar$ 有左逆.
第二个包含关系: 任取 $r\in \mathrm{Jac}R\cap eRe$, 则 $r=ere\in e\mathrm{Jac}(R)e$.
第三个包含关系: 任取 $r\in e\mathrm{Jac}(R)e\subseteq \mathrm{Jac}R$, 对任何 $a\in eRe$ 存在 $b\in R$ 使得 $b(1-ar)=1$, 那么 $ebe(e-ar)=e$, 故 $r\in \mathrm{Jac}(eRe)$.

下面证明第二个论断. 我们有天然满环同态 $\psi: eRe\to \overline{e}(R/\mathrm{Jac}R)\overline{e}, ere\mapsto \overline{ere}$, 它的核 $\mathrm{Ker}\psi\supseteq e\mathrm{Jac}(R)e$, 所以 ψ 可以导出满环同态 $\Phi: eRe/\mathrm{Jac}(eRe)\to \overline{e}(R/\mathrm{Jac}R)\overline{e}, ere+\mathrm{Jac}(eRe)\mapsto \overline{ere}$. 如果 $ere\in eRe$ 使得 $ere\in \mathrm{Jac}R$, 那么 $ere\in e\mathrm{Jac}(R)e=\mathrm{Jac}(eRe)$, 这说明 Φ 是单的. □

回忆含幺环 R 是局部环指 R 的不可逆元全体构成理想. 所以 R 有唯一的极大左理想、唯一的极大理想、唯一的极大右理想 (验证它!), 并且 $\mathrm{Jac}R$ 就是 R 唯一的极大理想. 由此知局部环 R 关于 $\mathrm{Jac}R$ 的商环是域. 我们用局部环给出强不可分模的定义:

Definition 1.7 (强不可分模)**.** 如果含幺环 R 上的模 $M\neq 0$ 满足 $\mathrm{End}_R(M)$ 是局部环, 那么称 M 是**强不可分模**. 局部环没有非平凡幂等元 (验证它), 所以强不可分模是不可分模.

对有合成列的模 (例如域上的有限维线性空间 $V\neq 0$), 有下述结果:

Krull-Schmidt Theorem. 设 ${}_RM\neq 0$ 有合成列, 则:
- M 可表示为有限个不可分模的直和.
- M 的不可分分解在不计次序与同构意义下唯一, 即若 $M=M_1\oplus\cdots\oplus M_n=N_1\oplus\cdots\oplus N_m$ 是不可分分解, 则 $n=m$ 且存在置换 $\sigma\in S_n$ 使得 $M_i\cong N_{\sigma(i)},\forall 1\leq i\leq n$.

Remark 1.8. 对一般的 Abel 范畴也可以证明相应的 Krull-Schmidt 定理, 但这里仅关心模范畴.

因为有合成列的不可分模一定是强不可分的, 所以 Krull-Schmidt 定理结论中的不可分模直和分解事实上是强不可分模直和分解.

下面的引理表明对含幺环 R, $e\in R$ 是幂等元, 那么有天然的环同构 $\mathrm{End}_R(eR)\cong eRe$.

Lemma 1.9. 设 R 是含幺环, $e\in R$ 是幂等元, M 是左 R-模, 那么有天然的加群同构 $\mathrm{Hom}_R(Re,M)\cong eM$. 特别地, 取 $M=Re$, 我们得到加群同构 $\mathrm{End}_R(Re)\cong eRe$. 完全类似地有右模情形的结论成立.

Proof. 命 $\lambda:\mathrm{Hom}_R(Re,M)\to eM, f\mapsto f(e)$. 由 $f(e)=ef(e)$ 可知映射 λ 定义合理, 它是加群同构 (验证它). 右模情形可以给出类似构造. □

上述引理给出加群同构 $\lambda:\mathrm{End}_R(eR)\to eRe, f\mapsto f(e)$, 可直接验证 λ 保持乘法, 所以得到 $\mathrm{End}_R(eR)\cong eRe$. 左模的情形, 可验证 $[\mathrm{End}_R(Re)]^{op}\cong eRe$. 现在我们可以给出局部幂等元的概念.

Proposition 1.10 (局部幂等元)**.** 设 R 是含幺环, $e\neq 0\in R$ 是幂等元, 则以下三条等价:
(1)Re 是强不可分左模. (2)eR 是强不可分右模. (3)eRe 是局部环.
当幂等元 $e\neq 0$ 满足上述三个条件中任意一条时, 称 e 是**局部幂等元**.

Proof. 由环同构 $\mathrm{End}_R(eR)\cong eRe\cong[\mathrm{End}_R(Re)]^{op}$ 再结合强不可分模的定义知结论成立. □

Proposition 1.11 (本原幂等元)**.** 设 R 是含幺环, $e\neq 0\in R$ 是幂等元, 则以下四条等价:
(1)Re 是不可分左模. (2)eR 是不可分右模. (3)eRe 没有非平凡幂等元. (4)e 无法表示为 R 中两个非零正交幂等元之和. 当幂等元 $e\neq 0$ 满足上述三个条件中任意一条时, 称 e 是**本原幂等元**.

Proof. 由环同构 $\mathrm{End}_R(eR) \cong eRe \cong [\mathrm{End}_R(Re)]^{op}$ 知 (1)-(3) 等价. 这里只需验证 (3) 与 (4) 等价. 如果 eRe 没有非平凡幂等元, 假设存在非零正交幂等元 $a, b \in R$ 使得 $e = a + b$, 那么 $ea = ae = a$ 表明 $a \in eRe$ 是 eRe 中的非平凡幂等元, 矛盾. 如果 e 无法在 R 中分解为两个非零正交幂等元之和, 假设 eRe 有非平凡幂等元 a, 则 $e - a$ 是 eRe 中非零幂等元, 进而 $e = a + (e - a)$ 给出了 R 中非零正交幂等元的分解, 矛盾. □

根据本原幂等元的定义我们看到局部幂等元一定是本原幂等元. 根据 Wedderburn-Artin 定理含幺环 R 是 Artin 半本原环 $\Leftrightarrow$ R 是 Artin 半单环 $\Leftrightarrow$ ${}_RR$ 是完全可约模.

Lemma 1.12. 设含幺环 R 是 Artin 半单环, $e \neq 0 \in R$ 是幂等元, 则 e 是局部幂等元等价于 e 是本原幂等元.

Proof. 只要证充分性：这时 Re 是不可分模, 但它又是完全可约模, 所以 Re 是不可约模, 由 Schur 引理得到 Re 的自同态环是除环, 进而 Re 是强不可分模. 这就证明了 e 是局部幂等元. □

含幺环 R 的非零左理想 I 如果满足不存在非零左理想 J 使得 $J \subsetneq I$, 则称 I 是**极小左理想**. 这等价于说 I 作为左 R-模是不可约模. Brauer 的下述引理说 $I^2 \neq 0$ 的极小左理想 I 形如 Re, e 是某个幂等元 (注意极小左理想 I 是有可能满足 $I^2 = 0$ 的, 例如 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 的理想 $\{\overline{0}, \overline{2}\}$).

Lemma 1.13 (Brauer)**.** 设 R 是含幺环, 则 R 的任何极小左理想 I 满足 $I^2 = 0$ 或存在幂等元 e 使 $I = Re$.

Proof. 设 $I^2 \neq 0$, 那么存在 $a \neq 0 \in I$ 使得 $Ia \neq 0$. 那么 $Ia = I$ 表明存在 $e \in I$ 使得 $ea = a$, 易见 $I = Re$, 下证 e 幂等. 命 $X = \{x \in I | xa = 0\}$, 则 $e \notin X$ 表明左理想 X 是 I 的真子集, 因此 $X = 0$, 注意到 $e^2a = ea = a$ 表明 $e^2 - e \in X$, 所以 $e = e^2$. □

我们也可以用幂等元给出 Artin 半单环的刻画：

Proposition 1.14. 设 R 是含幺环, 则 R 是 Artin 半单环当且仅当任何左理想 I 形如 $I = Re$, e 是幂等元.

Proof. 由分解 $R = Re \oplus R(1 - e)$ 易得充分性 (验证它), 下证必要性：由于 ${}_RR$ 是完全可约模, 所以左理想 I 作为子模是直和因子, 设左理想 J 使得 $R = I \oplus J$, 那么存在 $e \in I, f \in J$ 使得 $1 = e + f$. 那么根据元素表示的唯一性得到 e 是幂等元且 $I = Re$. □

需要指出 Artin 半单环的极小左理想 I 表示为 Re 时 e 是局部幂等元.

Lemma 1.15. 设 R 是 Artin 半单环, $I = Re$ 是极小左理想, e 是幂等元, 那么 e 是局部幂等元.

Definition 1.16 (不可约幂等元)**.** 如果含幺环 R 的幂等元 $e \neq 0$ 满足 eR 是极小右理想, 则称 e 是**右不可约幂等元**. 当 Re 是极小左理想时, 称 e 是**左不可约幂等元**.

于是我们得到在 Artin 半单环中, 局部幂等元 $\Leftrightarrow$ 本原幂等元 $\Leftrightarrow$ 左不可约幂等元 $\Leftrightarrow$ 右不可约幂等元. 如果 R 的幂等元 e, f 满足 $ef = fe = 0$, 我们称这两个幂等元**正交**.

Proposition 1.17. 设 R 是 Artin 半单环, 则存在两两正交的本原幂等元 $e_1, ..., e_n \in R$ 使得

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n.$$

Proof. 由 ${}_RR$ 是完全可约模, 存在 R 的有限多个极小左理想 $I_1,...,I_n$ 使得 $R=\oplus_{k=1}^n I_k$ 且有 $e_k\neq 0\in I_k$ 使得 $1=e_1+e_2+\cdots+e_n$. 于是 $R=\oplus_{k=1}^n Re_k, Re_k=I_k$. 那么 I_k 是极小左理想保证了每个 e_k 是本原幂等元. 根据直和分解元素表示唯一性容易验证它们两两正交. □

Definition 1.18 (幂等元的提升)**.** 设 R 是环, I 是 R 的理想, $\pi: R\to R/I$ 是标准投射, 如果 R/I 的幂等元 x 满足存在 R 中幂等元 e 使得 $\pi(e)=x$, 则称**幂等元** $x\in R/I$ **可提升到** R.

环 R 的理想 N 中每个元素都是幂零元时, 称 N 是**诣零理想**.

Lemma 1.19. 设 R 是含幺环, N 是 R 的诣零理想, 那么 R/N 的任何幂等元可提升到 R 上.

Proof. 任取 R/N 的幂等元 $\overline{u}$, 则 $u-u^2\in N$, 所以存在正整数 n 使得 $(u-u^2)^n=0$. 并记 $v=1-u$, 我们得到 $u^nv^n=0$, 考察

$$1=(u+v)^{2n-1}=\sum_{i=0}^{2n-1}C_{2n-1}^i u^{2n-1-i}v^i=\sum_{i=0}^{n-1}C_{2n-1}^i u^{2n-1-i}v^i+\sum_{i=n}^{2n-1}C_{2n-1}^i u^{2n-1-i}v^i,$$

记 $e=\sum\limits_{i=0}^{n-1}C_{2n-1}^i u^{2n-1-i}v^i, f=\sum\limits_{i=n}^{2n-1}C_{2n-1}^i u^{2n-1-i}v^i$, 则 $e+f=1, ef=fe=0$, 所以 e 是 R 中幂等元. 易见 $\overline{e}=\overline{u}^{2n-1}=\overline{u}$. □

Proposition 1.20. 设 R 是含幺环, $e\in R$ 是幂等元, $I\subseteq \mathrm{Jac}R$ 是理想. 如果 $\overline{e}\in R/I$ 是本原幂等元, 那么 e 也是本原幂等元. 如果 R/I 中任何幂等元可提升到 R, e 是本原幂等元蕴含 $\overline{e}\in R/I$是本原幂等元.

Proof. 先证明第一个论断, 设 $\overline{e}$ 是本原幂等元, 如果 e 不是本原幂等元, 那么存在非零正交幂等元 $a,b\in R$ 使得 $e=a+b$. 由 [引理1.5] 知 $\overline{a},\overline{b}\neq\overline{0}$, 所以 $\overline{e}=\overline{a}+\overline{b}$ 给出了 $\overline{e}$ 的非零正交幂等元分解, 这与 $\overline{e}$ 本原矛盾. 再证明第二论断, 设 R/I 中任何幂等元可提升到 R, $e\in R$ 本原. 假设 $\overline{e}$ 有非零正交幂等元分解 $\overline{e}=x+y$, 那么存在 R 的幂等元 a,b 使得 $\overline{a}=x,\overline{b}=y$, 那么 $ab,ba\in I$(所以 $1-ba$ 可逆).

Claim. 存在幂等元 $c\in R$ 使得 $c-b\in I$, $ca=ac=0$. 一旦证明该断言, $e'=a+c$ 是幂等元但不是本原的, 结合 $e-e'\in I$, 应用 [推论1.4] 我们得到 e 也不是本原幂等元, 矛盾. 下面证明断言.
考虑 $x=(1-ba)^{-1}b(1-ba)$, 它是幂等元且 $x-b\in I, xa=0$. 但 ax 未必是零, 下面修正 x. 考虑 $c=(1-a)x$, 则 $c-b\in I, ca=ac=0$. 并且 c 幂等：$c^2=(1-a)x(1-a)x=(1-a)x^2=c$. □

证明过程中我们证明了当 R 满足 R/I 中任何幂等元可提升到 R 时, 对 R/I 中的正交幂等元 x,y, 以及 R 中满足 $\overline{a}=x$ 的幂等元 a, 存在 R 中的幂等元 c 使得 $\overline{c}=y$ 且 a,c 正交 (*). 该结果可加强：

Proposition 1.21 (正交幂等元提升)**.** 设 R 是含幺环, $I\subseteq\mathrm{Jac}R$ 是理想满足 R/I 中任何幂等元可提升到 R. 则对 $\overline{R}$ 的两两正交幂等元 $x_1,...,x_n(n\geq 2)$, 存在 R 中两两正交幂等元 $e_1,...,e_n$ 使得 $\overline{e_i}=x_i, 1\leq i\leq n$.

Proof. 对 $n\geq 2$ 作归纳, 已证明 $n=2$ 的情形. 假设结论对 $n-1(n\geq 3)$ 成立, 那么对两两正交幂等元 $x_1,...,x_n$, 存在 $e_1,...,e_{n-1}$ 使得 $\overline{e_i}=x_i, 1\leq i\leq n-1$. 对 R 的幂等元 $e=e_1+\cdots+e_{n-1}$, $\overline{e}$ 与 x_n 是正交幂等元, 应用 (*) 得到存在幂等元 $e_n\in R$ 使得 e_n 与 e 正交, $\overline{e}=x_n$. 因为每个 $e_i(1\leq i\leq n-1)$, 有 $e_i=ee_i=e_ie$, 所以 $e_ne_i=e_nee_i=0, e_ie_n=e_iee_n=0$. □

1.2 半完全环

回忆含幺环 R 被称为**半局部环** (semilocal ring), 如果 $R/\mathrm{Jac}R$ 是左 Artin 环 (这等价于要求 $R/\mathrm{Jac}R$ 是右 Artin 环). 易见局部环总是半局部环. 如果 R 只有有限多个极大左理想 $\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_n$, 那么有左 R-模的自然嵌入

$$j : R/\mathrm{Jac}R \to R/\mathfrak{m}_1 \times R/\mathfrak{m}_2 \times \cdots \times R/\mathfrak{m}_n,$$

这蕴含着 $R/\mathrm{Jac}R$ 作为左 R-模有合成列, 进而是左 Artin 模. 因此只要 R 有有限多个极大左理想, R 一定是半局部环. 反之不然, 例如考虑复数域上矩阵代数 $R = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 它明显是半局部环但有无穷多个极大左理想. 在交换代数中, 交换半局部环是指具有有限多个极大理想的含幺交换环. 这里的半局部环定义局限在交换层面与原先定义一致：刚刚说明了半局部环总有有限多个极大左理想, 所以交换的半局部环具有有限多个极大理想. 反之, 若含幺交换环 R 仅有有限多个极大理想 $\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_n$, 同样考虑嵌入同态 $j : R/\mathrm{Jac}R \to R/\mathfrak{m}_1 \times R/\mathfrak{m}_2 \times \cdots \times R/\mathfrak{m}_n$, 由中国剩余定理, j 是环同构, 所以 $R/\mathrm{Jac}R$ 作为有限个域的直积是 Artin 环. 故含幺交换环是半局部环的充要条件是该环具有有限多个极大理想. 此外, 这里指出 Artin 环总是半局部环, 因此半局部环理论满足了有限维代数表示论的研究需求. 现在我们能够给出半完全环的定义.

Definition 1.22 (半完全环)**.** 设 R 是含幺环, 如果 R 是半局部环且 $R/\mathrm{Jac}R$ 的幂等元都可以提升到 R, 则称 R 是**半完全环** (semiperfect ring).

Remark 1.23. 根据 [引理1.19], Artin 环是半完全环, 故有限维代数都是半完全环.

为了给出半完全环关于幂等元的刻画, 我们需要下面的引理.

Lemma 1.24. 设含幺环 R 是半素环, $e \neq 0$ 是幂等元, 如果 eRe 是除环, 那么 e是右不可约的.

Proof. 任取 eR 中非零元 er, 有 $erRer \neq 0$, 所以存在 $s \in R$ 使 $erse \neq 0$, 这说明 $erse$ 是 eRe 中可逆元, 所以 $erR = eR$, 即 eR 是右不可约模. □

类似可证明左的情形. 所以半素环的幂等元 e 是左 (右) 不可约幂等元等价于 eRe 是除环, 从而知道半素环中左不可约元等价于右不可约元. 之后我们会使用半本原环左右不可约元等价这一事实. 下面的引理是之后的必要工具, 它也说明了半完全环是局部环的推广.

Lemma 1.25. 设 R 是含幺环, 则 R 是局部环的充要条件是 $R/\mathrm{Jac}R$是除环.

Proof. 必要性：这时 $\mathrm{Jac}R$ 就是不可逆元全体, 故 $R/\mathrm{Jac}R$ 中任何非零元可逆. 充分性：我们说明 R 的任何不可逆元在 $\mathrm{Jac}R$ 中, 进而得到 R 全体不可逆元构成的集合是 $\mathrm{Jac}R$, 是理想. 任取不可逆元 a, 不妨设 a 没有左逆, 假设 $a \notin \mathrm{Jac}R$, 则存在 $b \in R$ 使得 $ba - 1 \in \mathrm{Jac}R$. 因为 Ra 是真左理想, 所以它含于某个极大左理想中, 于是 ba 在某个极大左理想中, 由此得到该极大左理想有 1, 矛盾. 故 $a \in \mathrm{Jac}R$. □

Example 1.26. 局部环是半完全环.

Corollary 1.27. 半完全环中本原幂等元是局部幂等元.

Proof. 设 $e \in R$ 是本原幂等元, 则 [命题1.20] 表明 $\overline{e} \in R/\mathrm{Jac}R$ 也是本原幂等元, 所以也是左不可约幂等元. 那么 $eRe/\mathrm{Jac}(eRe) \cong \overline{e}(R/\mathrm{Jac}R)\overline{e}$ 是除环, 所以 eRe 是局部环, 进而 e 是局部幂等元. □

Lemma 1.28. 设 R 是含幺环, $1 = e_1 + \cdots + e_n = e'_1 + \cdots + e'_n$ 是 1 的两个正交幂等元分解. 如果对每个正整数 i 有模同构 $Re_i \cong Re'_i$, 那么存在 R 的可逆元 u 使得 $e'_i = u^{-1}e_i u, \forall 1 \le i \le n$.

Proof. 对每个正整数 i, 有左 R-模同构 $\varphi_i : Re_i \to Re'_i$, 这给出左 R-模同构 $\Phi = \varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_n : R = Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_n \to R = Re'_1 \oplus \cdots \oplus Re'_n$, 于是存在可逆元 u 使得 Φ 是 u 决定的右乘变换, 即 $\Phi(x) = xu, \forall x \in R$. 进而 $e_i u \in Re'_i$, 所以每个 $u^{-1}e_i u \in Re'_i$, 满足 $1 = \sum\limits_{i=1}^{n} u^{-1}e_i u$, 结合直和分解 $R = Re'_1 \oplus \cdots \oplus Re'_n$ 元素表出唯一性得到 $e'_i = u^{-1}e_i u, \forall 1 \le i \le n$. □

Theorem 1.29. 含幺环 R 是半完全环的充要条件是 1可分解为两两正交的局部幂等元之和.

Proof. 必要性：设 R 是半完全环, 那么在 $\overline{R} = R/\mathrm{Jac}R$ 中, 1 可表示为有限多个两两正交的本原幂等元的和 $\overline{1} = x_1 + \cdots + x_n$, 由 [命题1.21] 每个 x_i 可提升为 R 的幂等元 e_i 使得 $e_1, ..., e_n$ 正交, 那么由 [命题1.20] 得到 e_i 是 R 的本原幂等元, 所以也是局部幂等元. 下证 $1 = e_1 + \cdots + e_n$, 对幂等元 $e = e_1 + \cdots + e_n$, $1 - e$ 是 $\mathrm{Jac}R$ 中幂等元, 是零元, 即 $1 = e_1 + \cdots + e_n$.

充分性：设 $1 = e_1 + \cdots + e_n$ 是两两正交局部幂等元之和, 那么每个 $\overline{e_i} \in \overline{R} = R/\mathrm{Jac}R$ 是左不可约幂等元 (根据 [命题1.6] 和 [引理1.25] 得到 $\overline{e_i}\overline{R}\overline{e_i}$ 是除环, 所以 [引理1.24] 表明 $\overline{e_i}$ 是右不可约元, 再由 $\overline{R}$ 是半本原环得到 $\overline{e_i}$ 左不可约), 于是 $\overline{R}$ 有不可约子模分解 $\overline{R} = \overline{R}\overline{e_1} \oplus \cdots \oplus \overline{R}\overline{e_n}$(验证它). 这就说明 $\overline{R}$ 是 Artin 半单环. 最后还要证 $R/\mathrm{Jac}R$ 的幂等元 x 都可以提升到 R. 我们有分解 $\overline{R} = \overline{R}x \oplus \overline{R}(1-x)$, 这里不妨设 $x \ne 0, 1$, 那么 $\overline{R}x$ 与 $\overline{R}(1-x)$ 作为有合成列的模可分解为有限个不可分子模的直和, 由 Krull-Schmidt 定理分解的唯一性, 得到在 $\overline{e_i}$ 适当重排后, 有 $\overline{R}$-模同构

$$\overline{R}x \cong \overline{R}\overline{e_1} \oplus \cdots \overline{R}\overline{e_k} = \overline{R}(\overline{e_1} + \cdots + \overline{e_k}), \overline{R}(1-x) \cong \overline{R}\overline{e_{k+1}} \oplus \cdots \overline{R}\overline{e_n} = \overline{R}(\overline{e_{k+1}} + \cdots + \overline{e_n}).$$

这里 $\overline{1} - (\overline{e_{k+1}} + \cdots + \overline{e_n}) = \overline{e_1} + \cdots + \overline{e_k}$, 所以应用 [引理1.28] 可知存在 $\overline{R}$ 中的可逆元 $\overline{u}$ 使得 $\overline{u}^{-1}x\overline{u} = \overline{e_1} + \cdots + \overline{e_k}$($u \in R$ 也可逆). 所以 $x = \overline{u(e_1 + \cdots + e_k)u^{-1}}$ 可提升为幂等元 $u(e_1 + \cdots + e_k)u^{-1}$. □

1.3 多余子模

为了定义投射盖, 需先介绍多余子模的概念, 我们将用多余子模来刻画模的根.

Definition 1.30 (多余子模)**.** 设 R 是含幺环, M 是左 R-模, 如果子模 S 满足对任何子模 N, $S + N = M$ 蕴含 $N = M$, 则称 S 是 M 的**多余子模** (superfluous submodule), 记作 $S \subseteq_s M$.

下面罗列一些关于多余子模的基本事实, 它们是之后讨论所需基本材料.

Lemma 1.31. 设 R 是含幺环, M 是左 R-模, $J = \mathrm{Jac}R$, 则
(1) 模 M 的任何非零直和因子不是多余子模.
(2) 当 M 是有限生成模时, JM 是多余子模.
(3) 有限个多余子模的和还是多余子模, 多余子模的子模仍是多余子模.
(4) 如果 N 是 M 的极大子模, 那么任何多余子模 S 满足 $S \subseteq N$.

如果左 R-模 M 存在极大子模, 我们称 M 全体极大子模之交为 M 的**根** (radical), 记作 $\mathrm{rad}M$. 否则定义 M 的根为 M. 当 $M = R$ 时, 模的根退化为环的 Jacobson 根. 回忆含幺环 R 被称为**半局部环** (semilocal ring), 如果 $R/\mathrm{Jac}R$ 是左 Artin 环 (这等价于要求 $R/\mathrm{Jac}R$ 是右 Artin 环). 如果 R 只有有限多个极大左理想 $\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_n$, 那么有左 R-模的自然嵌入

$$j : R/\mathrm{Jac}R \to R/\mathfrak{m}_1 \times R/\mathfrak{m}_2 \times \cdots \times R/\mathfrak{m}_n,$$

这蕴含着 $R/\mathrm{Jac}R$ 作为左 R-模有合成列, 进而是左 Artin 模. 因此只要 R 有有限多个极大左理想, R 一定是半局部环. 反之不然, 例如考虑复数域上矩阵代数 $R = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 它明显是半局部环但有无穷多个极大左理想. 在交换代数中, 交换半局部环是指具有有限多个极大理想的含幺交换环. 这里的半局部环定义局限在交换层面与原先定义一致：刚刚说明了半局部环总有有限多个极大左理想, 所以交换的半局部环具有有限多个极大理想. 反之, 若含幺交换环 R 仅有有限多个极大理想 $\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_n$, 同样考虑嵌入同态 $j : R/\mathrm{Jac}R \to R/\mathfrak{m}_1 \times R/\mathfrak{m}_2 \times \cdots \times R/\mathfrak{m}_n$, 由中国剩余定理, j 是环同构, 所以 $R/\mathrm{Jac}R$ 作为有限个域的直积是 Artin 环. 故含幺交换环是半局部环的充要条件是该环具有有限多个极大理想. 此外, 这里指出 Artin 环总是半局部环, 因此半局部环理论满足了有限维代数表示论的研究需求. 下面回到模的根的讨论：

Proposition 1.32. 设 M 是左 R-模, $J = \mathrm{Jac}R$, 则
(1)$\mathrm{rad}M$ 为全体多余子模之和;
(2)$JM \subseteq \mathrm{rad}M$, 当 R 是半局部环时等号成立.

Proof. (1) 记 T 是全体多余子模之和, 要证 $T = \mathrm{rad}M$. 如果 M 的极大子模存在, 那么每个极大子模包含全体多余子模, 这蕴含了 $\mathrm{rad}M \supseteq T$(当 M 不存在极大子模时, 该结论明显成立). 因此接下来只要说明 $\mathrm{rad}M \subseteq T$, 任取 $x \in \mathrm{rad}M$, 我们说明 Rx 是多余子模. 如果子模 N 满足 $Rx + N = M$, 下证 $x \in N$. 若不然, 则 M/N 是非零循环模, 所以存在 M 的极大子模 $M' \supseteq N$, 易知 $x \notin M'$(否则 $M' = M$), 这与 $x \in \mathrm{rad}M$ 矛盾.

(2) 不妨设 M 存在极大子模. 对任何极大子模 N, 有 M/N 是单模, 那么 $J(M/N) = 0$, 即 $JM \subseteq N$. 因此 $JM \subseteq \mathrm{rad}M$. 如果 R 是半局部环, 则 R/J 是 Artin 半单环, 那么 M/JM 不是零模就是完全可约模. 如果 $JM = M$, 那么结论直接成立. 下设 $M/JM \neq 0$ 是完全可约模, 那么它的根存在且为零, 再由 $\mathrm{rad}(M/JM) = (\mathrm{rad}M)/JM$ 得到 $\mathrm{rad}M = JM$. $\square$

Remark 1.33. 特别地, 对 Artin 环 R 上的模 M 也有 $\mathrm{rad}M = JM$.

下面我们再罗列两个关于模的根的基本事实.

Corollary 1.34. 设 R 是含幺环, 则
(1) 若左 R-模 $M \subseteq M'$, 那么 $\mathrm{rad}M \subseteq \mathrm{rad}M'$.
(2) 对左 R-模 M_1, M_2 有 $\mathrm{rad}(M_1 \oplus M_2) = \mathrm{rad}M_1 \oplus \mathrm{rad}M_2$. 一般地, 对任意左模族 $\{M_i | i \in I\}$ 有

$$\mathrm{rad}(\bigoplus_{i \in I} M_i) = \bigoplus_{i \in I} \mathrm{rad}M_i.$$

(3) 对任何自由左 R-模 F, 有 $\mathrm{rad}F = JF$, 其中 $J = \mathrm{Jac}R$.

Proof. 因为 M 的多余子模也是 M' 的多余子模, 所以利用模的根是所有多余子模之和立即得到 (1). 对 (2), 仅处理 $I = \{1, 2\}$ 的情形, 一般的情形方法完全相同. 由 (1) 马上看到 $\mathrm{rad}(M_1 \oplus M_2) \supseteq \mathrm{rad}M_1 \oplus \mathrm{rad}M_2$. 不妨设 M_1, M_2 都有极大子模. 现任取 $(x, y) \in \mathrm{rad}(M_1 \oplus M_2)$, 那么 M_1 的任何极大子模 N 满足 $N \oplus M_2$ 是 $M_1 \oplus M_2$ 的极大子模, 这说明 $(x, y) \in N \oplus M_2$, 于是 $x \in \mathrm{rad}M_1$. 类似地可证 $y \in \mathrm{rad}M_2$.

(3) 明显 R 作为自身左模的根就是 J, 故由 (2) 立即得到 (3). $\square$

下述定理表明非零投射模总存在极大子模, 并且上述命题的取等结论对投射模总成立.

Theorem 1.35. 设 R 是含幺环, ${}_RP \neq 0$ 是投射模, 则对 $J = \mathrm{Jac}R$ 有 $\mathrm{rad}P = JP \subsetneq P$.

Proof. 因为 P 投射, 故存在模 Q 使得 $P \oplus Q = F$ 自由, 设 F 有基 $\{e_i | i \in I\}$. 这时

$$\mathrm{rad}P \oplus \mathrm{rad}Q = \mathrm{rad}F = JF = JP \oplus JQ,$$

于是由 $JP \subseteq \mathrm{rad}P, JQ \subseteq \mathrm{rad}Q$ 便知 $\mathrm{rad}P = JP$. 因此只需说明 JP 是 P 的真子模. 我们使用反证法, 假设 $JP = P$, 设 $\pi : F \to P$ 是标准投射, 那么对每个 e_i, $\pi(e_i)$ 经 $\{e_i | i \in I\}$ 的表出系数均在 J 中. 任给 $p = \sum\limits_{k=1}^{n} r_k e_{i_k}$, 取 $m \geq n$ 使得对每个 $i_k (1 \leq k \leq n)$

$$\pi(e_{i_k}) = \sum_{j=1}^{m} a_{i_k j} e_{i_j}, a_{i_k j} \in J.$$

那么

$$p = \pi(p) = \pi(\sum_{k=1}^{n} r_k e_{i_k}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_k a_{i_k j} e_{i_j} = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} r_k a_{i_k j} \right) e_{i_j}.$$

与等式 $p = \sum\limits_{k=1}^{n} r_k e_{i_k}$ 比较系数可知行向量 $(r_1, ..., r_n)$ 右乘上某个 $I_n + \mathrm{M}_n(J)$ 中的矩阵得到零向量. 注意到 $I_n + \mathrm{M}_n(J)$ 中矩阵均可逆, 所以每个 $r_k = 0$, 从而 $p = 0$, 这与 P 是非零模矛盾. □

根据 Nakayama 引理我们立即看到任何有限生成投射 R-模 P 的根 $\mathrm{rad}P = JP$ 一定是 P 的多余子模, 其中 J 是 R 的 Jacobson 根. 一般而言对无限生成投射模, 它的根未必是多余子模.

Example 1.36. 设 R 是 P.I.D., 取定 R 的一个素元 p, 考虑 R 在素理想 (p) 处的局部化 $S = R_{(p)}$, 那么 S 作为局部整环有唯一的极大理想 pS. 下面我们说明自由 S-模 $F = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} S^n$ 的根 $\mathrm{rad}F = pF$ 并不是 F 的多余子模. 考虑 S 在乘闭子集 $\{1, p, p^2, p^3, ...\}$ 的局部化 $Q = S[p^{-1}]$, 那么 $Q \neq 0$ 是可数生成 S-模 (可由 $\{1, 1/p, 1/p^2, ...\}$ 生成). 因此 F 到 Q 有自然的满 S-模同态 $\pi : F \to Q$. 根据 $pQ = Q$ 我们看到 $pF + \mathrm{Ker}\pi = F$, 而 $\mathrm{Ker}\pi$ 是 F 的真子模, 因此 pF 不是 F 的多余子模.

2 投射盖

2.1 基本事实

Definition 2.1 (投射盖)**.** 设 R 是含幺环, M 是左 R-模, 如果满模同态 $\theta : P \to M$ 满足 P 是投射模且 $\mathrm{Ker}\theta \subseteq_s P$, 则称 θ 是 M 的**投射盖** (projective cover). 有时也称 P 是 M 的投射盖.

定义中 $\mathrm{Ker}\theta \subseteq_s P$ 的条件也可以改为对 P 的任何子模 P', $\theta(P') = M$ 蕴含 $P = P'$.

Lemma 2.2. 设 R 是含幺环, P 是投射 R-模, $\theta : P \to M$ 是满模同态, 那么 $\mathrm{Ker}\theta \subseteq_s P \Leftrightarrow$ 对 P 的任何子模 P', $\theta(P') = M$ 蕴含 $P = P'$.

Proof. 充分性明显, 这里只证必要性：如果 $\theta(P')=M$, 设 $\tilde{\theta}: P'\to M$ 是 θ 的限制, 那么根据 P 是投射模, 存在模同态 $f: P\to P'$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "\theta"] & \\ P' \arrow[r, "\tilde{\theta}"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

这时有 $P'+\mathrm{Ker}\theta=P$(利用上图直接验证), 所以 $\mathrm{Ker}\theta$ 是多余子模使得 $P=P'$ $\square$

P.I.D. 上投射模总自由, 故 P.I.D. 上投射模 ${}_RP\neq 0$ 与不可逆元 $a\in R$, aP 是真子模 (验证它).

Example 2.3 (模的投射盖可能不存在)**.** 设 $R=k[x]$ 是域上多项式环, $M=k[x]/(x)$ 没有投射盖.

Proof. 假设有投射盖 $\theta: P\to M$, 那么 P 的真子模 $P'=(x-1)P$ 满足 $\theta(P')=M$, 矛盾. $\square$

Remark 2.4. 一般地, 若 R 是 P.I.D., 对任何 R 中不可逆元素 $a\notin \mathrm{Jac}R$, $R/(a)$ 作为 R-模没有投射盖. 原因是这时 $R/(a)$ 是非零模, 存在 $r\in R$ 使得 $1-ra$ 不可逆. 假设存在 $\theta: P\to M$, 那么 P 的真子模 $P'=(1-ra)P$ 是真子模, 满足 $\theta(P')=R/(a)$, 由此得到矛盾.

Example 2.5. 设 R 是含幺环, 左 R-模 P 投射, 则 $\mathrm{id}_P: P\to P$ 是 P 的投射盖.

虽然模的投射盖可能不存在, 但当投射盖存在时有下面的同构唯一性.

Proposition 2.6 (投射盖的同构唯一性)**.** 设 R 是含幺环, $\theta: P\to M$ 与 $\theta': P'\to M$ 都是 M 的投射盖, 那么存在模同构 $\alpha: P'\to P$使下图交换：

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\theta"] & M \\ & P' \arrow[ul, dashed, "\alpha"] \arrow[u, "\theta'"'] \end{tikzcd}$$

Proof. 由 P' 是投射模知存在模同态 $\alpha: P'\to P$ 使得 $\theta\alpha=\theta'$, 那么由 $\theta(\alpha(P'))=M$ 以及 [引理2.2] 得到 $\alpha(P')=P$, 于是由 P 是投射模得到 $\mathrm{Ker}\alpha$ 是 P' 的直和因子. 因 $\mathrm{Ker}\alpha$ 是多余子模 $\mathrm{Ker}\theta'$ 的子模, 所以 $\mathrm{Ker}\alpha$ 也是多余子模, 从而 [引理1.31(1)] 迫使 $\mathrm{Ker}\alpha=0$. 所以 α 是同构. $\square$

Proposition 2.7. 设 R 是半完全环, 那么任何有限生成左 R-模 M有投射盖.

Proof. 不妨设 $M\neq 0$, 记 $J=\mathrm{Jac}R, \overline{R}=R/J$ 是 Artin 半单环. 由 [定理1.29] 得存在正交局部幂等元 $e_1,...,e_n$ 使得 $1=e_1+\cdots+e_n$, 那么 $\overline{R}=\overline{R\overline{e_1}}\oplus\cdots\oplus\overline{R\overline{e_n}}$. 而每个 $\overline{R}$ 上的不可约左模同构于某个 $\overline{R\overline{e_k}}$. 对有限生成模 $M\neq 0$, M/JM 作为 Artin 半单环 R/J 上的模是完全可约的, 且一定是 Artin 模, 故 M/JM 也是 Noether 模. 可设 $\overline{R}$-模同构 $M/JM\cong\oplus_{i=1}^m\overline{R\overline{a_i}}$, 其中 $a_i\in\{e_1,...,e_n\}$. 设模同构为 $\eta: M/JM\to\oplus_{i=1}^m\overline{R\overline{a_i}}$. 置投射模

$$P=\oplus_{i=1}^m Ra_i,$$

那么存在模同态 $\theta: P=\oplus_{i=1}^m Ra_i\to M$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] & M/JM \arrow[r, "\eta"] & \oplus_{i=1}^m\overline{R\overline{a_i}} \arrow[r] & 0 \\ P=\oplus_{i=1}^m Ra_i \arrow[u, dashed, "\theta"] \arrow[rr] & & \oplus_{i=1}^m Ra_i/Ja_i \arrow[u, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

容易验证：(1) $\theta(P)+JM=M$. (2)Ker$\theta\subseteq JP$. 对 (1) 用 Nakayama 引理, 可得 θ 是满射. 对 (2) 应用 [引理1.31(2)(3)] 可得 Kerθ 是 P 的多余子模. 这就构造了投射盖 $\theta: P\to M$. □

Remark 2.8. 证明过程表明半完全环上有限生成模的投射盖一定是有限生成的. 并且当 M 是不可约模时, 存在 R 的某个局部幂等元 e 使得 Re 是 M 的投射盖.

当 R 是局部环时, 我们有更简单的构造.

Example 2.9. 设 R 是局部环, $J=\mathrm{Jac}R$, 则 R/J 是除环. 设 M 是有限生成非零左 R-模, 那么 M/JM 是除环 R/J 上有限维线性空间, 设维数是 n, 有基 $\{\overline{m_i}\}_{i=1}^n$, 那么将 R^n 的标准单位向量映至 m_i 可定义出满同态 $\theta: P=R^n\to M$ 使得下图交换, 其中 $\tilde{\theta}$ 是线性同构.

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ (R/J)^n \arrow[r, "\tilde{\theta}"] & M/JM \end{tikzcd}$$

那么 Ker$\theta\subseteq J^n$, 结合 $J^n=J(R^n)$ 得到 Kerθ 是多余子模. 所以 $\theta: R^n\to M$是投射盖.

2.2 极小投射分解

Definition 2.10 (极小投射分解)**.** 设 R 是含幺环, 如果 R-模 M 的投射分解 (C,d,ε)

$$\cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0,$$

满足 $\varepsilon: C_0\to M$ 是 M 的投射盖, 对任何正整数 i, $\overline{d_i}: C_i\to \mathrm{Im}d_i$ 是 $\mathrm{Im}d_i$ 的投射盖, 则称投射分解 (C,d,ε) 是 M 的**极小投射分解** (minimal projective resolution).

Remark 2.11. 因为一般环上的模可能不存在投射盖, 所以也未必存在极小投射分解.

Example 2.12. 设 R 是左 Noether 局部环, $J=\mathrm{Jac}R$, 则任何有限生成左 R-模 $M\neq 0$ 的极小投射分解可如下构造. 设 M/JM 作为 R/J-线性空间维数是 n_1, 基为 $\{\overline{x_i}\}_{i=1}^{n_1}$, 那么 [例2.9] 表明可利用 $\{x_i\}_{i=1}^{n_1}$ 得投射盖 $\varepsilon: R^{n_1}\to M$, 再对 Ker$\varepsilon$ 重复上述讨论 (注意 R 的 Noether 条件保证了这里 Kerε 也是有限生成模), 可得 M 的极小投射分解

$$\cdots \longrightarrow R^{n_3} \xrightarrow{d_2} R^{n_2} \xrightarrow{d_1} R^{n_1} \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

一般地, 根据 [命题2.7] 知 Noether 半完全环上有限生成模总存在极小投射分解, 例如有限维代数上的有限维模总存在极小投射分解. 极小投射分解如果存在, 易证下述同构唯一性：

Proposition 2.13. 如果含幺环 R 上模 ${}_RM$ 有极小投射分解 $(P,d,\varepsilon),(P',d',\varepsilon')$, 那么它们作为复形同构. 更具体地, 只要有链映射 $\alpha:(P,d)\to(P',d')$ 使得 $\varepsilon=\varepsilon'\alpha_0$, 那么每个 $\alpha_i: C_i\to C_i'$ 是同构.

Proof. 先指出比较引理保证了条件中的链映射 α 总存在.

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_n"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha_0"] & M \arrow[d, "\mathrm{id}_M"] \\ {} \arrow[r] & P_n' \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1' \arrow[r, "d_1'"] & P_0' \arrow[r, "\varepsilon'"] & M \end{tikzcd}$$

利用 [命题2.6] 得到 α_0 是同构. 对每个正整数 i, 注意到下图交换

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r, "d_i|"] \arrow[d, "\alpha_i"] & \mathrm{Im} d_i \arrow[d, "\alpha_{i-1}|"] \\ C_i' \arrow[r, "d_i'|"] & \mathrm{Im} d_i' \end{tikzcd}$$

再应用 [命题2.6] 对 $n \geq 0$ 作归纳可证每个 α_n 是同构. □

下面说明当模的极小投射分解存在时, 一般的投射分解与极小投射分解的关系.

Proposition 2.14. 如果含幺环 R 上模 $_RM$ 有极小投射分解 (P, d, ε), 那么对任何 M 的投射分解 (Q, h, η), 存在链映射 $\alpha : (Q, h) \to (P, d)$ 使得 $\varepsilon\alpha_0 = \eta$ 且对每个自然数 i, $\alpha_i : Q_i \to P_i$ 是满射.

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & Q_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_n"] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & Q_0 \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\alpha_0"] & M \\ {} \arrow[r] & P_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & M \end{tikzcd}$$

Proof. 对恒等态 $\mathrm{id}_M : M \to M$ 应用比较引理可得链映射 $\alpha : (Q, h) \to (P, d)$ 以及 $\beta : (P, d) \to (Q, h)$ 使得 $\varepsilon\alpha_0 = \eta, \eta\beta_0 = \varepsilon$. 那么由极小投射分解的性质知链映射 $\alpha\beta$ 每项是同构, 故 $\alpha_i : Q_i \to P_i (i \geq 0)$ 是满射. □

对上述 [命题2.14] 的一个简单观察就是极小投射分解存在时, 它的长度是所有投射分解长度最短的. 所以这时极小投射分解的长度便可给出模的投射维数.

Corollary 2.15. 设含幺环 R 上模 $_RM$ 有极小投射分解 (P, d, ε), 那么投射维数 $\mathrm{p.dim}_R M = l(P)$, 这里 $l(P)$ 指复形 (P, d) 的长度.

3 特殊环上的投射模

3.1 半完全环上投射模

Theorem 3.1. 设 R 是半完全环, 并设有正交局部幂等元 $e_1, ..., e_n$ 使得 $1 = e_1 + \cdots + e_n$. 那么对每个非零不可分投射模 P, 都存在某个 e_i 使得 $Re_i \cong P$.

Proof. 首先 $P \neq 0$ 表明 $P/JP \neq 0$, 故为 Artin 半单环 R/J 上完全可约模, 从而 P/JP 有个不可约子模作为其直和因子, 设为 S, 那么 P 到不可约左 R-模 S 有自然满态 $\pi : P \to S$. 之前已经说明 S 作为不可约模, 存在某个局部幂等元 e_i 使得 Re_i 是 S 的投射盖. 因此 P 到 Re_i 有满模同态, 进而该模同态可裂, 由 P 是不可分模迫使该满模同态是单射, 所以 $Re_i \cong P$. □

Proposition 3.2. 设含幺环 R 上不可约模 X, X' 的投射盖均存在, 设为 $\theta : P \to X, \theta' : P' \to X'$, 如果 P, P' 都是有限生成的, 那么以下三条等价：(1) 有 R-模同构 $P \cong P'$. (2) 有 R-模同构 $X \cong X'$. (3) 有 R/J-模同构 $P/JP \cong P'/JP'$.

Proof. 在 [命题1.3] 中我们已经看到 (1) 和 (3) 是总等价的. 而 (2) 明显蕴含 (1), 所以只需要说明 (1) 蕴含 (2)：设 J 是 R 的 Jacobson 根, 因为 X, X' 都是不可约模, 所以 JX, JX' 都是零模. 考虑 θ 与 θ' 诱导的满同态 $\tilde{\theta} : P/JP \to X/JX \cong X, \tilde{\theta}' : P'/JP' \to X'/JX' \cong X'$. 如果能够说明 $\mathrm{Ker}\theta = JP, \mathrm{Ker}\theta' = JP'$, 那么 $\tilde{\theta}$ 和 $\tilde{\theta}'$ 均为同构, 由此直接得到 $X \cong X'$. 以 θ 为例, 因为 θ 是投射盖, 所以 $\mathrm{Ker}\theta$ 是多余子模. 不妨设 $P \neq 0$, 那么 $\mathrm{rad}P = JP$ 作为所有 P 的多余子模之和一定包含 $\mathrm{Ker}\theta$. 同时 $JP \subseteq \mathrm{Ker}\theta$ 是明显的, 所以 $\mathrm{Ker}\theta = JP$. □

Corollary 3.3. 设 R 是半完全环, 那么对任意两个不可约 R-模 X, X', 设它们的投射盖是 $\theta : P \to X, \theta' : P' \to X'$. 那么 $X \cong X'$ 的充要条件是 $P \cong P'$.

参考文献

[Lam99] T. Y. Lam. *Lectures on Modules and Rings*. Springer-Verlag, 1999.

[Lam01] T. Y. Lam. *A First Course in Noncommutative Rings*. Springer-Verlag, 2nd edition, 2001.