完备域

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 12 月 29 日

这份笔记用于记录域论中完备域的基础知识. 对域扩张 $L \supseteq F$, 如果代数元 $\alpha \in L$ 满足 α 在 F 上最小多项式无重根, 称 α 是 F 上**可分元**. $F[x]$ 中任何无重根的多项式被称为**可分多项式**. 如果 L 中元素均在 F 上可分, 称 L 是 F 的**可分扩张**. 例如当 $\mathrm{char}F = 0$ 时, F 的任何域扩张是可分的.

Definition 1. 如果域 F 满足 $F[x]$ 中任何不可约多项式是可分的, 则称 F 是**完备域**.

Remark 2. 由定义易验证域 F 是完备域当且仅当任何 F 的有限扩张是可分扩张.

Example 3. 特征为零的域以及代数闭域均为完备域.

因为域 F 上多项式 $f(x)$ 无重根当且仅当 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素. 所以 F 上不可约多项式 $g(x)$ 不可分的充要条件是 $g'(x) = 0$. 因此取 $F = \mathbb{F}_2(y)$ 为 2 元域 $\mathbb{F}_2$ 上有理函数域, 则 $x^2 - y \in F[x]$ 是 F 上不可分的不可约多项式. 这说明有理函数域 $\mathbb{F}_2(y)$ 不是完备域. 对完备域有下述刻画:

Proposition 4. 设 F 是域, 则 F 是完备域当且仅当 $\mathrm{char}F = 0$ 或 $\mathrm{char}F = p$ 且 $F^p = F$, 其中 p 是素数且 $F^p = \{a^p | a \in F\}$.

Proof. 由于特征零的域明显是完备的, 所以要证明该命题只需再验证当 $\mathrm{char}F = p$ 时, F 完备当且仅当 $F^p = F$. 必要性：如果 $F \neq F^p$, 取 $a \in F - F^p$, 那么由 $\mathrm{char}F = p$ 知 $x^p - a$ 在 F 上分裂域内不计重数仅有一根, 为 p 重根, 所以 $x^p - a$ 是不可分的. 下证 $x^p - a$ 是不可约多项式来说明 F 不是完备域导出矛盾. 假设 $x^p - a$ 是可约多项式, 那么任何一个次数 m 介于 1 与 $p-1$ 间的多项式因子在 $x^p - a$ 的分裂域上形如 $(x-\alpha)^m$, 这里 $\alpha^p = a$. 进而知 $-m\alpha$ 作为 $(x-\alpha)^m$ 的系数在 F 中, 结合 $1 \leq m \leq p-1$ 得 $\alpha \in F$, 这和 $a \notin F^p$ 矛盾. 因此 $x^p - a$ 是 F 上不可约多项式. 充分性：假设 F 不是完备域, 那么存在不可约多项式 $f(x) \in F[x]$ 不可分. 这时 $f'(x) = 0$, 因此 $f(x)$ 的每个非零单项式关于 x 的次数都是 p 的倍数, 从而由 $F = F^p$ 得到存在多项式 $g(x) \in F[x]$ 使得 $f(x) = g(x)^p$. 这与 $f(x)$ 的不可约性矛盾, 因此 F 是完备域. □

Corollary 5. 任何有限域是完备域.

Proof. 设 F 是有限域, 特征记为素数 p, 那么 Frobenius 映射 $\theta : F \to F, \alpha \mapsto \alpha^p$ 是单射, 结合 F 是有限集得到 θ 是满射. 因此 $F = F^p$, 再利用 [命题3] 得到 F 是完备域. □