流形上的多重向量场

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 7 月 25 日

这份笔记主要记录光滑流形上多重向量场的基本概念与性质, 例如多重向量场模与高阶微分形式模的对偶关系 ([引理1.1]) 以及多重向量场模与光滑函数环上交错多重线性导子模的同构关系 ([命题1.2]). 在纯代数场景, 这里介绍给定交换代数的高阶 Kähler 微分模与交错多重线性导子模的对偶关系. 主要参考文献是 [Lee12], [CPV12] 以及 [KZ19]. 关于 Kähler 微分模的基本构造与性质可参见 [Eis04] 或 [Mat70].

1 多重向量场

本节固定光滑流形 $\mathcal{M}$, 对每个自然数 k, 记 $\Omega^k(\mathcal{M})$ 是所有光滑 k-形式构成的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模. 对含幺交换环 K 上的交换代数 A 以及自然数 k, 记 $\mathfrak{X}^k(A) = \{F : \wedge_K^k A \to A | F\text{在每个分量上是}K\text{-导子}\}$. 在这个记号下, $\mathfrak{X}^k(C^\infty(\mathcal{M}))$ 就是 $C^\infty(\mathcal{M})$ 上交错 k 重 $C^\infty(\mathcal{M})$-线性函数全体. 对反变 k-张量场 $B : \mathcal{M} \to T^kT\mathcal{M}$, 如果对每个 $p \in \mathcal{M}$, 反变 k-张量 B_p 是余切空间 $T_p^*\mathcal{M}$ 上的交错线性函数, 则称 B 是**交错的**. 如果交错反变 k-张量场 B 是光滑的, 则称 B 是 k **次光滑多重向量场**或**光滑** k**-向量场** (也简称为**多重向量**), 记 $\mathcal{M}$ 上所有光滑 k-向量场构成的集合为 $\mathfrak{X}^k(\mathcal{M})$, 那么 $\mathfrak{X}^k(\mathcal{M})$ 作为光滑丛 $\wedge^k TM$ 的光滑截面模上有自然的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模结构. 之后我们会在 [命题1.2] 中说明 $\mathfrak{X}^k(\mathcal{M}) \cong \mathfrak{X}^k(C^\infty(\mathcal{M}))$, 进而知交错多重线性导子是多重向量场的代数推广.

注意到 $\mathfrak{X}^k(\mathcal{M}) \cong \{F : \Omega^1(\mathcal{M})^k \to C^\infty(\mathcal{M}) | F\text{是交错}k\text{重}C^\infty(\mathcal{M})\text{-线性函数}\}$, 这里每个光滑 k-向量场 B 对应 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同态 $\mathcal{B} : \Omega^k(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$ 满足 $\mathcal{B}(df_1 \wedge \cdots \wedge df_k) = B(df_1, ..., df_k), \forall f_1, ..., f_k \in C^\infty(\mathcal{M})$. 这诱导 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构 $\mathfrak{X}^k(\mathcal{M}) \cong \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega^k(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M}))$. 我们把该同构记录为

Lemma 1.1. 定义映射 $\eta : \mathfrak{X}^k(\mathcal{M}) \to \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega^k(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M}))$ 满足将每个光滑 k-向量场 B 映至满足

$$\mathcal{B}(df_1 \wedge \cdots \wedge df_k) = B(df_1, ..., df_k), \forall f_1, ..., f_k \in C^\infty(\mathcal{M})$$

的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同态 $\mathcal{B}$, 那么 η 是 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构. 特别地, $\mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\mathfrak{X}^k(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M})) \cong \Omega^k(\mathcal{M})$.

Remark. 因为 $\Omega^k(\mathcal{M})$ 是有限生成投射 $C^\infty(\mathcal{M})$-模, 故利用其自反同构可得 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构 $\tau : \Omega^k(\mathcal{M}) \to \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\mathfrak{X}^k(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M}))$, 这里 $\tau(df_1 \wedge \cdots \wedge df_k)(B) = B(df_1, ..., df_k), \forall f_1, ..., f_k \in C^\infty(\mathcal{M}), B \in \mathfrak{X}^k(\mathcal{M})$.

Proposition 1.2. 定义 $\xi : \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega^k(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M})) \to \mathfrak{X}^k(C^\infty(\mathcal{M}))$ 为满足将每个模同态 φ 映至

$$\xi(\varphi)(f_1, ..., f_k) = \varphi(df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_k), \forall f_1, ..., f_k \in C^\infty(\mathcal{M})$$

的映射, 那么 ξ 是 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构. 特别地, 由 [引理1.1] 得到 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构 $\mathfrak{X}^k(\mathcal{M}) \cong \mathfrak{X}^k(C^\infty(\mathcal{M}))$.

Proof. 首先由 $d : C^\infty(\mathcal{M}) \to \Omega^1(\mathcal{M})$ 是 $\mathbb{R}$-导子易见 ξ 是定义合理的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同态. 再由 $\Omega^1(\mathcal{M})$ 是可由恰当形式生成的有限生成模看到 ξ 是单射, 最后我们说明 ξ 是满射来得到结论. 任取 $F \in \mathfrak{X}^k(C^\infty(\mathcal{M}))$, 对每个 $p \in \mathcal{M}$, 如下定义交错线性函数 $B_p : (T_p^*\mathcal{M})^k \to \mathbb{R}$: 任取含 p 光滑坐标卡 (U, φ), 并设有坐标表示 $(x_i)_{i=1}^n$, 那么关于此坐标表示余切空间 $T_p^*\mathcal{M}$ 有自然基 $\{dx_1|_p, ..., dx_n|_p\}$. 设 $D \subseteq U$ 是含 p 开领域满足 $\overline{D} \subseteq U$, 那么存在光滑函数 $\tilde{x}_i : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 使得 $\tilde{x}_i|_D = x_i|_D$. 定义 $B_p(dx_{i_1}|_p, ..., dx_{i_k}|_p) = F(\tilde{x}_{i_1}, ..., \tilde{x}_{i_k})(p)$. 为了说明 B_p 的定义合理性, 我们需要说明 $F(\tilde{x}_{i_1}, ..., \tilde{x}_{i_k})(p)$ 仅依赖于 $\tilde{x}_{i_1}, ..., \tilde{x}_{i_k}$ 在 p 点的局部性态. 只需验证对 $f_1, ..., f_k \in C^\infty(\mathcal{M})$, 如果 f_i 在点 p 的某个开邻域 W 上恒为零, 则 $F(f_1, ..., f_k) = 0$. 首先可构造支集含于 W 的光滑函数 ψ 使得 $\psi(p) = 1$, 那么 $\psi f_i = 0$, 因此 $0 = \psi(p)F(f_1, ..., f_k)(p) + f_i(p)F(f_1, ..., f_{i-1}, \psi, f_{i+1}, ..., f_n)(p)$, 这说明 $F(f_1, ..., f_k) = 0$. 所以 B_p 是定义合理的交错多重线性函数. 并且根据 B 的定义可知 B 是光滑的, 故 $B \in \mathfrak{X}^k(\mathcal{M})$. 它对应 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同态 $\mathcal{B} : \Omega^k(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$ 满足

$$\mathcal{B}(df_1 \wedge \cdots \wedge df_k) = B(df_1, ..., df_k) = F(f_1, ..., f_n), \forall f_1, ..., f_k \in C^\infty(\mathcal{M}).$$

上式表明 $\xi(\mathcal{B}) = F$, 因此 ξ 是满射. □

Remark. 根据证明过程, $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构 $\mathfrak{X}^k(\mathcal{M}) \cong \mathfrak{X}^k(C^\infty(\mathcal{M}))$ 由映射 $\zeta : \mathfrak{X}^k(\mathcal{M}) \to \mathfrak{X}^k(C^\infty(\mathcal{M}))$ 给出:

$$\zeta(B) : C^\infty(\mathcal{M}) \times \cdots \times C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M}), (f_1, ..., f_k) \mapsto B(df_1, ..., df_k).$$

ζ 的逆映射 ζ^{-1} 满足将每个 $F \in \mathfrak{X}^k(C^\infty(\mathcal{M}))$ 映至 $\mathcal{M}$ 上唯一满足 $B(df_1, ..., df_k) = F(f_1, ..., f_k), \forall f_1, ..., f_k \in C^\infty(\mathcal{M})$ 的光滑多重向量场 B. 再结合 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构 $\Omega^k(\mathcal{M}) \cong \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\mathfrak{X}^k(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M}))$ 可得模同构

$$\lambda : \Omega^k(\mathcal{M}) \to \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\mathfrak{X}^k(C^\infty(\mathcal{M})), C^\infty(\mathcal{M})),$$

满足 $\lambda(df_1 \wedge \cdots \wedge df_k)(F) = F(f_1, ..., f_k), \forall f_1, ..., f_k \in C^\infty(\mathcal{M})$.

Example 1.3. 当 $k = 1$ 时, $\mathfrak{X}^1(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \cong \mathfrak{X}^1(C^\infty(\mathcal{M})) = \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}C^\infty(\mathcal{M})$ 是光滑向量场模.

Example 1.4. 当 $k = 2$ 时, $\mathfrak{X}^2(\mathcal{M}) \cong \mathfrak{X}^2(C^\infty(\mathcal{M}))$ 中的元素被称为 **(光滑) 双向量场**. 例如, 设 $(\mathcal{M}, \omega)$ 是辛流形, 记每个光滑函数 f 的 Hamilton 向量场为 X_f, 那么定义 $\{f, g\} = X_g f$ 可赋予光滑函数环上 Poisson 代数结构 $\{-,-\} : C^\infty(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$, 这时 $\{-,-\} \in \mathfrak{X}^2(C^\infty(\mathcal{M}))$, 它可视作 $\mathcal{M}$ 上双向量场. 由于 $\{-, g\} = X_g, \forall g \in C^\infty(\mathcal{M})$, 因此在含幺交换环 K 上 Poisson 代数 $(A, \{-,-\})$ 中, 形如 $\{a, -\}, a \in R$ 的 K-导子被称为 **Hamilton 导子**.

Remark. 对光滑流形 $\mathcal{M}$, 我们已经看到 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构 $\mathfrak{X}^2(\mathcal{M}) = \Gamma(\wedge^2 T\mathcal{M}) \cong \mathfrak{X}^2(C^\infty(\mathcal{M}))$, 即双向量场与光滑函数环上交错双线性导子间一一对应. 任给双线性导子 $F : C^\infty(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$, 存在唯一的双向量场 π 满足 $\pi(df \wedge dg) = F(f, g), \forall f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$. 反之, 任何双向量场 $\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$ 诱导 $C^\infty(\mathcal{M})$ 上交错双线性导子 F, 满足 $F(f, g) = \pi(df \wedge dg), \forall f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$. 因此双向量场 $\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$ 诱导的交错双线性导子能够赋予光滑函数环 Poisson 代数结构当且仅当该交错双线性导子是 $\mathbb{R}$-Lie 括号. 我们把 π 诱导的交错双线性导子记作 $\{-,-\} : C^\infty(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$, 如果 $\{-,-\}$ 是 $C^\infty(\mathcal{M})$ 上 $\mathbb{R}$-Lie 括号, 即 $\{f, g\} = \pi(df, dg)$, 则称 π 是 $\mathcal{M}$ 上 **Poisson 结构**、**Poisson 双向量 (场)** 或 **Poisson 张量**. 任何光滑流形

上都有 Poisson 结构, 例如取 $\pi = 0$, 这时光滑函数环上有平凡 Poisson 代数结构. 如果 $\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$ 是 $\mathcal{M}$ 上双向量场, 那么称 $(\mathcal{M}, \pi)$ 是 **Poisson 流形**. 根据前面的讨论, $C^\infty(\mathcal{M})$ 上 Poisson 代数结构与 $\mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$ 中 Poisson 结构一一对应.

下面我们来说明进一步有 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构 $\mathfrak{X}^k(C^\infty(\mathcal{M})) \cong \wedge^k_{C^\infty(\mathcal{M})}\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}C^\infty(\mathcal{M})$. 根据 [命题1.2], 我们有 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构 $\xi : \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega^k(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M})) \to \mathfrak{X}^k(C^\infty(\mathcal{M}))$, 标准同构 $\Omega^k(\mathcal{M}) \cong \wedge^k_{C^\infty(\mathcal{M})}\Omega^1(\mathcal{M})$ 产生模同构 $\varepsilon : \wedge^k_{C^\infty(\mathcal{M})}\mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega^1(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M})) \to \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega^k(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M}))$, 这里 ε 满足

$$\varepsilon(F_1 \wedge \cdots \wedge F_k)(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (\mathrm{sgn}\sigma) F_1(\omega_{\sigma(1)}) \cdots F_k(\omega_{\sigma(k)}), \forall F_1, ..., F_k \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega^1(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M})).$$

考虑标准同构 $\varphi : \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}C^\infty(\mathcal{M}) \to \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega^1(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M}))$, 这里 φ 满足对每个光滑函数环上导子 D, 有 $\varphi(D)d = D$, 其中 $d : C^\infty(\mathcal{M}) \to \Omega^1(\mathcal{M})$ 是外微分算子. 那么下图的交换性唯一确定出 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构 $\Phi : \wedge^k_{C^\infty(\mathcal{M})}\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}C^\infty(\mathcal{M}) \to \mathfrak{X}^k(C^\infty(\mathcal{M}))$:

$$\begin{tikzcd}
\wedge^k_{C^\infty(\mathcal{M})}\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}C^\infty(\mathcal{M}) \arrow[r, "\wedge^k\varphi"] \arrow[d, dashed, "\Phi"'] & \wedge^k_{C^\infty(\mathcal{M})}\mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega^1(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M})) \arrow[d, "\varepsilon"] \\
\mathfrak{X}^k(C^\infty(\mathcal{M})) & \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega^k(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M})) \arrow[l, "\xi"']
\end{tikzcd}$$

通过直接计算可知 $\Phi(X_1 \wedge \cdots \wedge X_k)(f_1, ..., f_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (\mathrm{sgn}\sigma) X_1(f_{\sigma(1)}) \cdots X_k(f_{\sigma(k)}), \forall f_1, ..., f_k \in C^\infty(\mathcal{M})$. 我们把刚刚得到的模同构总结为下述推论.

Corollary 1.5. 固定自然数 k, 则存在唯一的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构 $\Phi : \wedge^k_{C^\infty(\mathcal{M})}\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}C^\infty(\mathcal{M}) \to \mathfrak{X}^k(C^\infty(\mathcal{M}))$ 满足

$$\Phi(X_1 \wedge \cdots \wedge X_k)(f_1, ..., f_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (\mathrm{sgn}\sigma) X_1(f_{\sigma(1)}) \cdots X_k(f_{\sigma(k)}), \forall f_1, ..., f_k \in C^\infty(\mathcal{M}).$$

2 多重线性导子

固定含幺交换环 K 上交换代数 A, 之前我们已经引入了 A 上交错多重线性导子模 $\mathfrak{X}^r(A)$. 更一般地, 对任何 A-模 M, 可以考虑 A 到 M 的交错多重线性导子, 定义 A 到 M 的所有交错 r 重线性导子为

$$\mathfrak{X}^r(M) = \{F \in \mathrm{Hom}_K(\wedge^r_K A, M) | F\text{在每个分量上是}K\text{-导子}\}.$$

记 $\Omega^r(A)$ 是交换代数 A 的 r 阶 Kähler 微分模, 则有 $\mathfrak{X}^k(\mathcal{M}) \cong \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega^k(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M}))$ 的代数版本:

Theorem 2.1. 设 M 是 A-模, r 是自然数. 那么有典范 A-模同构 $\varphi : \mathfrak{X}^r(M) \to \mathrm{Hom}_A(\Omega^r(A), M)$ 使得

$$\varphi(F)(a_0 da_1 \wedge da_2 \wedge \cdots \wedge da_r) = a_0 F(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n), \forall a_i \in A.$$

因此, 对任何交错 r-线性导子 $F : \wedge^r_K A \to M$, 存在唯一的 A-模同态 $\tilde{F} : \Omega^r(A) \to M$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
\wedge^r_K A \arrow[rr, "\wedge^r d"] \arrow[dr, "F"'] & & \Omega^r(A) \arrow[dl, dashed, "\tilde{F}"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Proof. 首先对每个 $F \in \mathfrak{X}^r(M)$, 有 A-模同态

$$\theta : \left(\bigoplus_{a\in A} Ada\right) \otimes_A \left(\bigoplus_{a\in A} Ada\right) \otimes_A \cdots \otimes_A \left(\bigoplus_{a\in A} Ada\right) \to M$$

$$b_1 da_1 \otimes b_2 da_2 \otimes \cdots \otimes b_r da_r \mapsto b_1 b_2 \cdots b_r F(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r)$$

因为 F 在每个分量上是 K-导子, 故 $\theta(\oplus_{a\in A} Ada \otimes \cdots \otimes C \otimes \cdots \oplus_{a\in A} Ada) = 0$, 其中

$$C = (\{d(aa') - ad(a') - d(a)a' - d(ka + k'a') - kd(a) - k'd(a') | a, a' \in A, k, k' \in K\})$$

在 i 次位置, $i = 1, 2, ..., r$. 因此 θ 诱导 A-模同态

$$\Theta : \left(\bigoplus_{a\in A} Ada/C\right) \otimes_A \left(\bigoplus_{a\in A} Ada/C\right) \otimes_A \cdots \otimes_A \left(\bigoplus_{a\in A} Ada/C\right) \to M$$

利用 $\Omega(A) = \bigoplus_{a\in A} Ada/C$, 可改写 Θ 为 $\Theta : \Omega(A) \otimes_A \cdots \otimes_A \Omega(A) \to M$. 易见 $\Theta(a_0 da_1 \otimes \cdots da_r) = a_0 F(a_1 \wedge \cdots \wedge a_r), \forall a_i \in A$. 注意到 $\Theta(da_1 \otimes \cdots \otimes da_{i-1} \otimes x \otimes x \otimes da_{i+1} \otimes \cdots \otimes da_r) = 0, \forall x \in \Omega_{A/K}$, 所以对 $x = \sum_{k=1}^{n} c_k db_k$, 有 $\Theta(da_1 \otimes \cdots \otimes da_{i-1} \otimes x \otimes x \otimes da_{i+1} \otimes \cdots \otimes da_r)$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_k c_l F(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge b_k \wedge b_l \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge da_r) \\
&= \sum_{k<l} c_k c_l F(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge b_k \wedge b_l \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge da_r) + \sum_{l<k} c_k c_l F(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge b_k \wedge b_l \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge da_r) \\
&= \sum_{k<l} c_k c_l F(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge b_k \wedge b_l \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge da_r) - \sum_{l<k} c_k c_l F(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge b_l \wedge b_k \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge da_r) \\
&= \sum_{k<l} c_k c_l F(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge b_k \wedge b_l \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge da_r) - \sum_{k<l} c_k c_l F(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge b_k \wedge b_l \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge da_r) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

所以 Θ 可唯一地沿着 $\Omega^r(A)$ 分解, 即存在唯一的 A-模同态 $\varphi : \mathfrak{X}^r(M) \to \mathrm{Hom}_A(\Omega^r(A), M)$ 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{\otimes^r}(A) \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\Theta"'] & & \Omega^r(A) \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\
& M &
\end{tikzcd},$$

这里 π 是标准投射. 易见 $\varphi(F)(a_0 da_1 \wedge da_2 \wedge \cdots \wedge da_r) = a_0 F(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n)$, 所以 φ 定义合理. 下面验证 φ 可逆. 作 $\psi : \mathrm{Hom}_A(\Omega^r(A), M) \to \mathfrak{X}^r(M), g \mapsto \psi(g)$, 其中

$$\psi(g) : \wedge_K^r A \to M, a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r \mapsto g(da_1 \wedge da_2 \wedge \cdots \wedge da_r).$$

可直接计算验证 φ 与 ψ 互为逆映射. $\square$

类似于 [推论1.5], 可直接计算验证下述推论.

Corollary 2.2. 设 A 是 K-交换代数, 满足 $\Omega(A)$ 是有限生成投射模 (例如当 A 是域上光滑仿射交换代数时该结论成立). 那么对任何自然数 r, A-模同态 $\Phi:\wedge_A^r \mathrm{Der}_K A\to\mathfrak{X}^r(A), \delta^1\wedge\delta^2\wedge\cdots\wedge\delta^r\mapsto\Phi(\delta^1\wedge\delta^2\wedge\cdots\wedge\delta^r)$, 这里 $\Phi(\delta^1\wedge\delta^2\wedge\cdots\wedge\delta^r)(a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_r)=\sum\limits_{\sigma\in S_r}\mathrm{sgn}(\sigma)\delta_1(a_{\sigma(1)})\delta_2(a_{\sigma(2)})\cdots\delta_r(a_{\sigma(r)})$, 是同构, 且

$$\begin{tikzcd}
\wedge_A^r \mathrm{Der}_K A \arrow[r, "\wedge_A^r\varphi"] \arrow[d, "\Phi"'] & \wedge_A^r \mathrm{Hom}_A(\Omega(A),A) \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathfrak{X}^r(A) \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{Hom}_A(\Omega^r(A),A)
\end{tikzcd}$$

交换, 其中 α 是有限生成投射模取外幂与对偶可交换的标准同构, φ 是来自 [定理2.1] 的同构.

对 K-交换代数 A, 若记

$$\mathfrak{X}^*(A)=\bigoplus_{i=0}^{\infty}\mathfrak{X}^i(A),$$

那么我们可以通过定义

$$\begin{aligned}\wedge:\mathfrak{X}^n(A)\times\mathfrak{X}^m(A)&\to\mathfrak{X}^{m+n}(A)\\ (F,G)&\mapsto F\wedge G,\end{aligned}$$

其中

$$(F\wedge G)(a_1\wedge\cdots\wedge a_{m+n})=\sum_{\sigma\in S_{m,n}}\mathrm{sgn}(\sigma)F(a_{\sigma(1)}\wedge a_{\sigma(2)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(m)})G(a_{\sigma(m+1)}\wedge a_{\sigma(m+2)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(m+n)}),$$

来赋予 $\mathfrak{X}^*(A)$ 上一个二元运算, 可直接验证 $F\wedge G$ 是定义合理的交错多重线性映射, 它明显在每个分量上有导子性质, 故 $F\wedge G\in\mathfrak{X}^{m+n}(A)$. 称 $F\wedge G$ 为交错多重线性导子 $F\wedge G$ 的**外积**. 可直接计算验证交错多重线性导子关于外积是结合的. 于是我们对分次 A-模 $\mathfrak{X}^*(A)$ 的齐次元定义了二元运算, 再线性地扩张可得 $\mathfrak{X}^*(A)$ 上分次代数结构, 即 $(\mathfrak{X}^*(A),\wedge)$ 是分次代数.

Corollary 2.3. 设 A 是 K-交换代数, 满足 $\Omega(A)$ 是有限生成投射模, 那么 $\mathrm{Der}_K A$ 到 $\mathfrak{X}^*(A)$ 的自然嵌入 $\theta:\mathrm{Der}_K A\to\mathfrak{X}^*(A),\delta\mapsto\delta$ 由外代数泛性质诱导出的分次代数同态 $\Theta: E_A(\mathrm{Der}_K A)\to\mathfrak{X}^*(A)$ 是分次代数同构, 并且 Θ 限制在指标 r 处给出的 A-模同构为

$$\Theta(\delta^1\wedge\delta^2\wedge\cdots\wedge\delta^r)(a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_r)=\sum_{\sigma\in S_r}\mathrm{sgn}(\sigma)\delta_1(a_{\sigma(1)})\delta_2(a_{\sigma(2)})\cdots\delta_r(a_{\sigma(r)}).$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Der}_K A \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\theta"'] & E_A(\mathrm{Der}_K A) \arrow[d, dashed, "\Theta"] \\
 & \mathfrak{X}^*(A)
\end{tikzcd}$$

因为此时 Θ 是分次 A-代数同构, 所以 $\mathfrak{X}^r(A)$ 中任何交错多重线性映射都可以表示为形如 $D_1\wedge\cdots\wedge D_r$(这里的外积是交错多重线性映射间的外积运算) 的有限和.

Proof. 根据 [推论2.2], 只需验证代数同态 Θ 限制在指标 $r \in \mathbb{N}$ 处给出的 A-模同态为

$$\Theta(\delta^1 \wedge \delta^2 \wedge \cdots \wedge \delta^r)(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r) = \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma)\delta_1(a_{\sigma(1)})\delta_2(a_{\sigma(2)}) \cdots \delta_r(a_{\sigma(r)}).$$

当 $r = 0, 1, 2$ 时结论明显成立, 一般情形对 $r \geq 1$ 作归纳可计算验证. $\square$

参考文献

[CPV12] L. G. Camille, A. Pichereau, and P. Vanhaecke. *Poisson Structures*. Springer Berlin, 2012.

[Eis04] D. Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Springer Science+Business Media, 2004.

[KZ19] J.L. Koszul and Y.M. Zou. *Introduction to symplectic geometry*. Springer, 2019.

[Lee12] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218. Springer Science & Business Media, 2012.

[Mat70] H. Matsumura. *Commutative algebra*, volume 120. WA Benjamin New York, 1970.

[Nes03] J. Nestruev. *Smooth manifolds and observables*, volume 220. Springer, 2003.