微分形式的 Lie 导数

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 2 月 16 日

设 $\mathcal{M}$ 是光滑流形, $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 是光滑向量场, $f \in C^\infty(\mathcal{M})$. 那么有光滑函数 $Xf : \mathcal{M} \to \mathbb{R}, p \mapsto X_p(f)$, 这使得我们能够观察 f 在每点 p 处沿切向量 X_p 的方向导数关于 p 的变化情况. 例如取 $\mathcal{M} = \mathbb{R}, X = \partial/\partial x$ 是光滑函数的求导算子, 那么 $Xf = \partial f/\partial x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \mapsto (\partial f/\partial x)(a)$. 人们也关心向量场的"方向导数", 为此引入了 Lie 导数的概念来捕捉向量场沿着向量场局部的变化率。对 $V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, 称 $\mathcal{L}_V W = [V, W]$ 是 W 关于 V 的 **Lie 导数** (这里的定义是纯代数的, 通常人们使用的 Lie 导数原始定义需借助向量场的流, 与这里定义的等价性见 [Lee12, p.229, Theorem 9.38]). 下面关心协变张量场, 如果 A 是 $\mathcal{M}$ 上光滑协变 k-张量场, 定义

$$\mathcal{L}_V A : \underbrace{\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \cdots \times \mathfrak{X}(\mathcal{M})}_{k\text{项}} \to C^\infty(\mathcal{M})$$

为 $(\mathcal{L}_V A)(X_1, ..., X_k) = V(A(X_1, ..., X_k)) - A([V, X_1], X_2, ..., X_k) - \cdots - A(X_1, ..., X_{k-1}, [V, X_k]) \in C^\infty(\mathcal{M})$. 因为 $[fX, gY] = f(Xg)Y + g(Yf)X + fg[X, Y], \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}), f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$, 所以对任何光滑函数 f 有 $[V, fX_i] = f[V, X_i] + V(f)X_i$, 由此容易验证 $\mathcal{L}_V A$ 是 k 重 $C^\infty(\mathcal{M})$-线性函数. 所以 $\mathcal{L}_V A$ 唯一确定光滑协变 k-张量场 $\mathcal{L}_V A : \mathcal{M} \to T^k T^* \mathcal{M}, p \mapsto (\mathcal{L}_V A)_p$, 这里 $(\mathcal{L}_V A)_p$ 满足: 对任给切向量 $v_1, ..., v_k \in T_p\mathcal{M}$, 设 $\tilde{X}_i \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 是 v_i 在 $\mathcal{M}$ 上的光滑延拓, 那么 $(\mathcal{L}_V A)_p(v1, ..., v_k) = (\mathcal{L}_V A)(\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_k)(p)$. 称光滑张量场 $\mathcal{L}_V A$ 是张量场 A 关于向量场 V 的 **Lie 导数**. 特别地, 如果 $k = 0$, 那么 $A = f \in C^\infty(\mathcal{M}) = \Gamma(T^0 T^* \mathcal{M})$, 并且有 $\mathcal{L}_V f = Vf$, 所以光滑函数 f 作为协变 0-张量场关于给定向量场 V 的 Lie 导数就是 Vf.

这份笔记主要记录光滑流形上微分形式关于给定向量场的 Lie 导数的基本性质, 主要参考文献是 [Lee12].

1 Cartan 公式

本节固定光滑流形 $\mathcal{M}$ 和光滑向量场 $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. 如果 $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$, 那么 $\mathcal{L}_V \omega$ 明显是交错的, 所以 $\mathcal{L}_V$ 可视作 $\mathbb{R}$-线性变换 $\mathcal{L}_V : \Omega^k(\mathcal{M}) \to \Omega^k(\mathcal{M})$. 于是可线性地延拓为 $\Omega^*(\mathcal{M})$ 上线性变换. 可直接计算验证得到

Lemma 1.1. 设 $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M}), \eta \in \Omega^l(\mathcal{M})$, 则 $\mathcal{L}_V(\omega \wedge \eta) = (\mathcal{L}_V \omega) \wedge \eta + \omega \wedge (\mathcal{L}_V \eta)$.

Remark. 特别地, 对任何 $A, B \in \Omega^*(\mathcal{M})$ 有 $\mathcal{L}_V(A \wedge B) = (\mathcal{L}_V A) \wedge B + A \wedge \mathcal{L}_V B$, 即 $\mathcal{L}_V$ 关于 $\wedge$ 是 $\mathbb{R}$-导子. 因此 $\mathcal{L}_V \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}} \Omega^*(\mathcal{M})$, 是非交换 $\mathbb{R}$-代数上的导子.

Cartan's Magic Formula. 任给 $\mathcal{M}$ 上光滑 k-形式 ω 有 $\mathcal{L}_V\omega = V \lrcorner (d\omega) + d(V \lrcorner \omega)$, 这里 $\lrcorner$ 是向量场和微分形式的内乘法. 如果用 $\iota_V\eta$ 代替 $V \lrcorner \eta(\eta \in \Omega^l(\mathcal{M}))$, 该公式可改写为 $\mathcal{L}_V\omega = \iota_V(d\omega) + d(\iota_V\omega)$.

Proof. 对光滑 k-形式的次数 $k \geq 0$ 作归纳. 当 $k = 0$ 时, $\omega = f \in C^\infty(\mathcal{M})$, 那么

$$V \lrcorner (df) + d(V \lrcorner f) = V \lrcorner (df) = Vf = \mathcal{L}_V(f).$$

假设结论对次数不超过 $k-1(k \geq 1)$ 的微分形式都成立, 那么对光滑 k-形式 ω, 不妨设 $\omega = hdf_1 \wedge \cdots \wedge df_k$, 那么若记 $\beta = hdf_2 \wedge \cdots \wedge df_k$, 则 $\omega = df_1 \wedge \beta$, 这里 $\beta \in \Omega^{k-1}(\mathcal{M})$. 通过 [引理1.1] 以及下面的 [引理1.2] 可知

$$\mathcal{L}_V\omega = \mathcal{L}_V(df_1) \wedge \beta + df_1 \wedge (\mathcal{L}_V\beta) = d(Vf_1) + df_1 \wedge (\mathcal{L}_V\beta).$$

现在对 $(\mathcal{L}_V\beta)$ 应用归纳假设, $(\mathcal{L}_V\beta) = L \lrcorner (d\beta) + d(V \lrcorner \beta)$, 所以 $\mathcal{L}_V\omega = d(Vf_1) \wedge \beta + df_1 \wedge (V \lrcorner (d\beta) + d(V \lrcorner \beta))$. 下面计算 $V \lrcorner (d\omega) + d(V \lrcorner \omega)$, 用 $\omega = df_1 \wedge \beta$ 代入可知

$$V \lrcorner d(df_1 \wedge \beta) + d(V \lrcorner (df_1 \wedge \beta)) = V \lrcorner (-df_1 \wedge d\beta) + d((df_1)(V)\beta - df_1 \wedge (V \lrcorner \beta)),$$

再展开上式得到 $-(Vf_1)d\beta + df_1 \wedge (V \lrcorner d\beta) + d(Vf_1) \wedge \beta + (Vf_1)d\beta + df_1 \wedge d(V \lrcorner \beta)$, 化简便知. $\square$

Lemma 1.2. 设 $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, 则 $\mathcal{L}_V(df) = d\mathcal{L}_V(f)$.

Proof. 任给光滑向量场 X, $\mathcal{L}_V(df)(X) = V(df(X)) - df([V, X]) = XVf = d(Vf)(X) = d(\mathcal{L}_V)(X)$. $\square$

根据 Cartan 公式我们立即得到光滑向量场决定的 Lie 导数算子与外微分算子可交换.

Corollary 1.3. 任给 $\mathcal{M}$ 上光滑 k-形式 ω 有 $d\mathcal{L}_V\omega = \mathcal{L}_V d\omega$.

根据 [推论1.3], Lie 导数 $\mathcal{L}_V : \Omega^k(\mathcal{M}) \to \Omega^k(\mathcal{M})$ 诱导 de Rham 上链复形间的链映射:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^\infty(\mathcal{M}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\mathcal{L}_V"'] & \Omega^1(\mathcal{M}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\mathcal{L}_V"'] & \cdots \arrow[r, "d"] & \Omega^{n-1}(\mathcal{M}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\mathcal{L}_V"'] & \Omega^n(\mathcal{M}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\mathcal{L}_V"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & C^\infty(\mathcal{M}) \arrow[r, "d"] & \Omega^1(\mathcal{M}) \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & \Omega^{n-1}(\mathcal{M}) \arrow[r, "d"] & \Omega^n(\mathcal{M}) \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

特别地, 任给光滑向量场 $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, 它决定的 Lie 导数算子 $\mathcal{L}_V$ 诱导 $\mathcal{M}$ 的 de Rham 上同调群的自同态.

参考文献

[Jac09] N. Jacobson. *Basic algebra II*. Dover Publications, 2nd edition, 2009.

[Lee12] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218. Springer Science & Business Media, 2012.

[Nes03] J. Nestruev. *Smooth manifolds and observables*, volume 220. Springer, 2003.