内乘法, Koszul 微分与截断映射

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 2 月 13 日

光滑流形上光滑向量场与光滑形式的内乘法是微分几何中的经典构造, 流形 $\mathcal{M}$ 上光滑向量场 X 决定的内乘法 ι_X 诱导下述形式的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模复形, 其中 $\Omega^k(\mathcal{M})$ 表示所有光滑 k-形式构成的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \Omega^n(\mathcal{M}) \xrightarrow{\iota_X} \Omega^{n-1}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\iota_X} \cdots \xrightarrow{\iota_X} \Omega^1(\mathcal{M}) \xrightarrow{\iota_X} C^\infty(\mathcal{M}) \longrightarrow 0.$$

这份笔记主要介绍内乘法与 Koszul 复形的联系, 以及内乘法的代数形式推广——截断映射. 光滑向量场与微分形式的内乘法可参见 [Lee12], 外代数与 Koszul 复形的基本性质可参考 [Jac09] 或 [BH98]. 交换代数的多重线性导子以及给定多重线性导子所诱导的截断映射方面的预备知识可参见 [LWW15] 或 [WZ21].

1 内乘法

固定含幺交换环 K. 设 V 是 K-模, 以下将 V 上交错 m 重线性函数构成的 K-模记作 $\mathrm{Alt}^m(V)$, 那么有自然的 K-模同构 $\mathrm{Alt}^m(V) \cong \mathrm{Hom}_K(\wedge^m V, K)$. 因此我们有时不区分 $\mathrm{Alt}^m(V)$ 与 $\mathrm{Hom}_K(\wedge^m V, K)$. 如果进一步 V 是有限生成投射 K-模, 则有标准 K-模同构 $\mathrm{Hom}_K(\wedge^m V, K) \cong \wedge^m \mathrm{Hom}_K(V, K)$.

Definition 1.1. 设 V 是 K-模, $v \in V, m \geq 1$. 定义 K-模同态 $\iota_v : \mathrm{Alt}^m(V) \to \mathrm{Alt}^{m-1}(V)$ 为

$$\iota_v(\omega)(x_1, ..., x_{m-1}) = \omega(v, x_1, ..., x_{m-1}), \forall \omega \in \mathrm{Alt}^m(V).$$

称 ι_v 是 v 诱导的**内乘法**. 通常也将 $\iota_v(\omega)$ 记作 $v \lrcorner \omega$. 当 $m = 0$ 时, 定义 $\iota_v : K \to 0$ 为零同态.

Remark. 注意到 $v \lrcorner (v \lrcorner \omega) = 0$, 所以内乘法诱导下述 K-模复形:

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Alt}^m(V) \xrightarrow{\iota_v} \cdots \xrightarrow{\iota_v} \mathrm{Alt}^1(V) \xrightarrow{\iota_v} K \longrightarrow 0.$$

如果 V 进一步是有限生成投射 K-模, 则有标准同构 $\alpha : \wedge^m \mathrm{Hom}_K(V, K) \to \mathrm{Hom}_K(\wedge^m V, K) \cong \mathrm{Alt}^m(V)$ 满足对任何 $f_1, ..., f_m \in V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ 有

$$\alpha(f_1 \wedge \cdots \wedge f_m)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \mathrm{sgn}(\sigma) f_1(v_{\sigma(1)}) f_2(v_{\sigma(2)}) \cdots f_m(v_{\sigma(m)}).$$

利用此 K-模同构, 内乘法 $\iota_v : \mathrm{Alt}^m(V) \to \mathrm{Alt}^{m-1}(V)$ 可诱导 K-模同态 $\iota_v : \wedge^m \mathrm{Hom}_K(V, K) \to \wedge^{m-1} \mathrm{Hom}_K(V, K)$ (这里仍记作 ι_v), 那么通过直接计算可知内乘法在元素上的作用具有下面引理中的形式.

Lemma 1.2. 设 V 是有限生成投射 K-模, $v \in V$, 利用前述标准同构将 $\wedge^m \mathrm{Hom}_K(V,K)$ 和 $\mathrm{Alt}^m(V)$ 视作等同. 那么对任何 $\omega_1,...,\omega_m \in \mathrm{Hom}_K(V,K)$ 有

$$\iota_v(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m) = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\omega_i(v)\omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega_i} \wedge \cdots \wedge \omega_m.$$

现设 $\mathcal{M}$ 是光滑流形, X 是 $\mathcal{M}$ 上光滑向量场, $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$, 那么通过定义 $(X \lrcorner \omega)_p = X_p \lrcorner \omega_p, \forall p \in \mathcal{M}$ 可得光滑 $(k-1)$-形式 $X \lrcorner \omega$, 称为 X 与 ω 的**内乘法**. 也记 $X \lrcorner \omega$ 为 $\iota_X(\omega)$, 那么 $\iota_X : \Omega^k(\mathcal{M}) \to \Omega^{k-1}(\mathcal{M})$ 明显是 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同态并且 $\iota_X^2 = 0$. 因此我们得到 $C^\infty(\mathcal{M})$-模复形

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \Omega^n(\mathcal{M}) \xrightarrow{\iota_X} \Omega^{n-1}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\iota_X} \cdots \xrightarrow{\iota_X} \Omega^1(\mathcal{M}) \xrightarrow{\iota_X} C^\infty(\mathcal{M}) \longrightarrow 0.$$

通过 [引理1.2] 可直接计算得到对任何光滑 1-形式 $\omega_1,...,\omega_k$ 有

$$\iota_X(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k) = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\omega_j(X)\omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega_j} \wedge \cdots \wedge \omega_k.$$

再结合 $C^\infty(\mathcal{M})$ 上分次代数同构 $E(\Omega^1(\mathcal{M})) \cong \Omega^*(\mathcal{M}) = \oplus_{k=0}^{\infty}\Omega^k(\mathcal{M})$, 这里 $E(\Omega^1(\mathcal{M}))$ 表示 $C^\infty(\mathcal{M})$-模 $\Omega^1(\mathcal{M})$ 决定的外代数, 可得下述 $C^\infty(\mathcal{M})$-模复形:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \wedge^n_{C^\infty(\mathcal{M})}\Omega^1(\mathcal{M}) \xrightarrow{\iota_X} \wedge^{n-1}_{C^\infty(\mathcal{M})}\Omega^1(\mathcal{M}) \xrightarrow{\iota_X} \cdots \xrightarrow{\iota_X} \Omega^1(\mathcal{M}) \xrightarrow{\iota_X} C^\infty(\mathcal{M}) \longrightarrow 0,$$

这里依旧保留记号 ι_X, 我们依然有 $\iota_X(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k) = \sum\limits_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\omega_j(X)\omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega_j} \wedge \cdots \wedge \omega_k$.

2 Koszul 复形

本节固定含幺交换环 K, 将 K-模 M 决定的外代数记作 $E(M)$. 如果记 B 是张量代数 $T(M)$ 中由集合 $\{x \otimes x | x \in M\}$ 生成的理想, 那么 $E(M) = T(M)/B$ 且 $B \cap M = \{0\}$, 映射 $i_M : M \to T(M)/B, x \mapsto x + B$ 是单 K-模同态. 在给出 Koszul 复形定义前先回顾反导子的概念.

Definition 2.1 (对合同态, 反导子)**.** 对 K-模同态 $M \to E(M), x \mapsto -x$, 由外代数泛性质知导出唯一的 K-代数同态 $l : E(M) \to E(M)$, 称为 $E(M)$ 上**对合同态**. 对 $a \in E(M)$, 记 $l(a)$ 为 $\overline{a}$. 若 K-模同态 $D : E(M) \to E(M)$ 满足对任给 $a, b \in E(M)$ 有 $D(ab) = D(a)b + \overline{a}D(b)$, 则称 D 是 $E(M)$上的一个**反导子**.

要定义任何 K-模同态 $f : M \to K$ 决定的 Koszul 复形, 我们需要下面的反导子延拓性质.

Lemma 2.2. 设 $i_M : M \to E(M)$ 是标准嵌入, 如果 K-模同态 $f : M \to E(M)$ 满足 $f(x)i_M(x) = i_M(x)f(x), \forall x \in M$, 那么存在唯一的反导子 $D : E(M) \to E(M)$使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[dr, "f"'] & E(M) \arrow[d, dashed, "D"] \\ & E(M) \end{tikzcd}$$

即若模同态 $f : M \to E(M)$ 满足每个 $x \in M$ 在 f 下的像与在 i_M 下的像在 $E(M)$ 中可交换, 则可将 f 延拓至 $E(M)$ 上.

Proof. 仅证 D 的存在性 (唯一性由反导子定义易证). 作矩阵代数 $A = \mathrm{M}_2(E(M))$ 以及 K-模同态

$$h : M \to A, x \mapsto \begin{pmatrix} i_M(x) & 0 \\ f(x) & -i_M(x) \end{pmatrix},$$

则 $h(x)^2 = 0, \forall x \in M$, 所以存在唯一的 K-代数同态 $\overline{h} : E(M) \to E(M)$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[dr, "h"'] & E(M) \arrow[d, dashed, "\overline{h}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

对上述代数同态 $\overline{h} : E(M) \to A, \overline{h}(x + B) = \begin{pmatrix} x + B & 0 \\ f(x) & -x + B \end{pmatrix}$ 表明对任何 $a \in E(M)$, $\overline{h}(a)$ 形如

$$\overline{h}(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ D(a) & \overline{a} \end{pmatrix},$$

这定义出映射 $D : E(M) \to E(M)$, 并且由 $\overline{h}$ 是代数同态可得 D 是反导子 (验证它). □

现在我们取特殊的 K-模同态 $\delta : M \to E(M)$ 满足 $\delta(x)i_M(x) = i_M(x)\delta(x), \forall x \in M$：任给 K-模同态 $f : M \to K$(即 M 上 K-线性函数), 它诱导 K-模同态 $\delta : M \to E(M), x \mapsto f(x)1_{E(M)}$. 于是由 [引理2.2] 得 δ 导出反导子 $D : E(M) \to E(M)$ 使得 $Di_M = \delta$. 那么反导子 D 明显满足 $D(\wedge^1 M) \subseteq K1_{E(M)}$, 归纳地容易证明 $D(\wedge^r M) \subseteq \wedge^{r-1}M, \forall r \geq 1$. 下面我们来搞清楚 D 在每个外幂 $\wedge^r M$ 上是怎么作用的.

Lemma 2.3. 设反导子 $D : E(M) \to E(M)$ 是由 K-模同态 $f : M \to K$ 所诱导的, 则对每个正整数 r有

$$D(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} f(v_i) v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_r, \forall v_1, ..., v_r \in M.$$

Proof. 当 $r = 1$ 时, 由反导子 D 的定义即得结果. 假设结论对 $r - 1(r \geq 2)$ 的情形成立, 则 $D(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = D(v_1)(v_2 \wedge \cdots \wedge v_r) - v_1 \wedge D(v_2 \wedge \cdots \wedge v_r) = f(v_1)v_2 \wedge \cdots \wedge v_r - v_1 \wedge D(v_2 \wedge \cdots \wedge v_r)$, 对 $D(v_2 \wedge \cdots \wedge v_r)$ 应用归纳假设并代入上式整理即得结论. □

下面我们来说明对任给 K-模同态 $f : M \to K$, 它能诱导出下述形式的复形：

$$\cdots \longrightarrow \wedge^3 M \longrightarrow \wedge^2 M \longrightarrow M \xrightarrow{f} K \longrightarrow 0$$

也就是之后要定义的 Koszul 复形. 模同态 $f : M \to K$ 所诱导的反导子 $D : E(M) \to E(M)$ 满足 $D(\wedge^r M) \subseteq \wedge^{r-1}M, \forall r \geq 1$(在 [引理2.3] 中我们看到了 D 在每个分次上是如何作用的). 所以我们可以通过 D 在每个外幂 $\wedge^r M$ 上的作用来给出复形的边缘映射：

$$d_r : \wedge^r M \to \wedge^{r-1}M, a \mapsto D(a), \forall r \geq 3.$$

因为 $\wedge^1 M \cong M$ 即便同构作为模可视作等同, 集合层面还是有区别, 这里额外定义 $d_2 : \wedge^2 M \to M, a \mapsto \xi D(a)$, 这里 $\xi : \wedge^1 M \to M, x + B \mapsto x$ 是 K-模同构. 那么我们得到了模同态序列：

$$\cdots \longrightarrow \wedge^3 M \xrightarrow{d_3} \wedge^2 M \xrightarrow{d_2} M \xrightarrow{f} K \longrightarrow 0.$$

因为 [引理2.3] 让直接处理 d_i 的计算成为了可能 (例如对任何 $x_1, x_2 \in M$ 有 $d_2(x_1 \wedge x_2) = f(x_1)x_2 - f(x_1)x_2$ 来得到 $fd_2 = 0$), 所以我们可以利用 [引理2.3] 来直接计算验证 $d_i d_{i+1} = 0, \forall i \geq 2$. 也可以借助反导子的定义, 规避完全硬算来证明这一事实：

Lemma 2.4. 对上述定义的 K-模同态 $d_r : \wedge^r M \to \wedge^{r-1} M$, 有 $d_r d_{r+1} = 0, \forall r \geq 2$.

Proof. 证明分两步, 先说明对 K-模同态 $f : M \to K$ 所诱导的反导子 D 满足 $Dl + lD = 0$, 这里 l 是对合同态 (回忆 [定义2.1]), 再利用该关系对 $r \geq 2$ 归纳地证明结论.

Step1. 先考察反导子在外代数单位元上的作用, 直接计算 $D(1_{E(M)}) = D(1_{E(M)}) + \overline{1_{E(M)}}D(1_{E(M)}) = 2D(1_{E(M)})$. 这一观察说明 $D(\wedge^0 M) = D(K1_{E(M)}) = 0$(也反映了 $D^2(a) = 0, \forall a \in \wedge^1 M$). 对 $x \in M$, 有 $D(x + B) = f(x)1_{E(M)} = -D(-x + B)$, 于是 $\overline{D(a)} = -D(\overline{a}), \forall a \in \wedge^1 M$. 归纳地可以证明 $\overline{D(a)} = -D(\overline{a}), \forall a \in \wedge^r M, \forall r \geq 1$(验证它), 所以 $\overline{D(a)} = -D(\overline{a}), \forall a \in E(M)$. 这也就是 $lD + Dl = 0$.

Step2. 先处理 $r = 2$ 的情形, 直接计算得到 $D^2(x \wedge y) = 0, \forall x, y \in M$, 从而 $D^2(\wedge^2 M) = 0$. 要证 $D^2(\wedge^3 M) = 0$, 只要证 $D^2(x \wedge y \wedge z) = 0, \forall x, y, z \in M$. 为此我们说明 $D^2(ab) = 0, \forall a \in \wedge^2 M, b \in \wedge^1 M$. $D^2(ab) = D(D(a)b + l(a)D(b)) = lD(a)D(b) + Dl(a)D(b) = [lD(a) + Dl(a)]D(b) = 0$. 假设结论对 $r-1(r \geq 3)$ 的情形成立, 要证明 r 的情形, 与 $r = 2$ 类似只需要验证 $D^2(ab) = 0, \forall a \in \wedge^{r-1} M, \wedge^1 M$ 就足够了, 验证过程与 $r = 2$ 的情形完全相同, 留给读者练习. □

有了上述引理, 现在可以正式地给出 Koszul 复形的定义.

Definition 2.5 (线性函数决定的 Koszul 复形)**.** 设 K 是含幺交换环, M 是 K-模, $f : M \to K$ 是模同态, 将前面的讨论所定义出的 K-模复形

$$\cdots \longrightarrow \wedge^3 M \xrightarrow{d_3} \wedge^2 M \xrightarrow{d_2} M \xrightarrow{f} K \longrightarrow 0$$

称为由 f 决定的 **Koszul 复形**, 将该复形记作 $\mathcal{K}(f)$(有时为了不引起混淆将它的边缘映射记为 d_f).

那么通过 [引理1.2] 和 [引理2.3] 我们马上看到对光滑流形 $\mathcal{M}$ 以及光滑向量场 X, $C^\infty(\mathcal{M})$-模复形

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \wedge^n_{C^\infty(\mathcal{M})}\Omega^1(\mathcal{M}) \xrightarrow{\iota_X} \wedge^{n-1}_{C^\infty(\mathcal{M})}\Omega^1(\mathcal{M}) \xrightarrow{\iota_X} \cdots \xrightarrow{\iota_X} \Omega^1(\mathcal{M}) \xrightarrow{\iota_X} C^\infty(\mathcal{M}) \longrightarrow 0$$

就是 $\Omega^1(\mathcal{M})$ 上的 $C^\infty(\mathcal{M})$-线性函数 $X^{**} : \Omega^1(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M}), \omega \mapsto \omega(X)$(光滑向量场 X 诱导的赋值映射) 决定的 Koszul 复形! 所以光滑向量场 X 决定的内乘法映射 ι_X 本质上就是赋值映射 X^{**} 诱导的 Koszul 微分.

3　截断映射

本节固定含幺交换环 K 以及 K-交换代数 A. 记 $\Omega^k(A)$ 是所有 Kähler k-形式构成的 A-模, $\mathfrak{X}^k(A) = \{F \in \mathrm{Hom}_K(\wedge^k_K A, A) | F\text{在每个分量上是}K\text{-导子}\}$ 为 A 到 A 的交错 k-线性导子全体. 当 $k = 1$ 时, $\mathfrak{X}^1(A) = \mathrm{Der}_K(A)$ 是 A 的导子模, 它是向量场模的代数推广 (因为对光滑流形 $\mathcal{M}$, $\mathbb{R}$-交换代数 $C^\infty(\mathcal{M})$ 的导子模与 $\mathcal{M}$ 上光滑向量场全体 $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 是 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构的). 对每个交错 p-线性导子 $F \in \mathfrak{X}^p(A)$, 可通过高次 Kähler 微分模泛性质诱导出唯一的 A-模同态 $\iota_F : \Omega^*(A) \to \Omega^*(A)$ 满足当 $q \geq p$ 时 $\iota_F : \Omega^q(A) \to \Omega^{q-p}(A)$ 将 $da_1 \wedge da_2 \wedge \cdots \wedge da_q$ 映至

$$\sum_{\sigma \in S_{p,q-p}} \mathrm{sgn}(\sigma) F(a_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge a_{\sigma(p)}) da_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge da_{\sigma(q)},$$

其中 $S_{p,q-p}=\{\sigma\in S_q|\sigma(1)<\sigma(2)<\cdots<\sigma(p),\sigma(p+1)<\cdots<\sigma(q)\}$ 是所有 $(p,q-p)$-shuffles 构成的集合(一般地, 所有 (n,m)-shuffles 构成的集合有 C_{m+n}^m 个元素). 当 $q<p$ 时, $\iota_F:\Omega^q(A)\to\Omega^{q-p}(A)$ 定义为零同态. 这里

$$\Omega^*(A)=\bigoplus_{i=0}^{\infty}\Omega^i(A).$$

将上述次数为 $-p$ 的 A-模同态 $\iota_F:\Omega^*(A)\to\Omega^*(A)$ 称为由线性导子 F 所诱导的**截断映射**.

Example 3.1. 如果 $F=a\in A$(此时 $p=0$), 那么截断映射 $\iota_F:\Omega^*(A)\to\Omega^*(A)$ 就是由 a 诱导的左乘变换.

Example 3.2. 如果 $F\in\mathfrak{X}^1(A)$, 那么截断映射 $\iota_F:\Omega^k(A)\to\Omega^{k-1}(A)$ 满足

$$\iota_F(da_1\wedge\cdots\wedge da_k)=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}F(a_i)da_1\wedge\cdots\hat{da_i}\wedge\cdots\wedge da_k.$$

利用标准 A-模同构 $\mathfrak{X}^1(A)\cong\mathrm{Hom}_A(\Omega^1(A),A)$, 记 d 为泛导子 $d:A\to\Omega^1(A)$, 那么存在唯一的 A-模同态 θ 使得 $F=\theta d$, 对每个 $\omega\in\Omega^1(A)$, 记 $F\cdot\omega=\theta(\omega)$, 那么在此记号下, 有

$$\iota_F(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k)=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}(F\cdot\omega_i)\omega_1\wedge\cdots\hat{\omega}_i\wedge\cdots\wedge\omega_k.$$

结合给定光滑流形向量场所决定的内乘法在光滑 1-形式外积上的作用可知截断映射是内乘法的形式推广.

参考文献

[BH98] W. Bruns and H. Herzog. *Cohen-macaulay rings.* Number 39. Cambridge university press, 1998.

[Jac09] N. Jacobson. *Basic algebra II.* Dover Publications, 2nd edition, 2009.

[Lee12] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218. Springer Science & Business Media, 2012.

[LWW15] J. Luo, S.-Q. Wang, and Q.-S. Wu. Twisted poincaré duality between poisson homology and poisson cohomology. *Journal of Algebra*, 442:484–505, 2015.

[Nes03] J. Nestruev. *Smooth manifolds and observables*, volume 220. Springer, 2003.

[WZ21] Q.-S. Wu and R.-P. Zhu. Nakayama automorphisms and modular derivations in filtered deformations. *Journal of Algebra*, 572:381–421, 2021.