模的内射包

戚天成

2024 年 4 月 16 日

这份笔记本意是想整理一下一个模 M 的极小内射分解到 M 的任何一个内射分解有单链映射的证明 (见 [命题1.16]), 后面又补充了任何模的内射分解可以分解为该模一个极小内射分解与某个正合复形直和的证明 (见 [定理1.18]). 记录这两个基本命题的证明主要是担心自己过两年不用会忘记证明细节 (哪怕当下觉得不难). 其余内容均为证明"交换 Noether 局部环是 Gorenstein 环的充要条件是它是 type 为 1 的 Cohen-Macaulay 环"这一结论证明的前置基础, 刚好可以顺着极小内射分解讲, 所以我就用这份 $\TeX$ 文件记录了. 如无特别说明, 该笔记中环 R 有乘法单位元 $1_R \neq 0$. 如果大家看到错误或笔误请告诉我, 谢谢.

目录

1 模的内射包

1.1 基本性质

回忆一个左 R-模 M 的**本质子模** (essential submodule)N 是指对 M 的任何非零子模 N' 有 $N \cap N' \neq 0$ 的模. 如果 N 是 M 的本质子模, 那么记作 $N \trianglelefteq_e M$, 这时也称 M 是 N 的**本质扩张** (essential extension). 如果 M 是 N 的本质扩张且 $M \neq N$, 称该扩张是**真本质扩张**. 如果本质扩张 $E \supseteq M$ 满足不存在 M 的本质扩张 E' 使得 $E \subsetneq E'$, 则称本质扩张 $E \supseteq M$ 是**极大的** (maximal). 如果单模同态 $i : N \to M$ 满足 $\mathrm{Im}i$ 是 M 的本质子模, 称 i 是**本质单同态**.(essential monomorphism). 根据本质子模的定义, 我们看到: 对 M 的子模 N, N 是本质子模的充要条件是对每个 $x \neq 0 \in M$, 存在 $r \in R$ 使得 $rx \neq 0 \in N$.

Example 1.1. 回忆**素环** (prime ring) 是指零理想是素理想的环. 设 R 是素环, I 是非零理想, 则 ${}_RI \trianglelefteq_e {}_RR$.

证明: 任给非零左理想 J, 有 $0 \neq IJ \subseteq I \cap J$, 故 I 是本质子模. □

Example 1.2. 设 R 是含幺环, M 是左 R-模, 如果 $N \trianglelefteq_e M$, 那么对 M 的任何子模 X, $N \cap X \trianglelefteq_e X$.

下述命题给出了作商保持本质扩张的一个条件.

Proposition 1.3. 设 R 是含幺环, $E \supseteq M \supseteq N$ 是左 R-模链, 满足 $M \trianglelefteq_e E, N$ 是 E 的直和因子, 则 $M/N \trianglelefteq_e E/N$. 即对本质扩张 $M \trianglelefteq_e E$, 如果同时商掉的小模 M 的子模 N 是大模 E 的直和因子, 则商模链 $M/N \subseteq E/N$ 仍是本质扩张.

证明: 因为 N 是 E 的直和因子, 可设 E 的子模 L 使 $E = N \oplus L$. 下证 M/N 是 E/N 的本质子模, 为此, 任取 E/N 的子模 X/N(这里 $N \subseteq X$ 是 E 的子模), 并设 $X/N \cap M/N = 0$, 即 $X \cap M = N$, 我们需要说明 $X = N$. 首先根据 $E = N \oplus L$ 得到 $X = N \oplus (X \cap L)$, 再由 $X \cap M = N$ 得到 $N = X \cap M = N \oplus (X \cap L \cap M)$, 这迫使 $X \cap L \cap M = 0$. 另一方面, $M \trianglelefteq_e E$ 表明 $M \cap L \trianglelefteq_e L$, 故 $X \cap L = 0$, 这也说明 $X = N$. □

Example 1.4. 设 V 是域 k 上非零线性空间, 因为任何子空间有直和补, 所以 V 的本质子空间只有 V.

根据本质子模的定义我们看到本质子模的本质子模仍是本质子模, 或者说本质扩张的本质扩张仍本质.

Lemma 1.5 (本质扩张的传递性)**.** 设 ${}_RM$ 有本质子模 N, N 有本质子模 P, 则 P 是 M 的本质子模.

证明: 任取 M 的子模 $X \neq 0$, 则 $X \cap N \neq 0$, 所以 $X \cap N \cap P \neq 0$. 特别地, $X \cap P \neq 0$. □

对每个模 M, M 自身总是本质子模. 下面我们用本质单同态的概念给内射模一个刻画.

Proposition 1.6. 设 ${}_RQ$ 是模, 则 Q 是内射模的充要条件是每个本质单同态 $i : Q \to M$ 是同构. 特别地, 一个模 Q 是内射模的充要条件是 Q 没有真的本质扩张.

证明: 必要性：设 Q 是内射模, 则任何本质单同态 $i : Q \to M$ 满足存在同态 $p' : M \to Q$ 使得 $ip' = \mathrm{id}_M$, 从而 $M = \mathrm{Im}i \oplus \mathrm{Ker}p'$, 再利用 $i(Q)$ 是本质子模得到 $\mathrm{Ker}p' = 0$, 即同态 i 是满射, 故本质单同态 i 是同构.

充分性：由于任何模可嵌入某内射模, 设 $Q_0 \supseteq Q$ 是内射模. 设 S 是 Q_0 中全体与 Q 相交为零的子模全体, 易知 $(S, \subseteq)$ 任何全序子集有上界, 应用 Zorn 引理可得 S 有极大元 N, 那么 $j : Q \to Q_0/N$ 是本质单同态, 所以根据条件得到 j 是满射, 从而 $Q_0 = Q \oplus N$, 那么 Q 作为内射模的直和因子仍内射.

本命题阐述的第二个事实就是前面证明等价命题的重述. 如果 Q 是内射模, 那么每个本质扩张对应一本质单同态, 由该本质单同态是同构便得 Q 没有真本质扩张. 反之, 若 Q 没有真本质扩张, 那么用反证法易得不存在不是同构的本质单同态 $i : Q \to M$(否则会产生 Q 的真本质扩张), 那么也就得到了 Q 是内射模. □

任给本质单同态 $j : Q \to N$ 与单同态 $k : Q \to Q_0$, 只要 Q_0 是内射模, 就存在单同态 $l : N \to Q_0$ 使得 $k = lj$. 由此马上看到下述结果.

Lemma 1.7. 任何模 ${}_RM$ 都存在本质嵌入 $i : M \to Q$ 使得 Q 是内射模. 故任何模有极大本质扩张.

证明: 取含 M 的内射模 Q_0, 并作 $S = \{N \subseteq Q_0 | M \trianglelefteq_e N\}$, 则 $M \in S$ 并且易验证 $(S, \subseteq)$ 满足 Zorn 引理条件, 故由 Zorn 引理, 存在 $(S, \subseteq)$ 中极大元 Q, 从而 $i : M \to Q$ 是本质单同态, 下证 Q 是内射模. 只需说明任何本质单同态 $k : Q \to L$ 是同构, 记 $j : Q \to Q_0$ 是标准嵌入. 首先存在单同态 $l : L \to Q_0$ 使得 $lk = j$, 于是 $M \trianglelefteq_e Q, k(Q) \trianglelefteq_e L$ 且 $Q = j(Q) \trianglelefteq_e l(L)$, 所以由 Q 的极大性保证了 $l(L) = Q = lk(Q)$, 所以 $L = k(Q)$, 即 k 是同构, 从而 Q 是内射模. 所以存在本质单同态 $i : M \to Q$ 使得 Q 是内射模. 事实上根据前面的证明过程, 得到了内射模 Q 使得 M 是 Q 的本质子模, 而内射模没有真本质扩张, 故 Q 自然是 M 的极大本质扩张. □

Theorem 1.8. 设 M 是 I 的子模, 则以下三条等价：
(1)I 是 M 的极大本质扩张.
(2)I 是内射模且为 M 的本质扩张.
(3)I 是包含 M 的极小内射模.

证明: (1)⇒(2): 取 Q 是包含 I 的内射模, 使得 I 是 Q 的本质子模, 那么 Q 是 M 的本质扩张, 由 I 的极大性得到 $I = Q$ 是内射模. 所以 I 是内射模且为 M 的本质扩张.

(2)⇒(3): 如果 I 有内射子模 I' 使得 $M \subseteq I' \subsetneq I$, 那么由 I' 是内射模知 I' 是 I 的直和因子, 从而 M 不是 I 的本质子模, 矛盾. 所以 I 是包含 M 的极小内射模.

(3)⇒(1): 根据 [引理1.7] 的证明过程得到 I 存在内射子模 Q 使得 $M \trianglelefteq_e Q$. 于是由 I 的极小性得到 $Q = I$, 因此 I 是 M 的本质扩张, 那么它自然是极大本质扩张. □

Definition 1.9. 设 ${}_RM$ 是 ${}_RI$ 的子模, 如果 I 满足 [定理1.8] 中任何一条, 称 I 是 M 的**内射包** (injective hull), 记为 $E(M)$. 内射包最早由 Beno Eckmann(瑞士, 1917-2008, Hopf 学生) 与 A. Schopf 于 1953 年引入.

[引理1.7] 说任何模的内射包都存在, 内射包也有下述同构唯一性.

Corollary 1.10. 设 I, I' 都是 M 的内射包, 则有 $I \cong I'$. 一般这一同构映射不唯一.

证明: 这时存在单同态 $g : I' \to I$ 使下图交换. 故 $g(I')$ 是包含 M 但含于 I 的内射模, 由 I 极小性得 g 满.

$$\begin{tikzcd} & & I \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "j"'] & I' \arrow[u, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

□

在本节的最后我们说明交换 Noether 环上模取内射包与关于某个乘闭子集作局部化可交换.

Lemma 1.11. 设 R 是交换 Noether 环, S 是乘闭子集, Q 是内射 R-模, 则 Q_S 是 R_S-内射模.

证明: 由 Q 是内射模可知对任何模 N 有 $\mathrm{Ext}^i_R(N, Q) = 0, \forall i \geq 1, N \in \mathrm{ob}R\text{-Mod}$. 对任何理想 I, 取 $N = R/I$ 并将 Ext 模关于 S 作局部化可知 $\mathrm{Ext}^i_{R_S}(R_S/I_S, Q_S) = 0, \forall i \geq 1$. 因为 R_S 的理想总具备 I_S 的形式, 所以利用 $\mathrm{Ext}^1_{R_S}(R_S/I_S, Q_S) = 0$ 以及 Baer 判别法即得 Q_S 的内射性. □

Remark 1.12. 当 Noether 条件去掉结论一般不再成立, 反例见 Everett C Dade, Localization of injective modules, Journal of Algebra, Volume 69, Issue 2, 1981(416-425).

根据上述引理我们可以得到：

Proposition 1.13. 设 R 是交换 Noether 环, S 是乘闭子集, R-模 M 有内射包 $E_R(M)$, 则作为 R_S-模有同构 $(E_R(M))_S \cong E_{R_S}(M_S)$. 即取内射包和作局部化可交换.

证明: 设 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} E_R(M)$ 是本质单同态, 只需说明 $0 \longrightarrow M_S \xrightarrow{i_S} (E_R(M))_S$ 也是本质单同态即可. 任取非零元 $x/s \in (E_R(M))_S$, 我们需要说明 $R_Sx/s \cap i_S(M_S) \neq 0$. 易见只要验证 $s = 1$ 的情形就足够了, 作理想集 $T = \{\mathrm{ann}_R(tx) | t \in S\}$, 那么由 R 是 Noether 环知 T 中有极大元 $\mathrm{ann}_R(tx)$, 易见 $tx \neq 0$.

Claim. $R_S(tx/1) \cap i_S(M_S) \neq 0$. 于是 $(E_R(M))_S \supseteq i_S(M_S)$ 是本质扩张. 假设 $R_S(tx/1) \cap i_S(M_S) = 0$. 因为 $Rtx \cap i(M) = Itx \neq 0$, I 是 R 的理想, 并设 $a_1, ..., a_n \in I$ 使得 $I = (a_1, ..., a_n)$, 所以每个 $a_i tx/1 = 0$, 进而存在 $u \in S$ 使得 $uta_i x = 0, \forall 1 \leq i \leq n$. 由此我们看到 $I \subseteq \mathrm{ann}_R(uxt) = \mathrm{ann}_R(tx)$(这里使用了 $\mathrm{ann}_R(tx)$ 的极大性), 于是 $Itx = 0$, 得到矛盾. 故 $R_S(tx/1) \cap i_S(M_S) \neq 0$, 断言得证. $\square$

Exercise 1. 设 R, T 是含幺环, $\alpha: R \to T$ 是保幺环同态, 利用 α 可将任何 T-模视作 R-模. 证明：若 ${}_RT$ 平坦, 则任何内射右 T-模作为右 R-模仍内射. 特别地, 对任何含幺交换环 R 和乘闭子集 S, 内射 R_S-模作为 R-模仍内射.

Exercise 2. 设 R 是交换整环, F 是 R 的商域, 证明：F 是 ${}_RR$ 的内射包.

Exercise 3. 设 R 是含幺环, S 是右分母集, 证明：任何内射右 R_S-模作为右 R-模内射.

Exercise 4. 设 R 是含幺环, S 是右分母集. 称右 R-模 M 是 S-无挠的, 如果 $t_S(M) = \{x \in M | 存在某个 s \in S 使得 xs = 0\} = 0$. 证明：若内射右 R-模 M 是 S-无挠的, 则 M_S 作为右 R_S-模仍内射.

Exercise 5. 举例说明对含幺交换 Noether 环 R 以及乘闭子集 S, 内射 R-模未必 S-无挠.

1.2 极小内射分解

回忆左 R-模 M 的**内射分解**是形如

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} D^0 \xrightarrow{d^0} D^1 \longrightarrow \cdots$$

且每个 D^j 是内射模的正合复形. 若 M 是内射分解 (D, d, η) 满足 D^0 是 M 的内射包 (一般地, η 是本质单同态), D^{i+1} 是 $\mathrm{Im}d^i = \widetilde{d^i}(D^i/\mathrm{Ker}d^i)$ 的内射包, 称该内射分解是 M 的**极小内射分解** (minimal injective resolution). 因为任何模有内射包, 所以递归地可构造任何模的极小内射分解.

Proposition 1.14 (极小内射分解存在性)**.** 任何模 ${}_RM$ 有极小内射分解.

证明: 取定 M 的内射包 $E(M)$, 有正合列 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} E(M)$, 对 $\mathrm{Coker}i = E(M)/\mathrm{Im}i$, 考虑其内射包作正合列

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & E(M) \arrow[rr, dashed, "d^0"] \arrow[dr] & & E(\mathrm{Coker}i) \\ & & & \mathrm{Coker}i \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

递归地便得到 M 的一个极小内射分解. $\square$

极小内射分解自然有同构唯一性.

Lemma 1.15. 设 ${}_RM$ 有极小内射分解 $(I, d, i), (J, h, j)$, 则对任何使下图交换的链映射 $\alpha: (I, d) \to (J, h)$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"'] & I^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\alpha^0"] & I^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "\alpha^1"] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] & J^0 \arrow[r, "h^0"] & J^1 \arrow[r, "h^1"] & \cdots \end{tikzcd}$$

有每个 α^k 是同构. 回忆比较引理保证了这样的链映射 α 总存在.

证明: 因为 $i: M \to I^0$ 是本质单同态切 J^0 是内射模, 所以 α^0 是单射, 从而由 $\alpha^0(I^0) \supseteq M$ 是内射模以及内射包的极小性得到 $\alpha^0(I^0) = J^0$, 因此 α^0 是同构. 因为 α^0 是同构, 所以下图中的同态 $\widetilde{\alpha^0}$ 自然也是同构.

$$\begin{tikzcd}
 & & I^0 \arrow[rr, "d^0"] \arrow[dll, "\alpha^0"'] \arrow[dr] & & I^1 \arrow[dll, "\alpha^1"'] \\
J^0 \arrow[rr, "h^0"] \arrow[dr] & & J^1 & I^0/\mathrm{Ker}d^0 \arrow[ur, "\widetilde{d^0}"'] \arrow[dll, "\widetilde{\alpha^0}"] & \\
 & J^0/\mathrm{Ker}h^0 \arrow[ur, "\widetilde{h^0}"] & & &
\end{tikzcd}$$

因为嵌入 $0 \longrightarrow I^0/\mathrm{Ker}d^0 \xrightarrow{\widetilde{d^0}} I^1$ 是本质单同态, $\widetilde{h^0}\widetilde{\alpha^0}$ 单且 J^1 是内射模, 所以 α^1 是单射. 注意到 $\alpha^1(I^1)$ 是包含 $\widetilde{h^0}(J^0/\mathrm{Ker}h^0)$ 的内射模, 所以由内射包极小性可知 $\alpha^1(I^1) = J^1$, 故 α^1 是同构. 最后归纳地我们得到每个 α^k 都是同构. $\square$

通过这一观察我们可以证明模 M 的任何一个极小内射分解到内射分解都有单链映射.

Proposition 1.16. 设 $_RM$ 有极小内射分解 (E, d, i) 与内射分解 (I, h, j), 那么存在链映射 $\beta: (E, d) \to (I, h)$ 使得每个同态 β^k 是单射. 特别地, 极小内射分解是长度最短的内射分解.

证明: 根据比较引理, 存在链映射 $\beta: (E, d) \to (I, h)$ 使得 $\beta^0 i = j$ 以及链映射 $\gamma: (I, h) \to (E, d)$ 使得 $\gamma^0 j = i$. 所以 $\gamma\beta: (E, d) \to (E, d)$ 是使得下图交换的链映射

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"'] & E^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\gamma^0\beta^0"] & E^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "\gamma^1\beta^1"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & E^0 \arrow[r, "d^0"] & E^1 \arrow[r, "d^1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

所以应用上面的引理得到每个 $\gamma^k\beta^k$ 是同构. 特别地, 每个 β^k 是单射, 故 β 就是满足条件的链映射. $\square$

通过上述命题直接得到下述推论. 下面是另一种证明方式, 思路由陈旭阳提供.

Corollary 1.17. 任何模的极小内射分解长度给出该模的内射维数.

证明: 如果模的内射维数是 $+\infty$, 结论直接成立. 下设 $\mathrm{inj.dim}_R M = n$. 任取 M 的极小内射分解

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} D^0 \xrightarrow{d^0} D^1 \longrightarrow \cdots,$$

则有正合列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} D^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \longrightarrow D^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}|} \mathrm{Im}d^{n-1} \longrightarrow 0,$$

因为 M 的内射维数是 n, 所以上述复形中模 $\mathrm{Im}d^{n-1}$ 是内射模. 由此可得 $\widetilde{d^{n-1}}(D^{n-1}/\mathrm{Ker}d^{n-1}) = \mathrm{Im}d^{n-1}$ 是内射模. 进而由 D^n 是 $\mathrm{Im}d^{n-1}$ 的内射包得到 $D^n = \mathrm{Im}d^{n-1}$, 所以 $D^j = 0, \forall j \geq n+1$, 得证. $\square$

现在我们给出本节主要定理的证明, 它表明模的每个内射分解已经承载了极小内射分解的所有信息.

Theorem 1.18. 设 $_RM$ 有内射分解 (I, h, j), 那么存在 M 的极小内射分解与一个正合复形使得 (I, h, i) 是这两个复形的直和.

证明: 取定 M 的一个极小内射分解 (E,d,i), 根据 [命题1.16] 的证明过程中由比较引理诱导的链映射 $\beta:(E,d)\to(I,h)$ 与 $\gamma:(I,h)\to(E,d)$, 有 $\gamma\beta$ 是链同构. 因此对链映射 $\beta:(E,d)\to(I,h)$, 存在链映射 $s:(I,h)\to(E,d)$ 使得 $s\beta=\mathrm{id}_{(E,d)}$ 以及下图交换:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & E^0 \arrow[r, "d^0"] & E^1 \arrow[r, "d^1"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] \arrow[u, "\mathrm{id}_M"] & I^0 \arrow[r, "h^0"] \arrow[u, "s^0"] & I^1 \arrow[r, "h^1"] \arrow[u, "s^1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

因为每个 E^k 是内射模, 所以根据 $s^k\beta^k=\mathrm{id}_{E^k}$ 可知 $I^k=\mathrm{Im}\beta^k\oplus\mathrm{Ker}s^k$. 易见每个 h^k 满足 $h^k(\mathrm{Im}\beta^k)\subseteq\mathrm{Im}\beta^{k+1}$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"'] & E^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\beta^0"'] & E^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "\beta^1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"'] & I^0 \arrow[r, "h^0"] \arrow[d, "s^0"'] & I^1 \arrow[r, "h^1"] \arrow[d, "s^1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & E^0 \arrow[r, "d^0"] & E^1 \arrow[r, "d^1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

于是知把 h^k 限制在 $\mathrm{Im}\beta^k$ 上我们得到复形 $0\longrightarrow M\xrightarrow{j|}\mathrm{Im}\beta^0\xrightarrow{h^0|}\mathrm{Im}\beta^1\xrightarrow{h^1|}\cdots$. 易知下图交换, 即 β 给出极小内射分解 (E,d,i) 与复形 $(\mathrm{Im}\beta,h|,j|)$ 之间的链同构.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"'] & E^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\beta^0|"'] & E^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "\beta^1|"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j|"] & \mathrm{Im}\beta^0 \arrow[r, "h^0|"] & \mathrm{Im}\beta^1 \arrow[r, "h^1|"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

所以我们得到复形 $(\mathrm{Im}\beta,h|,i|)$ 是 M 的一个极小内射分解. 注意 (I,h,j) 可改写为

$$0\longrightarrow M\oplus 0\xrightarrow{i}\mathrm{Im}\beta^0\oplus\mathrm{Ker}s^0\xrightarrow{h^0}\mathrm{Im}\beta^1\oplus\mathrm{Ker}s^1\xrightarrow{h^1}\cdots$$

因此如果我们能证明 $h^k(\mathrm{Ker}s^k)\subseteq\mathrm{Ker}s^{k+1}$, 我们就可以把 (I,h,j) 拆解成极小内射分解 $(\mathrm{Im}\beta,h|,i|)$ 与

$$0\longrightarrow 0\longrightarrow\mathrm{Ker}s^0\xrightarrow{h^0|}\mathrm{Ker}s^1\xrightarrow{h^1|}\cdots$$

的直和, 然后再说明上述复形是正合复形即可. 事实上, 由 $d^ks^k=s^{k+1}h^k$ 我们马上看到 $h^k(\mathrm{Ker}s^k)\subseteq\mathrm{Ker}s^{k+1}$. 由于 $\mathrm{Ker}h^0=\mathrm{Im}j\subseteq\mathrm{Im}\beta^0$, 所以 $h^0|$ 是单射. 下面说明每个 $h^k|$ 与 $h^{k+1}|$ 在 $\mathrm{Ker}s^{k+1}$ 处正合, 为此只需证对每个 $x\in\mathrm{Ker}h^{k+1}\cap\mathrm{Ker}s^{k+1}$ 有某个 $y\in\mathrm{Ker}s^k$ 使得 $h^k(y)=x$. 首先我们总存在 $z\in I^k$ 使得 $h^k(z)=x$, 设 $z=\beta^k(w)+y$, 这里 $w\in E^k,y\in\mathrm{Ker}s^k$, 于是两边作用 h^k 由 $x=h^k\beta^k(w)+h^k(y)$ 以及 $h^k(y)\in\mathrm{Ker}s^{k+1}$ 马上看到 $h^k(y)=x$. 至此, 我们证明了复形 $0\longrightarrow 0\longrightarrow\mathrm{Ker}s^0\xrightarrow{h^0|}\mathrm{Ker}s^1\xrightarrow{h^1|}\cdots$ 是正合的. $\square$

Proposition 1.19. 设 R 是交换 Noether 环, M 是 R-模且 $x\in R$ 既是 R-正则元又是 M-正则元, 那么对任何能够被 x 零化的 R-模 N, 有 R-模同构 $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(N,M)\cong\mathrm{Ext}^i_{R/(x)}(N,M/xM),\forall i\geq 0$.

证明: Step1. 先取 M 的极小投射分解, 然后构造 M/xM 作为 $R/(x)$-模的极小投射分解. 取定 M 的极小内射分解

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{j}E^0\xrightarrow{d^0}E^1\longrightarrow\cdots,$$

根据前面的讨论知其长度给出 M 的内射维数. 现用 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_R(R/(x),-)$ 作用之, 得复形

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^0) \xrightarrow{(d^0)_*} \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^1) \xrightarrow{(d^1)_*} \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^2) \xrightarrow{(d^2)_*} \cdots$$

该复形的 i 次同调就是 $\mathrm{Ext}^i_R(R/(x),M)$, 下面我们来说明 $\mathrm{Ext}^t_R(R/(x),M)=0, \forall t\geq 2, \mathrm{Ext}^1_R(R/(x),M)\cong M/xM$, 进而可从上述复形出发构造 M/xM 作为 $R/(x)$-模的内射分解 (并且是极小的). 考察短正合列

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{x_l} R \longrightarrow R/(x) \longrightarrow 0,$$

它导出 Ext 群长正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/(x),M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R,M) \xrightarrow{(x_l)^*} \mathrm{Hom}_R(R,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(R/(x),M) \longrightarrow \cdots$$

由 R 是投射模知 $\mathrm{Ext}^t_R(R,M)=0, \forall t\geq 1$, 于是 $\mathrm{Ext}^t_R(R/(x),M)=0, \forall t\geq 2$ 并且借助下述交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(R,M) \arrow[r, "(x_l)^*"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_R(R,M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Ext}^1_R(R/(x),M) \arrow[r] & 0 \\
M \arrow[r, "x_l"] & M & &
\end{tikzcd}$$

马上得到 $R/(x)$-模同构 $M/xM\cong \mathrm{Ext}^1_R(R/(x),M)$. 下面通过说明 $\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^0)=0$ 来得到正合 $R/(x)$-模复形.

$$0 \longrightarrow M/xM \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^1) \xrightarrow{(d^1)_*} \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^2) \xrightarrow{(d^2)_*} \cdots$$

假设 $\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^0)\neq 0$, 那么 E_0 中有非零元 a 可被 x 零化. 因为 Ra 中有 $\mathrm{Ker}d^0=j(M)$ 的非零元, 所以该非零元可被 x 零化, 这和 x 是 M-正则元矛盾. 从而 $\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^0)=0$. 下面我们先说明正合复形

$$0 \longrightarrow M/xM \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^1) \xrightarrow{(d^1)_*} \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^2) \xrightarrow{(d^2)_*} \cdots$$

是 M/xM 的内射分解, 再说明其极小性. 利用张量函子 $-\otimes_{R/(x)} R/(x)$ 与 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_R(R/(x),-)$ 的伴随性, 有函子的自然同构

$$\mathrm{Hom}_R(-,E^i)(-\otimes_{R/(x)} R/(x))=\mathrm{Hom}_R(-\otimes_{R/(x)} R/(x),E^i)\cong \mathrm{Hom}_{R/(x)}(-,\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^i))$$

这一观察说明每个 $\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^i)$ 作为 $R/(x)$-模是内射模. 因而前面得到的复形

$$0 \longrightarrow M/xM \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^1) \xrightarrow{(d^1)_*} \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^2) \xrightarrow{(d^2)_*} \cdots$$

是 M/xM 的内射分解. 要验证其极小性只需说明每个 $\mathrm{Ker}(d^i)_*$ 是 $\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^i)$ 的本质子模, 任取 $\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^i)$ 的非零元 $g: R/(x)\to E^i$, 有 $g(\bar{1})\neq 0\in E^i$, 因为 $\mathrm{Ker}d^i$ 是 E^i 的本质子模, 所以存在 $a\in R$ 使得 $ag(\bar{1})\neq 0\in \mathrm{Ker}d^i$, 于是 $ag\neq 0\in \mathrm{Ker}(d^i)_*$, 所以 $\mathrm{Ker}(d^i)_*$ 是 $\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^i)$ 的本质子模. 总结一下, 现在我们得到了 M/xM 作为 $R/(x)$-模的极小内射分解

$$0 \longrightarrow M/xM \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^1) \xrightarrow{(d^1)_*} \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^2) \xrightarrow{(d^2)_*} \cdots.$$

Step2. 对 N, 因为 $xN=0$, 所以可天然给出 N 上的 $R/(x)$-模结构, 并且易得 $\mathrm{Hom}_R(N,E^0)=0$, 现在用 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_{R/(x)}(N,-)$ 作用我们得到的 M/xM 的极小内射分解得到复形

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R/(x)}(N,\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^1)) \xrightarrow{(d^1)_{**}} \mathrm{Hom}_{R/(x)}(N,\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^2)) \xrightarrow{(d^2)_{**}} \cdots.$$

通过张量函子与 Hom 函子的伴随性易得下述两复形间的链同构

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{R/(x)}(N,\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^1)) \arrow[r, "(d^1)_{**}"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{R/(x)}(N,\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^2)) \arrow[r, "(d^2)_{**}"] \arrow[d, "\cong"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(N,E^0) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(N,E^1) \arrow[r, "(d^1)_*"] & \mathrm{Hom}_R(N,E^2) \arrow[r, "(d^2)_*"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

对上下两复形取同调即得结果. □

1.3 Matlis 定理

本节介绍一个由 Eben Matlis(美国 1923-2015, Kaplansky 学生) 给出的一个交换代数中的著名定理：

Theorem 1.20 (Matlis,1958)**.** 设 R 是交换 Noether 环, $\mathcal{I}(R)$ 是不可分内射模同构类全体, 那么

$$\alpha : \mathrm{Spec}R \to \mathcal{I}(R), P \mapsto [E(R/P)]$$

是定义合理的双射. 即交换 Noether 环上不可分内射模同构类全体与素谱有一一对应, 特别地, $\mathcal{I}(R)$ 是集合(严格来说这种表述是错误的, 原因是每个不可分内射模同构类是真类, 它不可能是某个集合的元素, 但我们可以先从每个不可分内射模等价类中选取一个代表元, 将全体代表元构成的类记作 $\mathcal{I}(R)$ 来修正这一点). 并且 R 上任何不可分内射模总同构于某个 R/P 的内射包, 这里 $P \in \mathrm{Spec}R$.

在证明该定理前做一些准备.

Lemma 1.21. 设 R 是交换 Noether 环, 那么
(1) 任何素理想 P 满足 $E(R/P)$ 是不可分内射模.
(2) 任给内射 R-模 $I \neq 0$, 对 $P \in \mathrm{Ass}I$, 有 $E(R/P)$ 同构于 I 的某个直和因子. 特别地, 当 I 是不可分内射模时, $E(R/P) \cong I$.
(3) 对任何有限生成 R-模 M, 有 $\mathrm{Ass}M = \mathrm{Ass}E(M)$. 特别地, 当 $M = R/P, P \in \mathrm{Spec}R$ 时, 有

$$\mathrm{Ass}E(R/P) = \mathrm{Ass}R/P = \{P\}.$$

证明: (1) 假设 $E(R/P)$ 可分, 那么有非零子模 N_1, N_2 的交是零, 则 $N_1 \cap R/P$ 与 $N_2 \cap R/P$ 作为 R/P 的非零子模交是零, 但 R/P 是整环表明它任何两个非零子模 (理想) 之交非零, 得到矛盾.

(2) 由条件知有形如 $0 \longrightarrow R/P \xrightarrow{j} I$ 的正合列, 那么存在使得下图交换的单模同态 k.

$$\begin{tikzcd}
 & E_R(R/P) \arrow[dr, "k"] & \\
0 \arrow[r] & R/P \arrow[u, "i"] \arrow[r, "j"] & I
\end{tikzcd}$$

于是由 $E(R/P)$ 是内射模我们马上得到 $E(R/P)$ 同构于 I 的某个直和因子.

(3) 只要说明 $\mathrm{Ass}E_R(M) \subseteq \mathrm{Ass}M$, 任取 $Q \in \mathrm{Ass}E_R(M)$, 有形如 $0 \longrightarrow R/Q \xrightarrow{j} E_R(M)$ 的短正合列, 所以 $j(R/Q) \cap M \neq 0$, 结合 $\mathrm{Ass}(R/Q) = \{Q\}$ 可知 $\mathrm{Ass}(j(R/Q) \cap M) = \{Q\}$. 从而 $Q \in \mathrm{Ass}M$. $\square$

现在我们可以给出 Matlis 定理的证明, 即说明 $\alpha : \mathrm{Spec}R \to \mathcal{I}(R), P \mapsto [E(R/P)]$ 是定义合理的双射. 根据 [引理1.21(1)] 得到 α 定义合理, 根据 [引理1.21(3)] 得到 α 是单射, [引理1.21(2)] 表明 α 是满射, 得证.

Example 1.22 (P.I.D. 上不可分内射模)**.** 设 R 是 P.I.D., 商域是 K. 回忆 R 中的非零元 $p \in R$ 被称为**素元**, 如果 (p) 是素理想. 设 P 是 R 的素元相伴等价类的一个代表元集, 对每个 $p \in P$, 记 K/R 的 p-准素挠子模, 即 $\{x \in K/R | 存在s \geq 1使p^s x = 0\}$, 为 $(K/R)_p$. 那么 $K/R = \bigoplus_{p \in P}(K/R)_p$. 下面我们说明 $\{K, (K/R)_p(p \in P)\}$ 就是 R 上不可分内射模同构类的一个代表元集. 因为 K 是可除 R-模且它任意两个非零子模交非零, 所以 $E(R) = K$. 同时 K/R 也是可除 R-模, 所以每个 $(K/R)_p$ 是内射 R-模. 对每个素元 $p \in P$, 易见 $R/pR \cong \frac{1}{p}R/R$ 以及 $\frac{1}{p}R/R$ 是 $(K/R)_p$ 的本质子模, 所以 $E(R/pR) \cong (K/R)_p$. 因此, 根据 Matlis 定理可知 $\{K, (K/R)_p(p \in P)\}$ 就是 R 上不可分内射模同构类的一个代表元集. 特别地, 取 $R = \mathbb{Z}$, 我们得到 Abel 群范畴 **Ab** 中不可分可除 Abel 群同构类的一个代表元集, $\{\mathbb{Q}, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_p(p \in P)\}$, 这里 P 是素数集.

1.4 Bass 数

本节我们先说明 Noether 环上内射模总是一些不可分内射模的直和, 根据上一节中的 Matlis 定理, 对交换 Noether 环上的内射模, 其不可分内射模直和分解每个直和项同构于某个 R/P 的内射包, 我们将看到, 对固定的素理想 P, 同构于 $E(R/P)$ 的直和项指标全体的基数是不变量——由 M, P 决定 (见 [定理1.26]). 随后介绍 Bass 数的概念 (见 [定义1.28]), 它可给交换 Noether 环上任何模的极小内射分解每个项一个描述. 具体地, 记 M 关于素理想 P 的 i 次 Bass 数是 $\mu_i(P, M)$, 我们会说明对 M 的极小内射分解 $(E^\bullet(M), d^\bullet)$, $\mu_i(P, M)$ 就是 $E^i(M)$ 极小内射直和分解中与 $E(R/P)$ 同构的直和项数目.

Lemma 1.23. 设 R 是左 Noether 环, 那么任何内射左 R-模 M 是一些不可分内射模的直和.

证明: 注意任何非零内射模 $_RE$ 必定存在不可分内射子模, 因为取 $x \neq 0 \in E$, 考虑内射包 $E(Rx) \subseteq E$, 我们用反证法说明 $E(Rx)$ 含有不可分内射子模. 若不然, 则存在非零真内射子模 I_{11}, I_{12} 使得 $E(Rx) = I_{11} \oplus I_{12}$, I_{11} 不是不可分内射子模表明存在 I_{11} 的非零真内射子模 I_{21}, I_{22} 使得 $I_{11} = I_{21} \oplus I_{22}$, 如此继续, 递归地可得到非零内射子模序列 $\{I_{k1}\}_{k \geq 1}$ 以及 $\{I_{k2}\}_{k \geq 1}$ 使得 $I_1 = I_{11} \oplus I_{12}, I_{k1} = I_{k+1,1} \oplus I_{k+1,2}, \forall k \geq 1$. 易见

$$I_1 = I_{12} \oplus I_{22} \oplus \cdots \oplus I_{n2} \oplus I_{n1}, \forall n \geq 1.$$

所以我们有 $E(Rx)$ 的子模严格升链 $I_{12} \subsetneq I_{12} \oplus I_{22} \subseteq I_{12} \oplus I_{22} \oplus I_{32} \subsetneq \cdots$, 它诱导 Rx 的子模严格升链

$$I_{12} \cap Rx \subsetneq (I_{12} \oplus I_{22}) \cap Rx \subseteq (I_{12} \oplus I_{22} \oplus I_{32}) \cap Rx \subsetneq \cdots$$

这与 Rx 是 Noether 模矛盾. 因而 $E(Rx)$ 有不可分内射子模, 这也说明 E 有不可分内射子模. 现在我们说明内射模 M 是一些不可分内射模的直和. 不妨设 $M \neq 0$, 考虑集合

$$S = \{\{M_i\}_{i \in \Lambda} | \{M_i\}_{i \in \Lambda}是M的不可分内射子模族且\sum_{i \in \Lambda} M_i = \oplus_{i \in \Lambda} M_i\}$$

那么根据前面的讨论知道 $(S,\subseteq)$ 是非空偏序集, 可直接验证它任何全序子集有上界, 所以应用 Zorn 引理知 S 有极大元 $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$. 依 Bass-Papp 定理, 左 Noether 环上任何一族内射左模的直和仍内射, 所以 $\oplus_{i\in\Lambda}M_i$ 是 M 的直和因子, 设为 $M=E\oplus(\oplus_{i\in\Lambda}M_i)$, 假设 $E\neq 0$, 则由前面的讨论知道 E 有不可分内射子模, 这会与子模族 $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ 的极大性矛盾, 所以 $E=0$, 从而 $M=\oplus_{i\in\Lambda}M_i$. □

Lemma 1.24. 设 R 是交换 Noether 环, P 是素理想, M 是有限生成 R-模, 那么有 R_P/P_P-线性同构

$$R_P/P_P\cong \mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,(E(R/P))_P).$$

证明: 因为 R_P-模同构 $E_{R_P}(R_P/P_P)\cong(E(R/P))_P$, 所以只要证 $R_P/P_P\cong\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,E_{R_P}(R_P/P_P))$. 为此, 用 R 替换 R_P, m 替换 P_P 并记 $k=R/m$, 只要证 R 是局部环的情形就够了. 下证 k-线性同构 $k\cong\mathrm{Hom}_R(k,E_R(k))$. 注意到 k-线性同构

$$\begin{aligned}\eta:\{x\in E_R(k)|mx=0\}&\to\mathrm{Hom}_R(k,E_R(k))\\ x&\mapsto x_r:k\to E_R(k),c\mapsto cx\end{aligned}$$

如果能说明 $\{x\in E_R(k)|mx=0\}=k$, 便得到结果. 易见 $k\subseteq\{x\in E_R(k)|mx=0\}$, 假设 $k\subsetneq\{x\in E_R(k)|mx=0\}$, 那么线性空间 $\{x\in E_R(k)|mx=0\}$ 有非零子空间 W 和 k 交为零, 将 W 视作非零 R-子模, 那么这和 $E_R(k)$ 任何非零子模与 k 相交非零矛盾. 故 $k=\{x\in E_R(k)|mx=0\}$, 证毕. □

Remark 1.25. 证明过程给出了 k-线性同构 $k\cong\mathrm{Hom}_R(k,E_R(k))$, 这也是 R-模同构, 故总有 R-模同构

$$\mathrm{Ext}^i_R(k,E_R(k))\cong\begin{cases}k,\ i=0,\\0,\ i>0.\end{cases}$$

Theorem 1.26. 设 R 是交换 Noether 环, 那么任何内射 R-模 M 可分解为一些不可分内射 R-模的直和 $M=\oplus_{i\in\Lambda}M_i$, 那么对 R 的每个素理想 P, 指标集 Λ 中满足 $M_i\cong E(R/P)$ 的指标全体的势由维数

$$\dim_{R_P/P_P}\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,M_P)$$

给出. 即 $\dim_{R_P/P_P}\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,M_P)=|\{i\in\Lambda|M_i\cong E(R/P)\}|$, 该定理表明直和分解 $M=\oplus_{i\in\Lambda}M_i$ 中与 $E(R/P)$ 同构的 M_i 数量是由 M,P 决定的不变量. 当 M 有限生成时, $\dim_{R_P/P_P}\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,M_P)\in\mathbb{N}$.

证明: 直和分解的存在性由前面的引理即得. 要证的只有

$$\dim_{R_P/P_P}\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,M_P)=|\{i\in\Lambda|M_i\cong E(R/P)\}|.$$

现在证明结论：首先由局部化与直和可交换得到 R_P/P_P-线性同构

$$\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,M_P)\cong\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,\oplus_{i\in\Lambda}(M_i)_P),$$

因为 R_P/P_P 作为 R_P-模是不可约模, 所以由下面的 [引理1.27] 马上得到 R_P/P_P-线性同构

$$\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,\oplus_{i\in\Lambda}(M_i)_P)\cong\oplus_{i\in\Lambda}\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,(M_i)_P)$$

每个不可分内射模 M_i 同构于某个 $R/Q, Q \in \mathrm{Spec}R$, 当 $Q \neq P$ 时, 仅可能 $Q \subsetneq P$ 或 $Q \nsubseteq P$. 下面我们说明这两种情况都将导致 $\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P, E(R_P/Q_P)) = 0$. 一旦证明该断言, 应用 [引理1.27] 我们可以立即得到 R_P/P_P-线性同构 $\oplus_{i\in\Lambda}\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P, (M_i)_P) \cong \oplus_{i\in\Lambda_0}\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P, E(R_P/P_P))$, 其中 $\Lambda_0 = \{i \in \Lambda | M_i \cong E(R/P)\}$, 从而由 [引理1.24] 来得到

$$\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P, M_P) \cong \oplus_{i\in\Lambda_0}\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P, E(R_P/P_P)) \cong \oplus_{i\in\Lambda_0}R_P/P_P,$$

即 $|\{i \in \Lambda | M_i \cong E(R/P)\}| = |\Lambda_0| = \dim_{R_P/P_P}\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P, M_P)$. 下面来证明断言.

Case1. 当素理想 $Q \nsubseteq P$, $P \notin V(Q) = V(\mathrm{Ann}_R R/Q) = \mathrm{Supp}(R/Q)$, 这表明 $R_P/Q_P = 0$, 所以内射包 $E_{R_P}(R_P/Q_P) = 0$, 结论成立.

Case2. 当素理想 $Q \subsetneq P$ 时, 取 $x \in P - Q$, 那么 $x/1 \in P_P - Q_P$, 因此它决定的左乘变换给出 R_P/Q_P 上的单射, 考虑下述交换图:

$$\begin{array}{ccc} R_P/Q_P & \xrightarrow{\quad i \quad} & E_{R_P}(R_P/Q_P) \\ {\scriptstyle (x/1)_l}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (x/1)_l} \\ R_P/Q_P & \xrightarrow{\quad i \quad} & E_{R_P}(R_P/Q_P) \end{array}$$

因为 $i : R_P/Q_P \to E_{R_P}(R_P/Q_P)$ 是本质单同态, $i(x/1)_l$ 是单同态且 $E_{R_P}(R_P/Q_P)$ 是内射模, 故 $E_{R_P}(R_P/Q_P)$ 上的左乘变换 $(x/1)_l$ 也是单射, 下面使用反证法说明 $\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P, E(R_P/Q_P)) = 0$. 若不然, 存在非零 R_P-模同态 $f : R_P/P_P \to E(R_P/Q_P)$, 那么存在某个 $a \in R_P/P_P$ 使得 $f(a) \neq 0$, 那么 $(x/1)f(a) \neq 0$, 这与 $(x/1)a = 0 \in R_P/P_P$ 矛盾. 故 $\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P, E(R_P/Q_P)) = 0$, 证毕. □

Lemma 1.27. 设 R 是含幺环, $M, N_i (i \in \Lambda)$ 均是左 R-模, 如果 M 是不可约模, 那么有加群同构

$$\begin{aligned} \varphi : \oplus_{i\in\Lambda}\mathrm{Hom}_R(M, N_i) &\to \mathrm{Hom}_R(M, \oplus_{i\in\Lambda}N_i) \\ (f_i)_{i\in\Lambda} &\mapsto \varphi((f_i)_{i\in\Lambda}) : M \to \oplus_{i\in\Lambda}N_i, x \mapsto (f_i(x))_{i\in\Lambda} \end{aligned}$$

并且当 M 有双模结构时, 例如 ${}_RM_S$ 是 R-S 双模, 那么 φ 是左 S-模同构.

下面的概念由 Hyman Bass(美国, 1932-) 于 1963 年引入, 我们将马上看到它在极小内射分解上的作用.

Definition 1.28 (Bass 数)**.** 设 R 是交换 Noether 环, M 是有限生成 R-模, $P \in \mathrm{Spec}R$, 称

$$\mu_i(P, M) = \dim_{R_P/P_P}\mathrm{Ext}^i_{R_P}(R_P/P_P, M_P)$$

是 M **关于** P **的** i **次 Bass 数** (the i-th Bass number of M with respect to P), 易见它是自然数.

Proposition 1.29. 设 R 是交换 Noether 环, M 是有限生成 R-模, 并设 M 有极小内射分解

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{j} E^0(M) \xrightarrow{d^0} E^1(M) \xrightarrow{d^1} \cdots$$

那么对每个自然数 i, 有 R-模同构 $E^i(M) \cong \oplus_{P\in\mathrm{Spec}R}E(R/P)^{\mu_i(P,M)}$.

证明: 由局部化函子的正合性以及这时模取内射包与作局部化可交换 (回忆 [命题1.13]) 知对每个素理想 P,

$$0 \longrightarrow M_P \xrightarrow{j_P} (E^0(M))_P \xrightarrow{(d^0)_P} (E^1(M))_P \xrightarrow{(d^1)_P} \cdots$$

是 M_P 作为 R_P-模的极小内射分解, 下面说明 R_P/P_P-线性同构

$$\mathrm{Ext}^i_{R_P}(R_P/P_P, M_P) \cong \mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P, (E^i(M))_P),$$

一旦证明该断言, 则由 [定理1.26] 得到 R-模同构

$$E^i(M) \cong \oplus_{P\in\mathrm{Spec}R} E(R/P)^{\dim_{R_P/P_P}\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,(E(M))_P)} \cong \oplus_{P\in\mathrm{Spec}R} E(R/P)^{\mu_i(P,M)}.$$

为计算 $\mathrm{Ext}^i_{R_P}(R_P/P_P, M_P)$, 用 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P, -)$ 作用 M_P 的极小内射分解得到复形

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P, (E^0(M))_P) \xrightarrow{((d^0)_P)_*} \mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P, (E^1(M))_P) \xrightarrow{((d^1)_P)_*} \cdots$$

对每个自然数 i, 命 $C^i = \{x \in (E^i(M))_P | P_P x = 0\} \subseteq (E^i(M))_P$, 那么

$$\eta^i : \mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P, (E^i(M))_P) \to C^i, f \mapsto f(\overline{1})$$

是 R_P/P_P-线性同构, 并且 $\eta = \{\eta^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 给出下述两复形间的链同构:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P, (E^0(M))_P) \arrow[r, "((d^0)_P)_*"] \arrow[d, "\eta^0"'] & \mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P, (E^1(M))_P) \arrow[r, "((d^1)_P)_*"] \arrow[d, "\eta^1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & C^0 \arrow[r, "(d^0)_P|"] & C^1 \arrow[r, "(d^1)_P|"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

下面通过说明每个 $(d^i)_P$ 是零同态的方式来得到 $\mathrm{Ext}^i_{R_P}(R_P/P_P, M_P) \cong \mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P, (E^i(M))_P)$. 任取 $x \neq 0 \in C^i$, 那么根据 $(E^i(M))_P$ 是 $\mathrm{Im}(d^{i-1})_P$ 的本质扩张 (这里记 j_P 为 $(d^{-1})_P$) 知存在 $a \in R_P$ 使得 $ax \neq 0 \in \mathrm{Im}(d^{i-1})_P$, 注意到 $a \notin P_P$ 必定是 R_P 中可逆元得到 $x \in \mathrm{Im}(d^{i-1})_P$, 那么我们当然有 $(d^i)_P(x) = 0$. □

前面针对交换 Noether 环上非零有限生成模以及素理想定义了 Bass 数, 容易验证对 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 上的有限生成模 M, 总满足 $R_\mathfrak{m}$-模同构 $\mathrm{Ext}^i_{R_m}(R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_\mathfrak{m}, M_\mathfrak{m}) \cong (\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M))_\mathfrak{m}$ 再转为 R-模同构易知 $\dim_k \mathrm{Ext}^i_R(k, M) = \dim_{R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_\mathfrak{m}} \mathrm{Ext}^i_{R_m}(R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_\mathfrak{m}, M_\mathfrak{m}) = \mu_i(\mathfrak{m}, M)$. 因此模的 type 可视作特殊的 Bass 数.

Definition 1.30 (type)**.** 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是交换 Noether 局部环, M 是非零有限生成 R-模, 并设 $\mathrm{depth}M = t$, 称 $\dim_k \mathrm{Ext}^t_R(k, M) = \mu_t(\mathfrak{m}, M)$ 为模 M 的 **type**, 记作 $r(M)$. 即 M 关于 $\mathfrak{m}$ 的 t 次 Bass 数.

Remark 1.31. 若取定交换局部环 R 上的模 M, 那么它的基座 $\mathrm{soc}M = \{x \in M | \mathfrak{m}x = 0\} \cong \mathrm{Hom}_R(k, M)$($k$-线性同构), 这时若 R 进一步是 Noether 的, 对深度为 t 的有限生成模 M, 若取定含于 $\mathfrak{m}$ 的极大 M-正则序列 $a_1, ..., a_t$, 那么我们有 R-模同构 $\mathrm{Ext}^t_R(k, M) \cong \mathrm{Hom}_R(k, M/(a_1, ..., a_t)M)$, 若将两边视作 k-线性空间, 这也是 k-线性同构, 因此我们得到 $r(M) = \dim_k \mathrm{soc}(M/(a_1, ..., a_t)M) = r(M/(a_1, ..., a_t)M)$. 特别地, 当 $\mathrm{depth}M = 0$ 时, M 的 type 由其基座的线性维数给出, 我们把这一观察叙述为下述引理.

Lemma 1.32. 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是交换 Noether 局部环, M 是有限生成 R-模且 $\mathrm{depth}M = 0$(例如当 $\mathfrak{m}M = 0$ 时), 那么 $r(M) = \dim_k \mathrm{soc}M$.

1.5 Matlis 对偶

Matlis 于 1958 年证明了对完备交换 Noether 局部环 $(R,\mathfrak{m},k)$, 其上 Artin 模全子范畴和 Noether 模全子范畴是范畴对偶的, 更具体地, k 的内射包 E 所决定的逆变 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_R(-,E)$ 给出两全子范畴间的范畴对偶. 让我们看一个关于 Noether 局部环上有限长模全子范畴形式的 Matlis 对偶.

Proposition 1.33. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是交换 Noether 局部环, E 是 k 作为 R-模的内射包, N 是有限长 R-模, 对每个 $M\in \mathrm{ob}R\text{-Mod}$, 记 $M'=\mathrm{Hom}_R(M,E)$(如果 R 是域, 这时 $E=k$, M' 就是 k-线性空间 M 的对偶), 则:
(1) 有 R-模同构

$$\mathrm{Ext}^i_R(k,E)\cong\begin{cases}k,\ i=0,\\ 0,\ i>0.\end{cases}$$

(2) 对任何有限长 R-模 N, N'(读作 N 的 E-对偶) 作为 R-模也有限长, 且 $l(N)=l(N')$.
(3) 自然同态

$$\begin{aligned}\eta_N: N&\to N''=\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(N,E),E)\\ n&\mapsto \eta(n):\mathrm{Hom}_R(N,E)\to E, g\mapsto g(n)\end{aligned}$$

是 R-模同构. 若记 $\mathscr{F}$ 是 R-Mod 中有有限长模构成的全子范畴, 给出那么 $\mathrm{Hom}_R(-,E)$ 给出 $\mathscr{F}$ 到自身的范畴对偶, 更具体地, 我们有自然同构 $\mathrm{Hom}_R(-,E)\mathrm{Hom}_R(-,E)\cong \mathrm{id}_{\mathscr{F}}$.
(4) 记 $\mu(M)$ 表示 R 上有限生成模 M 的极小生成元数目, 那么 $\mu(N)=r(N'),r(N)=\mu(N')$.
(5) 若更进一步 R 是 Artin 环 (注意这时有限生成 R-模有有限长), 那么 E 是有限生成忠实 R-模并且满足

- $l(E)=l(R)$.
- 标准同态 $R\to\mathrm{End}_R(E),a\mapsto a_l$ 是环同构也是 R-模同构 (故 E 的自同态由 R 中元素左乘变换诱导).
- $r(E)=1$ 且 $\mu(E)=r(R)$.
- 任何 type 是 1 的忠实有限生成 R-模和 E 同构.

证明: (1) 是 [注记1.25] 所阐述过的事实. 下面通过对 N 的长度 $l(N)$ 作归纳得到 (2). 不妨设 $N\neq 0$, 当 $l(N)=1$ 时, N 是单模, 所以 $k\cong N$, 进而 (1) 表明 $N'\cong k$, 所以 $l(N')=1$. 假设结论对长度不超过 $l(N)-1(l(N)\geq 2)$ 的有限长模成立, 因为 $l(N)\geq 2$, 所以存在非零真子模 K, 进而有形如

$$0\longrightarrow K\longrightarrow N\longrightarrow C\longrightarrow 0$$

的正合列, 其中 $l(K),l(C)$ 严格小于 $l(N)$. 用函子 $\mathrm{Hom}_R(-,E)$ 作用上述正合列得到

$$0\longrightarrow C'\longrightarrow N'\longrightarrow K'\longrightarrow 0$$

由归纳假设, C',K' 有有限长且 $l(C)=l(C'),l(K)=l(K')$. 故 N' 有有限长且 $l(N')=l(C')+l(K')=l(N)$, 这就证明了 (2). 现在说明 (3), 置 $\eta:\mathrm{ob}\mathscr{F}\to\bigcup\limits_{N\in\mathrm{ob}\mathscr{F}}\mathrm{Hom}_R(N,N''),N\mapsto\eta_N$, 直接计算可知 η 是恒等函子 $\mathrm{id}_{\mathscr{F}}$ 到 $\mathrm{Hom}_R(-,E)\mathrm{Hom}_R(-,E)$ 的自然变换. 故只需验证每个 η_N 是同构即可. 不妨设 $N\neq 0$, 当 $l(N)=1$

时, $N\cong k$, 故由 η 的自然性, 只需说明 η_k 是同构, 这是单模间的同态, 只需说明 $\eta_k\neq 0$ 即可, 这明显成立. 假设结论对长度不超过 $l(N)-1(l(N)\geq 2)$ 的有限长模成立, 考虑形如

$$0\longrightarrow K\longrightarrow N\longrightarrow C\longrightarrow 0$$

的正合列, 其中 $l(K),l(C)$ 严格小于 $l(N)$. 我们有下述交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "\eta_K"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "\eta_N"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\eta_c"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K'' \arrow[r] & N'' \arrow[r] & C'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

根据归纳假设, 这里 η_C,η_K 是同构, 故 η_N 也是同构.

(4) 只要证明第一个等式就足够了, 原因是一旦说明了 $\mu(N)=r(N')$, 根据 (2) 知道 N' 也是有限长模, 那么就有 $\mu(N')=r(N'')$, 再应用 (3) 得到的 $N\cong N''$ 立即得到 $r(N)=\mu(N')$. 现在我们来验证 $\mu(N)=r(N')$. 因为 $N'=\mathrm{Hom}_R(k,N)$, 它满足 $\mathfrak{m}N'=0$, 所以由 [引理1.32] 得 $r(N')=\dim_k\mathrm{soc}N'$. 考虑短正合列

$$0\longrightarrow \mathfrak{m}N\longrightarrow N\longrightarrow N/\mathfrak{m}N\longrightarrow 0,$$

用函子 $\mathrm{Hom}_R(-,E)$ 作用之, 得正合列 $0\longrightarrow (N/\mathfrak{m}N)'\longrightarrow N'\longrightarrow (\mathfrak{m}N)'\longrightarrow 0$, 从而知 R-模同构 $(N/\mathfrak{m}N)'\cong\{f\in N'|\mathfrak{m}f=0\}=\mathrm{soc}N'$, 因此作为 k-线性空间, 有 $\dim_k(N/\mathfrak{m}N)'=\dim_k\mathrm{soc}N'=r(N')$. 对 R-模 $N/\mathfrak{m}N$, 它明显满足 $\mathfrak{m}(N/\mathfrak{m}N)=0$, 所以由 (2) 并结合下面的 [引理1.34] 可得

$$\mu(N)=\dim_k N/\mathfrak{m}N=l_R(N/\mathfrak{m}N)=l_R((N/\mathfrak{m}N)')=\dim_k(N/\mathfrak{m}N)'=\dim_k\mathrm{soc}N'=r(N').$$

(5) 现在我们设 R 也是 Artin 的, 那么有 R-模同构 $E\cong\mathrm{Hom}_R(R,E)=R'$, 这表明 $l(E)=l(R')=l(R)$(第二个等号是因为 (2)). 既然 E 是有限长模, 便有 E 有限生成. 根据 (3), 我们知道

$$\eta_R:R\to\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R,E),E),a\mapsto\eta_R(a)$$

是 R-模同构. 再对标准 R-模同构 $g:E\to\mathrm{Hom}_R(R,E),x\mapsto x_r$ 作用函子 $\mathrm{Hom}_R(-,E)$ 得到 R-模同构 $g^*:\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R,E),E)\to\mathrm{End}_R(E),\varphi\mapsto\varphi g$. 于是得到 R-模同构

$$g^*\eta_R:R\to\mathrm{End}_R(E),a\mapsto g(x)(a)=ax.$$

即 $g^*\eta_R$ 就是由 R 中每个元素的左乘变换导出的同构, 它既是环同构又是 R-模同构. 特别地, E 忠实.

根据 (4), 我们知道 $r(E)=\mu(E')$, 根据刚刚证明了 $R\cong\mathrm{End}_R(E)=E'$ 知道 $\mu(E')=\mu(R)=1$. 此外, 也有 $\mu(E)=r(E')=r(R)$. 最后我们说明任何 type 是 1 的忠实有限生成模 N 必定和 E 同构. 因为 N 是有限生成模, 所以 N 有有限长, 从而应用 (4) 得到 $1=r(N)=\mu(N')$, 这说明 N', 这表明 N' 是循环模, 进而存在 R 的理想 I 使得 $R/I\cong N'$, 因此得到 R-模同构 $\mathrm{Hom}_R(R/I,E)\cong N''\cong N$. 根据条件, N 是忠实模, 这迫使理想 $I=0$, 那么 $N\cong\mathrm{Hom}_R(R,E)\cong E$, 证毕. □

Lemma 1.34. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是交换 Noether 局部环, 那么对任何有限生成 R-模 M, 只要 $\mathfrak{m}M=0$(那么 M 可天然视作 k-线性空间), 那么 M 有有限长且 $l_R(M)=\dim_k M$.

证明: 因为 M 满足 $\mathfrak{m}M = 0$, 所以 M 以及 M 的任何一个子模可视作有限维 k-线性空间, 反之, 将 M 视作 k-线性空间后每个子空间对应 M 的 R-子模. 不妨设 $M \neq 0$, 取 M 作为 k-线性空间的基 $\{x_1, ..., x_n\}$, 那么有 k-子空间升链 $0 \subsetneq (x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq \cdots \subsetneq (x_1, ..., x_{n-1}) \subsetneq (x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = M$, 因为相邻的 k-子空间 $(x_1, ..., x_i)$ 和 $(x_1, ..., x_i, x_{i+1})$ 之间不会严格包含 k-子空间, 所以也不会严格包含 R-子模, 故上述子空间链给出 M 长度为 n 的合成列. 因此 $l_R(M) = n = \dim_k M$. $\square$

一般形式的 Matlis 对偶定理如下.

Theorem 1.35. 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是完备交换 Noether 局部环, 设 E 是 ${}_Rk$ 的内射包, 那么逆变正合函子 $\mathrm{Hom}_R(-, E)$ 给出 Artin 模全子范畴与 Noether 模全子范畴的范畴对偶.

证明: 证明可查阅 [[1], 定理 3.2.13] 或 [[2], 定理 18.6] $\square$

参考文献

[1] Winfried Bruns, H. Jürgen Herzog, Cohen-Macaulay Rings, Cambridge University Press(1993).

[2] Hideyuki Matsumura, Commutative Ring Theory, Cambridge University Press(1987).

[3] Hideyuki Matsumura,Commutative algebra, W. A. Benjamin(1980).

[4] T.Y.Lam, Lectures on Modules and Rings Springer-Verlag(1999).