拟仿射簇上的几何向量丛

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 1 月 31 日

这份笔记主要目的是**局限在拟仿射簇范畴**中平行于 [Lee12] 中对光滑流形的向量丛讨论来介绍拟仿射簇上的 (几何) 向量丛的基本概念与性质. 需要指出, 这份笔记考虑的向量丛的全空间**均是拟仿射簇** (见 [定义1.7]), 而通常古典代数几何考虑的是更一般的拟射影簇. 这里聚焦于仿射代数几何.

1 基本概念

本节固定域 $\Bbbk$. 首先我们回顾一些基本术语. **拟仿射簇**是指某个仿射簇的开子集. 由仿射簇与仿射簇的乘积上有自然的仿射簇结构易见拟仿射簇的积依然是拟仿射簇 (但需要指出 Zariski 拓扑的积拓扑比乘积簇上的 Zariski 拓扑要粗). 设 $X \subseteq \Bbbk^n$ 是域 $\Bbbk$ 上拟仿射簇, $p \in X$. 称 X 上函数 $\varphi : X \to \Bbbk$ 在点 p 处**正则**, 如果存在 p 点的开邻域 U 以及多项式 $f, g \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 使得 $g(q) \neq 0, \forall q \in U$ 并且 $\varphi(q) = f(q)/g(q), \forall q \in U$. 如果 X 上函数 $\varphi : X \to \Bbbk$ 在 X 内每点正则, 称 f 是 X 上**正则函数**, 可验证拟仿射簇上的正则函数总连续. 如果拟仿射簇之间的连续映射 $\psi : X \to Y$ 满足对任何 Y 的开子集 V 以及 V 上正则函数 $f : V \to \Bbbk$ 有 $f\psi : \psi^{-1}(V) \to \Bbbk$ 正则, 则称 ψ 是 X 到 Y 的**正则映射**. 如果 $\varphi : X \to \Bbbk$ 是拟仿射簇间的正则映射, 易见 φ 是正则函数.

Lemma 1.1. 设 X 是域 $\Bbbk$ 上拟仿射簇, 如果 $\varphi : X \to \Bbbk$ 是 X 上正则函数, 则 φ 为正则映射.

Proof. 任取 $\Bbbk$ 的非空开子集 V 和 V 上正则函数 $g : V \to \Bbbk$. 对每个 $p \in X$, 由正则函数的连续性, 存在 p 的开邻域 U 使得 $\varphi(U) \subseteq V$, 可不妨设 φ 在 U 上能够表示为多项式函数的分式. 设 $X \subseteq \Bbbk^n$, 那么存在 $f, h \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 使得 $h(q) \neq 0, \forall q \in U$ 并且 $\varphi(q) = f(q)/h(q), \forall q \in U$. 由 g 的正则性, 存在 $\varphi(p)$ 的开邻域 $W \subseteq V$ 以及多项式 $F, G \in \Bbbk$ 使得 $G(t) \neq 0, \forall t \in W$ 且 $g(t) = F(t)/G(t), \forall t \in W$. 把 $\varphi(q) = f(q)/h(q)$ 代入该式可知在 $U \cap \varphi^{-1}(W)$ 上 $g\varphi$ 能够表示为多项式的分式, 这说明 φ 在 p 处正则. 故 φ 为正则映射. □

Remark 1.2. 因此拟仿射簇 X 到 $\Bbbk$ 的映射 φ 是正则映射当且仅当 φ 是 X 上正则函数. 一般地, 对自然数 r, 可直接验证拟仿射簇 X 到 $\Bbbk^r$ 的映射 φ 是正则映射当且仅当 φ 的每个分量函数正则.

利用 Hilbert 零点定理以及在 X 的标准拓扑基上进行一些技巧性地分析可以得到

Example 1.3. 设 X 是代数闭域上仿射簇, 则任何 X 上正则函数都是多项式函数. 因此对代数闭域上仿射簇间的正则映射 $\varphi : X \to Y$, 若设 $X \subseteq \Bbbk^n, Y \subseteq \Bbbk^m$ 以及 $\varphi(p) = (f_1(p), ..., f_m(p))$, 每个 f_j 都是多项式函数.

Remark 1.4. 记 $\mathcal{O}(X)$ 是拟仿射簇 X 的正则函数环, 那么当 X 是代数闭域上仿射簇时这就是坐标环.

Example 1.5. 设 X, Y 都是域 $\Bbbk$ 上拟仿射簇, 那么标准投射 $\pi_X : X \times Y \to X$ 和 $\pi_Y : X \times Y \to Y$ 都正则.

Example 1.6. 设 X, Y 都是域 $\Bbbk$ 上拟仿射簇, $p \in X, q \in Y$. 那么标准嵌入 $i_X : X \to X \times Y, x \mapsto (x, q)$ 和 $i_Y : Y \to X \times Y, y \mapsto (p, y)$ 都是正则映射. 任给 $(p, q) \in X \times Y$ 以及它在 $X \times Y$ 中的开邻域 W, 存在 $h \in \Bbbk[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m]$(这里设 $X \subseteq \Bbbk^n, Y \subseteq \Bbbk^m$) 使得 $(p, q) \in \Bbbk^{n+m} - V(h) \subseteq W$. 取 $\tilde{h} \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 为 $\tilde{h}(x_1, ..., x_n) = h(x_1, ..., x_n, q)$, 那么 $U = [\Bbbk^n - V(\tilde{h})] \cap X$ 是 X 的含 p 的开子集并且 $i_X(U) \subseteq W$. 这说明 i_X 是连续映射. 类似地构造容易通过定义验证 i_X 还是正则映射.

易见拟仿射簇间正则映射的合成仍为正则映射. 所以域 $\Bbbk$ 上所有拟仿射簇与正则映射可构成 $\Bbbk$ 上**拟仿射簇范畴**, 其中的同构称为**正则同构**. 如果拟仿射簇 X, Y 间存在正则同构, 则称 X 与 Y **同构**, 记作 $X \cong Y$. 如果拟仿射簇 X 与某个仿射簇同构, 也称 X 是**仿射的**. 例如一般线性群 $\mathrm{GL}_r(\Bbbk)$ 作为拟仿射簇就是仿射的.

Definition 1.7. 设 X, E 是域 $\Bbbk$ 上拟仿射簇, $\xi : E \to X$ 是满正则映射, $r \in \mathbb{N}$. 如果
(1) 对每个 $p \in X$, 纤维 $\xi^{-1}(p)$ 上有 r 维 $\Bbbk$-线性空间结构;
(2) 对每个 $p \in X$, 存在 p 的开邻域 U 以及正则同构 $\Phi : \xi^{-1}(U) \to U \times \Bbbk^r$(称 Φ 为**局部平凡性**) 满足对每个 $\Phi(x)$ 的在 U 部分的分量就是 $\xi(x)$(或等价地, 记 $\pi_U : U \times \Bbbk^r \to U$ 是 U 上的标准投射, 则 $\pi_U \Phi = \xi$) 且对每个 $q \in U$, Φ 限制在 $\xi^{-1}(q)$ 上给出 $\Bbbk$-线性同构 $\xi^{-1}(q) \cong \{q\} \times \Bbbk^r$,
则称称 (E, ξ) 为 X 上秩为 r 的**几何向量丛**. E 被称为该向量丛的**全空间**, X 被称为**底空间**.

Remark 1.8. 如果局部平凡性 $\Phi : \xi^{-1}(U) \to U \times \Bbbk^r$ 和 $\Psi : \xi^{-1}(V) \to V \times \Bbbk^r$ 满足 $U \cap V \neq \varnothing$, 那么有正则映射 $\Phi\Psi^{-1} : (U \cap V) \times \Bbbk^r \to (U \cap V) \times \Bbbk^r, (p, v) \mapsto (p, \sigma(p, v))$, 这里 $\sigma : (U \cap V) \times \Bbbk^r \to \Bbbk^r$ 是正则映射. 因为对固定的 $p \in U \cap V$, $\Bbbk^r \to \Bbbk^r, v \mapsto \sigma(p, v)$ 是 $\Bbbk$-线性同构, 所以存在唯一的可逆阵 $\tau(p) \in \mathrm{GL}_r(\Bbbk)$ 使得

$$\Phi\Psi^{-1} : (U \cap V) \times \Bbbk^r \to (U \cap V) \times \Bbbk^r, (p, v) \mapsto (p, \tau(p)v).$$

通过考察 $\Bbbk^r$ 中的标准单位列向量 $\{e_1, ..., e_r\}$ 和标准嵌入 $j_i : U \cap Y \to (U \cap V) \times \Bbbk^r, p \mapsto (p, e_i)$ 易知映射 $\tau : U \cap V \to \mathrm{GL}_r(\Bbbk)$ 的每个矩阵分量函数是正则函数. 这说明 τ 是正则映射. 因此前面的讨论说明对定义域相交的局部平凡性 $\Phi : \xi^{-1}(U) \to U \times \Bbbk^r, \Psi : \xi^{-1}(V) \to V \times \Bbbk^r$, 存在唯一的正则映射 $\tau : U \cap V \to \mathrm{GL}_r(\Bbbk)$ 使得 $\Phi\Psi^{-1}(p, v) = (p, \tau(p)v), \forall p \in U \cap V, v \in \Bbbk^r$. 称 τ 为局部平凡性 Φ 与 Ψ 间的**转移函数**.

通常也把 "(E, ξ) 是 X 上向量丛" 简称为 "E 是 X 上向量丛" 或 $\xi : E \to X$ 是 X 上向量丛.

Example 1.9. 如果 $\xi : E \to X$ 的拟仿射簇 X 上秩为 1 的向量丛, 则称该向量丛是 X 上**线丛**. 如果线丛 $\xi : E \to X$ 有局部平凡性 $\Phi : \xi^{-1}(U) \to U \times \Bbbk, \Psi : \xi^{-1}(V) \to V \times \Bbbk$ 满足 $U \cap V \neq \varnothing$, 那么它们的转移函数是形如 $\tau : U \cap V \to \Bbbk^{\times}$ 的正则映射, 即 $U \cap V$ 上取值总非零的正则函数.

Example 1.10. 如果拟仿射簇 X 上秩为 r 的向量丛 $\xi : E \to X$ 满足存在定义在整个 E 上的局部平凡性, 即有正则同构 $E \cong X \times \Bbbk^r$, 则称 $\xi : E \to X$ 是**平凡向量丛**. 例如标准的乘积簇 $X \times \Bbbk^r$ 关于第一分量的标准投射 $\pi : X \times \Bbbk^r \to X$ 就是平凡丛.

Definition 1.11. 设 X 是域 $\Bbbk$ 上拟仿射簇, 如果 $\xi : E \to X, \eta : E' \to X$ 均为 X 上向量丛, 如果正则映射 $\varphi : E \to E'$ 满足 $\eta\varphi = \xi$, 则称 φ 是向量丛 ξ 到 η 的**态射**. 于是可定义出 X 上 (拟仿射) **向量丛范畴 $\mathbf{Vec}(X)$**.

Remark 1.12. 因此 X 上的秩为 r 的向量丛 $\xi : E \to X$ 平凡当且仅当它在 X 上向量丛范畴中同构于 $\pi : X \times \Bbbk^r \to X$. Quillen-Suslin 定理说仿射空间 $\Bbbk^n$ 上的向量丛总平凡.

2 向量丛的截面

如果 $\mathcal{M}$ 是光滑流形, 那么 $\mathcal{M}$ 的光滑向量丛 $\xi:\mathcal{E}\to\mathcal{M}$ 的所有光滑截面构成的 $\mathbb{R}$-线性空间 $\Gamma(\mathcal{E})$ 上有自然的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模结构. 如果考虑 $\mathcal{M}$ 的切丛 $\pi:T\mathcal{M}\to\mathcal{M}$, 那么 $\Gamma(T\mathcal{M})=\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 是 $\mathcal{M}$ 上光滑向量场全体, 并且有 $\mathbb{R}$-Lie 代数同构 $\mathfrak{X}(\mathcal{M})\cong \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}C^\infty(\mathcal{M})$. 本节简要介绍拟仿射簇的 (正则) 截面.

设 X 是域 $\Bbbk$ 上拟仿射簇, $\xi:E\to X$ 是向量丛. 如果正则映射 $s:X\to E$ 满足 $\xi s=\mathrm{id}_X$, 则称 s 是向量丛 E 的**截面**. 记 E 的所有截面构成的集合为 $\Gamma(E)$, 我们将说明 $\Gamma(E)$ 上有自然的 $\mathcal{O}(X)$-模结构, 其中 $\mathcal{O}(X)$ 表示 X 的正则函数环. 因为每个 $p\in X$ 的纤维 $\xi^{-1}(p)$ 上有 $\Bbbk$-线性结构, 所以对 $s_1,s_2\in\Gamma(E)$, 可定义 $(s_1+s_2)(p)=s_1(p)+s_2(p)$, 右边的加法来自 $\xi^{-1}(p)$ 上的线性结构. 类似可定义 $\Gamma(E)$ 中截面关于 $\Bbbk$ 中元素的数乘, 由此可赋予 $\Gamma(E)$ 上 $\Bbbk$-线性结构. 如果 $f\in\mathcal{O}(X), s\in\Gamma(E)$, 通过定义 $(fs)(p)=f(p)s(p),\forall p\in X$, 不难看出 $fs\in\Gamma(E)$. 前面的讨论表明 $\Gamma(E)$ 上有自然的 $\mathcal{O}(X)$-模结构.

如果 $\xi:E\to X,\eta:E'\to X$ 均为 X 上向量丛, 并且有向量丛态射 $\varphi:E\to E'$, 那么任何 $s\in\Gamma(E)$ 诱导 $\varphi s\in\Gamma(E')$. 于是有 $\mathcal{O}(X)$-模同态 $\Gamma(\varphi)=\varphi_*:\Gamma(E)\to\Gamma(E'), s\mapsto\varphi s$. 由此可得 X 上向量丛范畴 $\mathbf{Vec}(X)$ 到模范畴 $\mathcal{O}(X)$-$\mathbf{Mod}$ 的共变函子 $\Gamma:\mathbf{Vec}(X)\to\mathcal{O}(X)$-$\mathbf{Mod}$, 称为 X 上**截面函子**.

Example 2.1. 设 X 是域 $\Bbbk$ 上拟仿射簇, 考虑标准投射 $\pi:X\times\Bbbk\to X$ 决定的平凡丛. 那么任何 π 的截面 $s:X\to X\times\Bbbk$ 满足存在唯一的正则函数 $\hat{s}:X\to\Bbbk$ 使得 $s(p)=(p,\hat{s}(p)),\forall p\in X$. 命 $\theta:\Gamma(\pi)\to\mathcal{O}(X), s\mapsto\hat{s}$. 易见 θ 是双射并且是 $\mathcal{O}(X)$-模同构. 因此可以把向量丛的截面理解为几何对象上函数的推广.

如果 $\mathcal{M}$ 是光滑流形, 同样可考虑 $\mathcal{M}$ 上光滑向量丛范畴 $\mathbf{Vec}(\mathcal{M})$ 以及通过取光滑向量丛的光滑截面自然诱导的截面函子 $\Gamma:\mathbf{Vec}(\mathcal{M})\to C^\infty(\mathcal{M})$-$\mathbf{Mod}$. Swan 定理说任何 $E\in\mathrm{ob}\mathbf{Vec}(\mathcal{M})$ 满足 $\Gamma(E)$ 是有限生成投射 $C^\infty(\mathcal{M})$-模. Serre-Swan 定理表明当 $\mathcal{M}$ 是连通光滑流形时, 若限制 Γ 为光滑向量丛范畴到有限生成投射 $C^\infty(\mathcal{M})$-模范畴的函子, 那么这给出向量丛范畴与光滑函数环上有限生成投射模范畴间的范畴等价. 并且若将该等价函子限制于平凡丛全子范畴, 它给出 $\mathcal{M}$ 上平凡丛范畴与有限生成自由 $C^\infty(\mathcal{M})$-模范畴间的范畴等价. 光滑向量丛的光滑截面全体构成的模是有限生成模的证明可参见 [Nes03, p.187, Corollary 12.28], 截面函子是忠实的满函子的证明可参见 [Nes03, p.188, Theorem 12.29], 光滑向量丛的光滑截面模是有限生成投射模的证明可参见 [Nes03, p.189, Theorem 12.32], 这里也证明了流形连通时, 截面函子是本质满的.

参考文献

[Lee12] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218. Springer Science & Business Media, 2012.

[Nes03] J. Nestruev. *Smooth manifolds and observables*, volume 220. Springer, 2003.

[SP94] I. R. Shafarevich and A.N. Parshin. *Algebraic geometry I: Algebraic curves, algebraic manifolds and schemes*. Springer, 1994.