群的自由积

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 11 月 3 日

任给一族群 $\{G_i|i \in I\}$,$I \neq \varnothing$ 是指标集, 如果群 P 以及群同态族 $\{j_i : G_i \to P|i \in I\}$ 满足对任给群同态族 $\{f_i : G_i \to G|i \in I\}$ 存在唯一的群同态 $\hat{f} : P \to G$ 使得 $\hat{f}j_i = f_i, \forall i \in I$, 即下图交换：

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & P \arrow[d, "\hat{f}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

则称 $(P, \{j_i : G_i \to P|i \in I\})$ 是群族 $\{G_i|i \in I\}$ 的**自由积**. 这份笔记的目的是记录群族自由积的具体构造.

Theorem. 对任给群族 $\{A_i|i \in I\}, I \neq \varnothing$, 该群族的自由积 $(P, \{j_i : A_i \to P|i \in I\})$ 存在 (故群范畴中任意一个群族的余积存在) 且在同构意义下唯一, 且每个 j_i 必是单同态.

Proof. 如果自由积存在, 我们说明每个 j_i 是单态：任给 $k \in I$, 当 $i \neq k$ 时, 定义 f_i 为平凡同态, 对 f_k, 定义为 A_k 上恒等态 $f_k = 1_{A_k}$, 由自由积的定义存在群同态 $\hat{f} : P \to G$ 使得 $\hat{f}j_i = f_i, \forall i \in I$, 特别地, 由 $1_{A_k} = \hat{f}j_k$ 知 j_k 是单射. 如果自由积存在, 不难证明其同构唯一性, 下面仅证明存在性. 对每个 $i \in I$, 命 $A_i^{\#} = \{(x, i)|x \in A_i - \{1_{A_i}\}\}$, 对 $a = (x, i), b = (y, i) \in A_i^{\#}$, 如果 $xy \neq 1_{A_i}$, 记 $ab = (xy, i)$ 并记 $a^{-1} = (x^{-1}, i)$; 如果 $xy = 1_{A_i}$, 称 $ab = 1_{A_i}$, 那么 $\{A_i^{\#}|i \in I\}$ 是不相交的集合族. 取集合 $\bigcup\limits_{i \in I} A_i^{\#}$ 外一个元素, 记为 1. 现在我们考虑集合 $S = (\bigcup\limits_{i \in I} A_i^{\#}) \bigcup \{1\}$ 上的序列全体 $\{f : \mathbb{Z}_{>0} \to S\}$, 如果 f 满足 $f(n) = s_n$, 记 f 为 $(s_1, s_2, ..., s_n, ...)$. 如果序列 $(s_1, s_2, ...)$ 满足：(1) 对相邻的 s_i, s_{i+1}, 如果都不为 1, 那么它们在不同的 $A_k^{\#}$ 中; (2) 如果正整数 i 满足 $s_i = 1$, 那么 $s_n = 1, \forall n \geq i$, 则称序列 $(s_1, s_2, ...)$ 是 S 上一个既约字. 记 P 为所有既约字构成的集合, 称 $(1, 1, 1, ...)$ 为空字, 记作 1_P, 对非空的既约字 $(a_1, a_2, ..., a_m, 1, ...)$ 这里 $a_m \neq 1$, 记为 $a_1a_2 \cdots a_m$. 根据上述记号, 易见对非空的既约字 $a_1a_2 \cdots a_n$ 与 $b_1b_2 \cdots b_m$, $a_1a_2 \cdots a_n = b_1b_2 \cdots b_m$ 当且仅当 $n = m$ 且 $a_k = b_k, \forall 1 \leq k \leq n$. 现在在 P 上定义二元运算：对任给 $x \in P$, 定义 $1_Px = x1_P = x$. 对非空的既约字 $a_1a_2 \cdots a_n, b_1b_2 \cdots b_m \in P$, 当 $n \leq m$ 时, 如果 a_n 与 b_1 在不同的 $A_k^{\#}$ 中, 那么 $a_1a_2 \cdots a_nb_1b_2 \cdots b_m$ 是既约字, 此时定义 $(a_1a_2 \cdots a_n)(b_1b_2 \cdots b_m) = a_1a_2 \cdots a_nb_1b_2 \cdots b_m$; 如果 a_1 与 b_n 在同一个 $A_k^{\#}$ 中且 $a_nb_1 \neq 1_{A_k}$, 则 $a_1a_2 \cdots (a_nb_1)b_2 \cdots b_m$ 是既约字, 定义 $(a_1a_2 \cdots a_n)(b_1b_2 \cdots b_m) = a_1a_2 \cdots (a_nb_1)b_2 \cdots b_m$. 如果 a_1, b_n 在同一个 $A_k^{\#}$ 中且 $a_nb_1 = 1_{A_k}$, 如下定义一个正整数 l: 当存在 $1 \leq k \leq n$ 使得 a_{n+1-k} 与 b_k 不在同一个 $A_j^{\#}$ 中或 $a_{n+1-k}b_k$ 在同一个 $A_j^{\#}$ 且它们乘积不是单位元时, 定义 l 为满足上述性质的最小正整数, 否则定义 $l = n + 1$.

当 $l \leq n$ 时, 如果 a_{n+1-l}, b_l 不在同一个 $A_k^{\#}$ 中, 定义 $(a_1a_2\cdots a_n)(b_1b_2\cdots b_m) = a_1a_2\cdots a_{n+1-l}b_lb_{l+1}\cdots b_m$, 否则定义为 $(a_1a_2\cdots a_n)(b_1b_2\cdots b_m) = a_1a_2\cdots(a_{n+1-l}b_l)b_{l+1}\cdots b_m$, 当 $l = n+1$ 时, 如果 $n = m$, 定义 $(a_1a_2\cdots a_n)(b_1b_2\cdots b_m) = 1_p$, 否则定义 $(a_1a_2\cdots a_n)(b_1b_2\cdots b_m) = b_{n+1}\cdots b_m$, 类似可定义 $n < m$ 的情形. 易见上述运算作为二元运算定义合理且有单位元 1_P, 任意非空字 $a_1a_2\cdots a_n$, 有逆元 $a_n^{-1}a_{n-1}^{-1}\cdots a_1^{-1}$, 故要说明 P 关于上述二元运算构成群只需证明结合律成立. 对每个 $s \in S = (\bigcup\limits_{i\in I} A_i^{\#})\bigcup\{1\}$, 记 $\sigma_s : P \to P$ 是由 s 诱导的左乘变换, 即：当 $s = 1$ 时, σ_1 是 P 上恒等映射, 当 $s \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i^{\#})$ 时, σ_s 满足 $\sigma_s(1_P) = s, \sigma_s(a_1\cdots a_n) = (s)(a_1\cdots a_n)$, 等式右边是既约字的乘法. 记 $A(P)$ 是集合 $\{\sigma_s | s \in S\}$ 在 P 上对称群 $S(P)$ 中生成的子群, 则有保持单位元与乘法的双射 $\varphi : P \to A(P)$ 满足 $\varphi(a_1a_2\cdots a_n) = \sigma_{a_1}\sigma_{a_2}\cdots\sigma_{a_n}$, 于是 $A(P)$ 中的结合律保证了 P 中结合律, 故 P 关于既约字乘法构成群. 对每个 $i \in I$, 定义 $j_i : A_i \to P$ 满足 $j_i(1_{A_i}) = 1_P$, 当 $x \neq 1_{A_i}$ 时 $j_i(x)$ 为 $a = (x, i) \in A_i^{\#}$ 在 P 中对应的既约字 a, 易见 j_i 是单群同态. 最后验证 P 以及单态族 $\{j_i : A_i \to P | i \in I\}$ 是群族 $\{A_i | i \in I\}$ 的自由积. 任给群同态族 $\{f_i : A_i \to G | i \in I\}$, 命 $\hat{f} : P \to G$ 为满足 $\hat{f}(1_P) = 1_G, \hat{f}(a_1\cdots a_n) = f_{k_1}(x_1)\cdots f_{k_n}(x_n)$, 其中 $a_t = (x_t, k_t) \in A_{k_t}^{\#}, 1 \leq t \leq n$, 直接计算知 $\hat{f}$ 是群同态且 $\hat{f}j_i = f_i, \forall i \in I$, 如果还有群同态 $\hat{g} : P \to G$ 使下图交换：

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & P \arrow[d, "\hat{g}"] \\
 & G
\end{tikzcd}$$

那么对任一非空既约字 $a_1\cdots a_n \in P, a_t \in A_{k_t}^{\#}, 1 \leq t \leq n$, 有

$$\hat{g}(a_1\cdots a_n) = \hat{g}(a_1)\hat{g}(a_2)\cdots\hat{g}(a_n) = f_{k_1}(a_1)\cdots f_{k_n}(a_n) = \hat{f}(a_1\cdots a_n),$$

由此得到唯一性. 故 $(P, \{j_i : A_i \to P | i \in I\})$ 是群族 $\{A_i | i \in I\}$ 的自由积. $\square$