P.I.D. 上有限生成模结构理论

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 7 月 2 日

在 2023 年秋季学期, 我担任复旦数院《现代代数学 II(H)》的课程助教, 课程内容主要由模论和有限群表示论构成. 趁此机会我将过去 P.I.D. 上有限生成模的结构理论笔记中没有涉及到的内容和课程中部分优质习题以及一些新的体会与收获添加入这份笔记. 正文主要由三部分构成:
(1) 集合论与自由模的基本性质 (例如见 [引理1.3], [命题1.6], [命题1.12] 和 [推论1.14]), 集合论方面包含"选择公理 ⇒Zorn 引理 ⇒ 良序原理"的证明. 自由模部分包含含幺交换环上 Cayley-Hamilton 定理的证明.
(2) P.I.D. 上自由模与平坦模的基本性质 (例如 P.I.D. 上模的投射性与自由性等价; 模的平坦性与无挠性等价)、不变因子与初等因子形式的 P.I.D. 上有限生成模的结构定理证明 (见 [定理2.12], [定理2.13] 和 [定理2.15]).
(3) P.I.D. 上有限生成模结构定理在矩阵 Jordan 标准型以及有理标准型上的应用, 并联系起了线性代数中矩阵相似理论中的一些经典结论 (见 [定理3.12], [推论3.14], [推论3.15] 和 [推论3.16]).

由于水平有限, 虽然我全力以赴, 但还是无法避免笔记中存在不足与错误, 欢迎指出, 谢谢.

目录

1 基本准备

在正式讨论 P.I.D. 上有限生成模的结构之前, 对自由模的结构与基本性质有更多的认识是不无裨益的.

1.1 集合论基础

在代数的非构造性的对象存在性证明中, 我们常常需要借助 Zorn 引理或是它的等价形式 (选择公理、良序原理). 本节我们承认下面的选择公理, 并利用选择公理证明 Zorn 引理、用 Zorn 引理证明良序原理.

Axiom of Choice (E. Zermelo)**.** 设 $\{X_i\}_{i\in\Lambda}$ 是非空集合构造的集族, 那么存在映射

$$\mathcal{F}:\{X_i\}_{i\in\Lambda}\to\bigcup_{i\in\Lambda}X_i$$

使得 $\mathcal{F}(X_i)\in X_i,\forall i\in\Lambda$. 这里的 $\mathcal{F}$ 一般被称为**选择函数**.

Zorn's Lemma (Kuratowski-Zorn)**.** 给定非空偏序集 $(X,\leq)$, 若该偏序集的任一全序子集 (一些文献中也称为链) 在 X 中有上界, 则 X 中存在极大元.

我们先说明它等价于:(**Zorn 引理的第二形式**) 给定集合 S, 设 T 是由 S 的一些子集构成的非空集合, 若偏序集 $(T,\subseteq)$ 满足 T 中任意全序子集有上界, 则 T 中存在极大元. 首先第二形式是第一形式的特殊情形, 故只需说明第二形式蕴含第一形式:现设 $(X,\leq)$ 是非空偏序集, 对每个 $x\in X$ 作集合

$$q(x)=\{w\in X|w\leq x\},$$

则对任给 $x,y\in X$ 有 $x\leq y\Leftrightarrow q(x)\subseteq q(y)$. 进而对 X 中任意全序子集 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 有 $\{q(x_\alpha)\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为非空偏序集 $(\{q(x)|x\in X\},\subseteq)$ 的全序子集, Zorn 引理第二形式知该偏序集有极大元 $q(m),m\in X$, 直接验证可得 m 为 X 中的一个极大元. 所以第一形式与第二形式等价. 下面用选择公理证明 Zorn 引理第一 (经典) 形式.

Proof. 我们沿用前面的记号. 现设 $(X,\leq)$ 是非空偏序集, 并令 $\mathfrak{X}$ 是 X 中所有全序子集构成的集合, 则 $(\mathfrak{X},\subseteq)$ 也是非空偏序集, 且容易验证具备下述性质:
- 对任给 $A\in\mathfrak{X}$ 存在 $x_0\in X$ 使得 $A\subseteq q(x_0)$,
- 对任给 $A\in\mathfrak{X}$, A 的子集也在 $\mathfrak{X}$ 中,
- 对任给 $(\mathfrak{X},\subseteq)$ 中全序子集 $\mathcal{C}$, $\bigcup\limits_{A\in\mathfrak{C}}A$ 仍在 $\mathfrak{X}$ 中.

接下来我们断言 $(\mathfrak{X},\subseteq)$ 存在极大元, 一旦证明了这一点, 便可以得到 X 中存在极大元 m, 这是因为若设 M 是 $(\mathfrak{X},\subseteq)$ 的一个极大元, 则存在 $m\in X$ 使得 $M\subseteq q(m)$, 假设 m 不是 $(X,\leq)$ 中极大元, 则存在 $m_1\neq m$ 使得 $m\leq m_1$, 从而 $M\cup\{m_1\}\in\mathfrak{X}$ 且 $M\subsetneq M\cup\{m_1\}$ 便得到矛盾. 因此 m 必定是极大元, 于是问题化归为证明 $(\mathfrak{X},\subseteq)$ 存在极大元, 下面来证明这个断言.

依**选择公理**, 存在选择函数 $f:\mathscr{P}(X)^*\to X$ 使得 $f(A)\in A,\forall A\in\mathscr{P}(X)^*$, 这里 $\mathscr{P}(X)^*$ 表示 X 的所有非空子集构成的集合. 命

$$\hat{A}=\{x\in X|A\cup\{x\}\in\mathfrak{X}\},$$

则 $A\subseteq \hat{A}$. 现定义映射 $g:\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}$ 满足

$$g(A)=\begin{cases} A\cup\{f(\hat{A}-A)\},\ \hat{A}-A\neq\varnothing,\\ \qquad\qquad\qquad A,\ \hat{A}-A=\varnothing.\end{cases}$$

于是根据 g 的定义不难看到 $A\in\mathfrak{X}$ 是极大的当且仅当 $g(A)=A$. 因此, 要证明 $\mathfrak{X}$ 中存在极大元, 只需证明存在 $A\in\mathfrak{X}$ 使得 $g(A)=A$.

为叙述上的便利, 我们临时引入一个定义：若 $\mathfrak{X}$ 的子集 $\mathfrak{T}$ 满足

- $\varnothing\in\mathfrak{T}$,
- 对任给 $A\in\mathfrak{T}$, 有 $g(A)\in\mathfrak{T}$,
- 对任给 $(\mathfrak{T},\subseteq)$ 中全序子集 $\mathcal{C}$, $\bigcup\limits_{A\in\mathfrak{C}} A$ 仍在 $\mathfrak{T}$ 中.

则称 $\mathfrak{T}$ 是一个**塔**. 根据 $\mathfrak{X}$ 的性质知 $\mathfrak{X}$ 是一个塔, 因此塔这个概念确实有存在的例子. 不难看到任意多个塔的交仍是塔, 故全体塔之交 $\mathfrak{T}_0$ 也是塔. 我们断言 $\mathfrak{T}_0$ 是全序的, 一旦说明了这一点, 则由塔的性质可知 $\bigcup\limits_{A\in\mathfrak{T}_0} A\in\mathfrak{T}_0$, 进而 $g(\bigcup\limits_{T\in\mathfrak{T}_0} T)\in\mathfrak{T}_0$, 这蕴含着

$$g(\bigcup_{T\in\mathfrak{T}_0} T)=\bigcup_{T\in\mathfrak{T}_0} T,$$

由此便可知 $A=\bigcup\limits_{T\in\mathfrak{T}_0} T$ 为 $\mathfrak{X}$ 中极大元.

现在说明 $\mathfrak{T}_0$ 确实是全序的. 若 $\mathfrak{T}_0$ 中的元素 C 满足 $C\subseteq A$ 或 $A\subseteq C,\forall A\in\mathfrak{T}_0$, 则称 C 是**可比的**. 易见 $\varnothing$ 是可比的, 因此可比集确实存在. 下面我们证明可比集的几个性质, 现任意取定可比集 C.

- 若 $A\in\mathfrak{T}_0$ 是 C 的真子集, 则 $g(A)\subseteq C$. 首先由塔的定义知 $g(A)\in\mathfrak{T}_0$, 于是由 C 的可比性知 $C\subsetneq g(A)$ 或 $g(A)\subseteq C$. 假设 $g(A)\subseteq C$ 不成立, 则 $A\subsetneq C\subsetneq g(A)$, 这与 $g(A)$ 至多比 A 多一个元素矛盾.
- 令 $\mathscr{U}=\{A\in\mathfrak{T}_0|A\subseteq C$ 或 $g(C)\subseteq A\}$, 则 $\mathscr{U}$ 是塔. 首先 $\varnothing\subseteq C$ 表明 $\varnothing\in\mathscr{U}$. 对任给 $A\in\mathscr{U}$, 若 $A\subsetneq C$, 则由 $g(A)\subseteq C$ 知 $g(A)\in\mathscr{U}$; 若 $A=C$, 则 $g(A)=g(C)$ 保证了 $g(A)\in\mathscr{U}$; 若 $C\subsetneq A$, 则由 $A\in\mathscr{U}$ 知 $g(C)\subseteq A$, 从而由 $A\subseteq g(A)$ 知 $g(C)\subseteq g(A)$, 故 $g(A)\in\mathscr{U}$. 对 $\mathscr{U}$ 中任意全序子集 $\{A_i\}_{i\in\Lambda}$, 若存在 $i_0\in\Lambda$ 使得 A_{i_0} 不是 C 的子集, 则 $g(C)\subseteq A_{i_0}$, 从而由 $g(C)\subseteq\bigcup\limits_{i\in\Lambda}A_i$ 知 $\bigcup\limits_{i\in\Lambda}A_i\in\mathscr{U}$; 若对任给 $i\in\Lambda$ 有 $A_i\subseteq C$, 则由 $\bigcup\limits_{i\in\Lambda}A_i\subseteq C$ 得 $\bigcup\limits_{i\in\Lambda}A_i\in\mathscr{U}$. 因此 $\mathscr{U}$ 是塔.

注意到 $\mathscr{U}\subseteq\mathfrak{T}_0$ 且 $\mathscr{U}$ 是塔, 因此 $\mathscr{U}=\mathfrak{T}_0$. 于是对任给可比集 C, 有 $A\subseteq g(C)$ 或 $g(C)\subseteq A,\forall A\in\mathfrak{T}_0$, 即 $g(C)$ 可比. 不难证明任意多个可比集之并仍可比, 因此结合 $\varnothing$ 可比立即得到可比集全体构成塔. 所以可比集全体构成的集合就是 $\mathfrak{T}_0$, 换句话说, $\mathfrak{T}_0$ 中任一元素为可比集, 从而 $\mathfrak{T}_0$ 是全序的, 于是根据我们前面的讨论知 Zorn 引理成立. $\square$

Remark 1.1. Georg Cantor(德国数学家, 1845-1918) 于 1883 年在他的论文中首次提出良序原理 (Well-ordering theorem), 1904 年 Zermelo(德国数学家, 1871-1953) 给出了选择公理的严格叙述并证明了其与良序原理等价. 1922 年 Kazimierz Kuratowski(波兰数学家, 1896-1980) 证明了 Zorn 引理, 1935 年, Max Zorn(德国数学家, 1906-1993) 独立于前者也证明了 Zorn 引理.

下面我们应用 Zorn 引理来证明良序原理.

Well-Ordering Theorem (G. Cantor)**.** 任给非空集合 X, 存在 X 上偏序关系 $\leq$ 使得 $(X,\leq)$ 为良序集.

Proof. 命 $S=\{(A,\leq_A)|A\subseteq X$ 且 $\leq_A$ 是A上的一个二元关系使得$(A,\leq_A)$是良序集$\}$, 首先 S 是非空的, 因为 X 中单点集 $\{x_0\}$ 关于二元关系 $\{(x_0,x_0)\}$ 构成良序集. 在 S 上定义二元关系：

$$(A,\leq_A)\leq(B,\leq_B)\Rightarrow A\subseteq B,\leq_A\subseteq\leq_B \text{ 且对任给} b\in B-A, a\leq_B b,\forall a\in A.$$

易见该二元关系满足自反性与反对称性, 下面验证 $\leq$ 是传递的, 设 $(A,\leq_A),(B,\leq_B),(C,\leq_C)\in S$ 满足 $(A,\leq_A)\leq(B,\leq_B)$ 以及 $(B,\leq_B)\leq(C,\leq_C)$, 易知 $A\subseteq C,\leq_A\subseteq\leq_C$. 任取 $c\in C-A$, 如果 $c\notin B$, 则由 $a\in B$ 得 $a\leq_C c$; 如果 $c\in B$, 则由 $c\notin A$ 得到 $a\leq_B c$, 从而 $a\leq_C c$, 所以 $(S,\leq)$ 是非空偏序集. 任取 S 的一个全序子集 $\{(A_\alpha,\leq_{A_\alpha})\}_{\alpha\in\Lambda}$(不妨设指标集 $\Lambda\neq\varnothing$ 且 A_α 不全是空集), 我们断言该全序子集在 S 中有上界. 命

$$A=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha,\leq_A=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\leq_{A_\alpha},$$

易见 $(A,\leq_A)$ 是全序集, 任取 A 的一个非空子集 $\hat{A}$, 则存在某个 A_{α_0} 使得 $\hat{A}\bigcap A_{\alpha_0}\neq\varnothing$, 设 a_0 是 $A_{\alpha_0}\cap\hat{A}$ 中最小元, 我们用反证法说明 a_0 是 $\hat{A}$ 中最小元, 若不然, 则存在 $a_1\in\hat{A}$ 使得 $a_1<_A a_0$(这里表示 $a_1\leq_A a_0$ 但 $a_1\neq a_0$), 于是 a_1 属于某个 A_{α_1} 并且 $A_{\alpha_1}\subsetneq A_{\alpha_0}$, 这与 a_0 是 A_{α_0} 中最小元矛盾, 所以 $(A,\leq_A)$ 是良序集且容易验证为上述全序子集的上界, 断言得证. 依 Zorn 引理, $(S,\leq)$ 有极大元 $(M,\leq_M)$, 下面说明 $M=X$, 若不然, 取 $x_0\in X$ 使得 $x_0\notin M$, 命 $\overline{M}=M\bigcup\{x_0\}$ 以及 $\leq_{\overline{M}}=\leq_M\bigcup\{(x_0,x)|x\in\overline{M}\}$, 易见 $(\overline{M},\leq_{\overline{M}})$ 是良序集且 $(M,\leq_M)<(\overline{M},\leq_{\overline{M}})$, 这与 $(M,\leq_M)$ 的极大性矛盾, 所以 $M=X$. □

Remark 1.2. 良序原理保证了我们能够在很多场景下使用超限归纳法.

1.2 自由模基础

本节我们回顾一些自由模的基本事实, 首先利用良序原理可以导出具有无穷基的自由模任意两个基等势：

Lemma 1.3. 设含幺环 R 上的自由模 F 满足有一个基 X 是无穷集, 则 F 的任意两个基等势.

Proof. 设 Y 也是 F 的一个基, 我们说明 X 与 Y 等势. 首先 Y 不可能是有限的, 若不然, X 可以被 X 的一个有限子集 R-线性表出, 进而得到 X 是 R-线性相关的, 矛盾. 命 $F(Y)$ 是由 Y 所有有限子集构成的集合, 则 $|F(Y)|=|Y|$(一般地, 对任给无限集 A, 易见 $|A|\leq|F(A)|$. 设 $A=\{a_i|i\in\Lambda\}$, 由良序原理存在 Λ 上二元关系 $\leq$ 使得 $(\Lambda,\leq)$ 是良序集. 记 $A^0=\{\varnothing\}$, 则 $\psi:F(A)\to\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}A^n,S\mapsto\psi(S)$, 这里 $\psi(S)$ 满足当 S 是空集时, $\psi(\varnothing)=\varnothing$, 当 S 非空时, 设 $S=\{a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_m}\},i_1<i_2<\cdots<i_m$, $\psi(S)=(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_m})\in A^m$. 易见 ψ 是单射, 故 $|F(A)|\leq|\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}A^n|\leq|A|\aleph_0=|A|$. 故由 Schröder-Bernstein 定理可知 $|A|=|F(A)|$). 命 $f:X\to F(Y),x\mapsto f(x)$ 是满足对任给 $x\in X$, 存在唯一的 $r_1,r_2,...,r_m\neq 0\in R,y_1,y_2,...,y_m\in Y$ 使得 $x=r_1y_1+r_2y_2+\cdots+r_my_m$, 有 $f(x)=\{y_1,y_2,...,y_m\}$. 易见 f 是定义合理的映射且对任何 Y 的有限子集 T 有 $f^{-1}(T)$ 是 X 中有限集. 设 $X=\{x_\alpha|\alpha\in I\}$, 则由良序原理存在 I 上二元关系 $\leq$ 使得 $(I,\leq)$ 是良序集. 命 $\varphi:X\to\mathbb{Z}_{>0}\times F(Y),x\mapsto(k,f(x))$, 这里 k 满足：设 $f^{-1}(f(x))=\{x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},...,x_{\alpha_t}\},\alpha_1<\cdots<\alpha_t$, 由于 $x\in f^{-1}(f(x))$, 故存在唯一的 $1\leq k\leq t$ 使得 $x=x_{\alpha_k}$. 易见 φ 是定义合理的单射, 所以 $|X|\leq\aleph_0|F(Y)|=|F(Y)|=|Y|$(也可以直接利用 $X=\bigcup\limits_{T\in F(Y)}f^{-1}(T)$ 得到 $|X|\leq|F(Y)|\aleph_0=|F(Y)|=|Y|$). 同理可得 $|Y|\leq|X|$, 所以由 Schröder-Bernstein 定理得到 $|X|=|Y|$. □

Definition 1.4. 如果含幺环 R 满足只要正整数 m,n 满足 $R^n\cong R^m$ 就有 $n=m$, 则称 R 具有**左不变基性质**.

Remark 1.5. 从 [引理1.3] 立即看到含幺环有左不变基性质当且仅当任何自由左 R-模的任意两个基等势.

Proposition 1.6. 含幺交换环具有左不变基性质. 特别地, 域上线性空间维数定义合理.

Proof. 设 R 是含幺交换环, F 是自由 R-模且存在一个基是有限集 $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, 任取一个生成元集 $Y=\{y_1,y_2,...,y_m\}$, 我们断言 $m\geq n$, 易见存在 $m\times n$ 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $n\times m$ 阶矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times m}$ 使得

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}.$$

由此易得 $BA=I_n$. 假设 $m<n$, 则

$$\left(B\ O_{n\times(n-m)}\right)\begin{pmatrix} A\\ O_{(n-m)\times n}\end{pmatrix}=I_n,$$

从而矩阵 $\left(B\ O_{n\times(n-m)}\right)$ 的行列式是 R 中可逆元, 矛盾. 断言得证. 由对称性即得. □

我们把含幺交换环上自由模 F 的基的势记作 $\text{rank}(F)$, 称为自由模 F 的**秩**, 上述命题表明含幺交换环上自由模的秩是定义合理的.

Example 1.7. 一般地, 非交换环未必具有左不变基性质, 例如考虑除环 Δ 上可数维线性空间 V, 设 $X=\{x_n|n\in\mathbb{Z}_{>0}\}$ 是 V 的一个基, 则 $V=\oplus_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}\Delta x_n$, 命 $R=\text{End}(_\Delta V)$ 是非交换含幺环, 设 φ 是满足 $\varphi(x_{2k})=0,\varphi(x_{2k-1})=x_k,\forall k\geq 1$ 的 Δ-线性变换, ψ 是满足 $\psi(x_{2k})=x_k,\psi(x_{2k-1})=0,\forall k\geq 1$ 的 Δ-线性变换, θ_1 是满足 $\theta_1(x_k)=x_{2k-1},\forall k\geq 1$ 的 Δ-线性变换, θ_2 是满足 $\theta_2(x_k)=x_{2k},\forall k\geq 1$ 的 Δ-线性变换, 那么 $\varphi\theta_1=1_V,\psi\theta_2=1_V,\varphi\theta_2=0,\psi\theta_1=0,\theta_1\varphi+\theta_2\psi=1_V$, 由此可知 $\{\varphi,\psi\}$ 是 R 作为左 R-模的一个 R-基, 由 $\{1_V\}$ 也是 R 的一个 R-基知 R 不具备不变基性质. 此时作为 R-模有 $R\cong R^2=R\times R$, 易证对任给正整数 n 有左 R-模同构 $R\cong R^n$. 故对任何正整数 n, R 都有个 R-基恰好 n 个元素.

Proposition 1.8. 设含幺环 R 是左 Noether 环, 则 R 有左不变基性质.

Proof. 只需证明对任给正整数 m,n, 如果有模同构 $R^n\cong R^m$, 那么 $n=m$. 现设 $R^n\cong R^m$, 则存在模同构 $f:R^n\to R^m$. 假设 $m\neq n$, 不妨设 $m>n$, 则存在满同态 $g:R^m\to R^n$ 使得 $\text{Ker}g\neq\{0\}$. 由此得到 R^n 上的满自同态 $gf:R^n\to R^n$, 于是由 R^n 作为左 R-模是 Noether 模 (对正整数 n 作归纳, 当 $n=1$ 时结论直接成立, 假设对正整数 $n\geq 2$, R^{n-1} 作为左 R-模是 Noether 模, 那么 $R^n/\{0\}\times R^{n-1}\cong R$ 是 Noether 模, 结合 $\{0\}\times R^{n-1}\cong R^{n-1}$ 是 Noether 模知 R^n 也 Noether) 知 gf 是 R^n 上的自同构, 由此得到 g 是单射, 矛盾. □

Theorem 1.9 (Leavitt, 1962)**.** 设 R 与 S 是含幺环, 如果存在 R 到 S 的保幺环同态 $f:R\to S$, 那么 S 有左不变基性质蕴含 R 有左不变基性质.

Proof. 设正整数 n,m 使得 $R^n\cong R^m$ 作为左 R-模同构. 利用保幺环同态 $f:R\to S$ 可以赋予 S 上 R-R 双模结构 (这里使用了 f 保持幺元以及 R,S 是非零环, 易见零环不具备不变基性质)：$R\times S\to S,(r,s)\mapsto f(r)s, S\times R\to S,(s,r)\mapsto sf(r)$. 于是由 S 的右 R-模结构以及左 R-模同构 $R^n\cong R^m$ 导出左 S-模同构 $S\otimes_R R^n\cong S\otimes_R R^m$. 下面说明对每个正整数 ℓ 有左 S-模同构 $S\otimes_R R^\ell\cong S^\ell$. 易见 $S\times R^\ell\to S^\ell,(s,(r_1,r_2,...,r_\ell))\mapsto(sr_1,sr_2,...,sr_\ell)$ 是 R-平衡映射, 这导出加群同态 $\psi:S\otimes_R R^\ell\to S^\ell$ 使得 $\psi(s\otimes(r_1,r_2,...,r_\ell))=(sr_1,sr_2,...,sr_\ell),\forall s\in S,r_1,...,r_\ell\in R$, 易见这是左 S-模同态且有逆映射 $\varphi:S^\ell\to S\otimes_R R^\ell,(s_1,s_2,...,s_\ell)\mapsto s_1\otimes(1_R,0,...,0)+s_2\otimes(0,1_R,0,...,0)+\cdots+s_\ell\otimes(0,...,0,1_R)$, 因此我们有左 S-模同构 $S\otimes_R R^\ell\cong S^\ell,\forall\ell\geq 1$. 从而有左 S-模同构 $S^n\cong S\otimes_R R^n\cong S\otimes_R R^m\cong S^m$, 由 S 具有左不变基性质得到 $m=n$, 由此得到 R 具有左不变基性质. □

下面说明含幺交换环上自由模的自由子模秩不超过大模的秩, 在此前需要：

Cayley–Hamilton theorem. 设 R 是含幺交换环, $A=(a_{ij})_{n\times n}\in M_n(R)$,

$$f(x)=|xI_n-A|=\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn} \end{vmatrix}\in R[x]$$

是 A 的特征多项式, 则 $f(A)=O$.

Proof. 因为 R 是含幺交换环, 所以 $R[x]$ 也是含幺交换环, 对 $xI_n-A\in M_n(R[x])$, 设 $B(x)\in M_n(R[x])$ 是其伴随矩阵, 那么有 $B(x)(xI_n-A)=|xI_n-A|I_n=f(x)I_n$, 因为 $B(x)$ 的元素均为 xI_n-A 元素的代数余子式, 故都是 R 上次数不超过 $n-1$ 的多项式, 设

$$B(x)=B_{n-1}x^{n-1}+B_{n-2}x^{n-2}+\cdots+B_1x+B_0,\text{其中}B_0,B_1,...,B_{n-1}\in\mathrm{M}_n(R),$$

则

$$B(x)(xI_n-A)=B_{n-1}x^n+(B_{n-2}-B_{n-1}A)x^{n-1}+\cdots+(B_0-B_1A)x-B_0A.$$

设 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in R[x]$, 那么

$$B(x)(xI_n-A)=I_nx^n+a_{n-1}I_nx^{n-1}+\cdots+a_1I_nx+a_0I_n,$$

所以得到矩阵等式:

$$B_{n-1}=I_n,B_{n-2}-B_{n-1}A=a_{n-1}I_n,...,B_1-B_2A=a_2I_n,B_0-B_1A=a_1I_n,-B_0A=a_0I_n.$$

从而 $f(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I_n=-B_0A+(B_0-B_1A)A+\cdots+(B_{n-2}-B_{n-1}A)A^{n-1}+B_{n-1}A^n=O$, 由此得到 $f(A)=O$. □

紧接着我们介绍两个 Cayley-Hamilton 定理的应用 (可直接跳至 [命题1.12]).

Corollary 1.10. 设 R 是含幺交换环, M 是有限生成 R-模, I 是 R 的理想. 如果 $\varphi \in \mathrm{End}_R M$ 满足 $\varphi(M) \subseteq IM$, 那么存在正整数 n 和 $a_0, ..., a_{n-1} \in I$ 使得 $\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \cdots + a_1\varphi + a_0\mathrm{id}_M = 0$.

Proof. 设 M 可由 $x_1, ..., x_n$ 生成, 那么根据 $\varphi(M) \subseteq IM$, 存在 $A \in \mathrm{M}_n(I)$ 使得 $\varphi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n)A$. 于是由 Cayley-Hamilton 定理知 φ 满足矩阵 A 的特征多项式, 由此便得结论. □

Corollary 1.11. 设 R 是含幺环, Z 是 R 的中心子环 (即含幺子环 $Z \subseteq Z(R)$). 如果 R_Z 是有限生成模, 那么 R 是 Z 上仿射代数且 R 中任何元素是 Z 上整元 (即满足 Z 上某个首一多项式).

Proof. 只需验证 R 中任何元素 b 满足 Z 上某个首一多项式. 考虑左乘变换 $\varphi = b_l : R \to R, x \mapsto bx$, 则 $\varphi \in \mathrm{End}_Z R$. 在 [推论1.10] 中取 $I = Z$, 则存在 Z 上首一多项式 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in Z[x]$ 使得 $\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \cdots + a_1\varphi + a_0\mathrm{id}_R = 0$. 即 $(b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1b + a_0)R = 0$. 因此 $f(b) = 0$. □

Proposition 1.12. 设 R 是含幺交换环, M 是秩为 n 的自由 R-模, N 是 M 的子模且也是自由 R-模, 那么 $\mathrm{rank}(N) \leq n$. 特别地, 如果正整数 m, n 使得存在 R^m 到 R^n 的单 R-模同态, 那么 $m \leq n$.

Proof. 假设 $\mathrm{rank}(N) > n$, 那么存在正整数 $m > n$ 以及 $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ 使得 $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ 是 N 某个基的子集. 于是 R 上存在 $m \times n$ 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 使得

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

其中 $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ 是 M 的一个基. 记 $B = \left(A\, O_{m\times(m-n)}\right) \in \mathrm{M}_m(R)$, 那么对任何 $k_1, k_2, ..., k_m \in R$, 只要 $(k_1, k_2, ..., k_m)B = (0, 0, ..., 0)$, 就有 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$. 依 Cayley-Hamilton 定理, 存在 R 上首一多项式零化矩阵 B, 设 $m(x) = x^r + b_{r-1}x^{r-1} + \cdots + b_1x + b_0$ 是 B 在 R 上的首一最小多项式, 我们断言 $b_0 \neq 0$, 否则由 $(B^{r-1} + b_{r-1}B^{r-2} + \cdots + b_1I_n)B = O$ 得到 $B^{r-1} + b_{r-1}B^{r-2} + \cdots + b_1I_n = O$, 这与 $m(x)$ 的最小性矛盾. 对矩阵等式 $B^r + b_{r-1}B^{r-1} + \cdots + b_1B + b_0I_n = O$, 两边作用列向量 $(0, 0, ..., 0, 1_R)$ 可得 $b_0 = 0$, 矛盾. 所以 $\mathrm{rank}(N) \leq n$. □

Remark 1.13. 因此一旦对正整数 m, n 使得存在 R^m 到 R^n 的满 R-模同态, 那么 $m \geq n$.

Corollary 1.14. 设 R 是含幺交换环, M 是自由 R-模, N 是 M 的子模且 N 也自由, 那么 $\mathrm{rank}(N) \leq \mathrm{rank}(M)$.

Proof. 根据前面的命题只需考虑 N 与 M 的秩都不是有限的情况. 设 Y 是 N 的一个基, X 是 M 的一个基, 那么由 X 是无穷集知由 X 所有有限子集构成的集合 $F(X)$ 与 X 等势, 即 $|X| = |F(X)|$. 命 $f : Y \to F(X)$ 是将每个 $y \in Y$ 映射到被 X 中 R-线性表出系数非零的元素构成的集合. 由 [引理1.3] 的证明过程可知对每个 $T \in F(X)$, 集合 $f^{-1}(T)$ 是有限集, 所以由 $Y = \bigcup\limits_{T\in F(X)} f^{-1}(T)$ 可知

$$\mathrm{rank}(N) = |Y| \leq |F(X)|\aleph_0 = |X|\aleph_0 = |X| = \mathrm{rank}(M).$$

□

通过前面的结论我们不难看到对含幺交换环 R 上自由模 R^n 内任意 m 个元素构成的集合 X, 只要 $m > n$, 那么 X 是 R-线性相关的. 这一事实也可以由下面更强的结论导出.

Proposition 1.15. 设 A 是含幺交换环 R 上 n 阶方阵且 $\det A = 0$, 那么线性方程组 $Ax = 0$ 在 R^n 中存在非零解. 特别地, 对任何正整数 $m > n$, 由 n 个系数来自 R 的 m 元齐次线性方程组在 R^m 中有非零解.

Proof. 对方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 记 a_{ij} 对应的代数余子式是 A_{ij}, 那么对任给 $1 \le k \le n$ 总有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0, \forall 1 \le i \le n,$$

这里当 $i = k$ 时上式也为零的原因是 $\det A = 0$. 如果 A 的伴随阵 $A^* \neq O$, 即存在某个代数余子式 $A_{kt} \neq 0$, 那么定义 $x_j = A_{kj}, \forall 1 \le j \le n$, 便得到

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

即此时 $Ax = 0$ 在 R^n 内有非零解. 下设 $A^* = O$, 并设 $A \neq O$(否则结论明显成立), 那么存在正整数 r 使得 A 的 $r+1$ 阶子式都为零, 存在 r 阶子式非零 (这里的正整数 r 明显存在且 $1 \le r \le n-1$). 设 A 的 r 阶子矩阵 B 的行列式 (即对应 A 的 r 阶子式) 非零, 不妨设 $C = (c_{ij})_{(r+1)\times(r+1)}$ 是 A 的 $r+1$ 阶子矩阵满足 B 在 C 的左上角且 C 的各列对应 A 的第 1 到 $r+1$ 列. 同样记 c_{ij} 在 C 中代数余子式是 C_{ij}, 通过定义 $x_j = C_{r+1,j}, \forall 1 \le j \le r+1, x_t = 0, \forall r+2 \le t \le n$, 不难验证 $x = (x_1, ..., x_n)^T$ 满足 $Ax = 0$(等号左边的列向量前 $r+1$ 个分量为零来自 C 的行列式是零以及方阵元素与代数余子式的关系; 后 $n-r-1$ 个分量是零原因是该元素是 A 对换某两行后得到新矩阵 $\hat{A}$ 的某个 $r+1$ 阶子式, A 的所有 $r+1$ 阶子式为零保证了 $\hat{A}$ 的所有 $r+1$ 阶也为零). 所以由 $x_{r+1} = C_{r+1,r+1} = \det B \neq 0$ 便得结论. □

Remark 1.16. 如果 R 是整区, 那么通过考虑商域可以证明 $A \in \mathrm{M}_n(R)$ 的列向量集 R-线性相关的充要条件是 $\det A = 0$. 当 R 有零因子时, 即使 $A \in \mathrm{M}_n(R)$ 的列向量集 R-线性相关也无法保证 $\det A = 0$.

Proposition 1.17. 设 A 是含幺交换环 R 上 n 阶方阵且行向量集 R-线性相关. 设 $a_1, ..., a_n \in R$ 是不全为零的元素使得 $a_1\beta_1 + \cdots + a_n\beta_n = 0$, 这里 β_i 表示 A 的第 i 行决定的行向量. 如果存在某个 a_k 是 R 中正则元 (例如 R 是整区), 那么 $\det A = 0$.

Proof. 记 S 是 a_k 在 R 中生成的乘法幺半群, 那么局部化映射 $\lambda_S : R \to R_S$ 是单射且若将 A 视作 R_S 上矩阵, 则 A 的第 k 行可由其他行 Z_S-线性表出. 因此 $\det A$ 作为 R_S 中元素是零. 再结合 λ_S 是单射即得. □

Proposition 1.18. 设 R 是整区, 那么有限生成模 M 是无挠模的充要条件是 M 是某个自由 R-模的子模.

Proof. 充分性是明显的, 只需验证必要性. 设 M 有生成元集 $X = \{x_1, ..., x_n\}$, 取其极大线性无关子集 $\{x_1, ..., x_m\}(1 \le m \le n)$(可通过适当重排不妨设就由 X 中指标前 m 个元素构成). 如果 $m = n$, 结论直接成立. 下设 $m \le n-1$, 此时对每个 $m+1 \le i \le n$ 有 $\{x_1, ..., x_m, x_i\}$ 线性相关. 注意到 $\{x_1, ..., x_m\}$ 生成的 M 的子模是自由的, 记作 F, 对每个 $m+1 \le i \le n$, 存在 $a_i \neq 0 \in R$ 使得 $a_ix_i \in F$. 作 $a = a_{m+1}a_{m+2}\cdots a_n \neq 0 \in R$, 那么由 M 的无挠性知左乘变换 $a_l : M \to M, x \mapsto ax$ 是单射. 再注意到 $aM \subseteq F$, 故 M 同构于 F 的子模. □

2 P.I.D. 上有限生成模结构理论

2.1 P.I.D. 上自由模

一般地, 自由模的子模未必是自由的, 例如考虑 $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, 将 R 视作 R-模, 则 $N = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ 是 R 的子模但它不是自由 R-模. 下面的结果表明当 R 是 P.I.D. 时, 自由 R-模的子模总是自由的.

Theorem 2.1. 设 R 是 P.I.D., F 是自由 R-模, 则 F 的任意子模 N 都是自由 R-模并且 $\mathrm{rank}(N) \leq \mathrm{rank}(F)$. 当 $\mathrm{rank}(F) = n \geq 1$ 有限时, 记 $\mathrm{rank}(N) = m \leq n$, 那么存在 F 的基 $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ 以及 R 中非零元 $a_1, a_2, ..., a_m$ 使得 $\{a_1y_1, a_2y_2, ..., a_my_m\}$ 是 N 的一个基并且有下面的整除关系

$$a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid \cdots \mid a_m.$$

Proof. 当 F 是零模时结论直接成立, 下设 $F \neq \{0\}$. 设 F 有基 $\{v_j|j \in J\}$, 这里指标集 $J \neq \varnothing$, 依良序原理, 存在 J 上的二元关系 $\leq$ 使得 $(J, \leq)$ 是良序集. 对每个 $j \in J$, 命 $\overline{F_j} = (\{v_i|i < j\}), F_j = (\{v_i|i \leq j\})$, 对任给 $\alpha \in N \cap F_j$, 存在唯一的 $\alpha_1 \in \overline{F_j}$ 以及 $r_j \in R$ 使得 $\alpha = \alpha_1 + r_jv_j$, 命 $\pi_j : N \cap F_j \to R, \alpha \mapsto r_j$, 这里 $r_j \in R$ 是满足 $\alpha = \alpha_1 + r_jv_j, \alpha_1 \in \overline{F_j}$ 的元素, 易见 π_j 是 R-模同态, 于是 $\mathrm{Im}\pi_j$ 是 R 中理想. 因为 R 是 P.I.D., 所以 (利用选择公理可知) 对每个指标 j, 存在 $a_j \in R$ 使得 $\mathrm{Im}\pi_j = Ra_j$. 命 $J' = \{j \in J|\mathrm{Im}\pi_j \neq \{0\}\}$, 不妨设 N 是非零模 (当 N 是零模时, 结论直接成立), 所以存在 $j_0 \in J$ 使得 $\mathrm{Im}\pi_{j_0} \neq \{0\}$, 故 J' 非空. 对每个 $j \in J'$, 因为 $a_j \in \mathrm{Im}\pi_j$, 所以 (需要使用选择公理) 存在 $\beta_j \in N \cap F_j$ 使得 $\pi_j(\beta_j) = a_j$, 我们断言集合 $X = \{\beta_j|j \in J'\}$ 是 N 的一个基. 任取 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, ..., \beta_{j_m} \in X$, 不妨设 $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$, 如果 $r_1, r_2, ..., r_m \in R$ 使得 $r_1\beta_{j_1} + r_2\beta_{j_2} + \cdots + r_m\beta_{j_m} = 0$, 等式两边作用 π_{j_m} 可得 $r_ma_{j_m} = 0$, 由 $a_{j_m} \neq 0$ 以及 R 是整环知 $r_m = 0$. 于是对等式 $r_1\beta_{j_1} + r_2\beta_{j_2} + \cdots + r_{m-1}\beta_{j_{m-1}} = 0$ 两边作用 $\pi_{j_{m-1}}$ 可得 $r_{m-1} = 0$, 重复上述讨论即得 $r_1 = r_2 = \cdots = r_m = 0$, 所以 X 是 R-线性无关集. 下面说明 N 中任意非零元素可由集合 X 线性表出, 假设存在 $\alpha \in N$ 使得 α 无法被 X 中有限个元素线性表出, 那么存在 $i \in J$ 使得 $N \cap F_i$ 中有元素无法被集合 X 线性表出, 由 $(J, \leq)$ 的良序性, 不妨设指标 $i \in J$ 是满足 $N \cap F_i$ 中存在元素 α 无法被集合 X 线性表出的最小指标. 我们断言 $i \in J'$, 否则, 由 $\mathrm{Im}\pi_i = \{0\}$ 可知 $\alpha \in N \cap \overline{F_i}$, 这表明存在指标 $k < i \in J$ 使得 $\alpha \in N \cap F_k$, 这与 i 的最小性矛盾, 所以 $i \in J'$. 设 $\pi_i(\alpha) = ra_i$, 则 $\alpha - r\beta_i \in \mathrm{Ker}\pi_i$, 这表明存在指标 $k < i \in J$ 使得 $\alpha - r\beta_i \in N \cap F_k$, 这与 i 的最小性矛盾, 故 X 是 N 的基. 由 J' 是 J 的子集可知 $\mathrm{rank}(N) = |J'| \leq |J| = \mathrm{rank}(F)$.

现在设 $\mathrm{rank}(F) = n \geq 1$ 有限, 记 $\mathrm{rank}(N) = m \leq n$, 我们对 n 作归纳来证明结论. 当 $n = 1$ 时, 如果 $m = 0$, 结论直接成立, 因此只需考虑 $m \geq 1$ 的情形. 设 F 的基为 $\{y_1\}$, N 的基为 $\{\beta\}$, 则存在 $a_1 \neq 0 \in R$ 使得 $\beta = a_1y_1$, 故结论成立. 假设结论对 $n - 1 (n \geq 2)$ 成立, 现设 F 有基 $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ 且 N 是非零模, 对每个 $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(F, R)$, $\varphi(N)$ 是 R 中理想, 进而由 R 是 P.I.D. 知存在 $a_\varphi \in R$ 使得 $\varphi(N) = (a_\varphi)$. 因为理想集 $S = \{(a_\varphi)|\varphi \in \mathrm{Hom}_R(F, R)\}$ 非空 (有零理想), 故由 R 的 Noether 环知 S 中有极大元, 设为 $(a_v), v \in \mathrm{Hom}_R(F, R)$. 为叙述方便, 记 a_v 为 a_1, 则存在 $y \in N$ 使得 $v(y) = a_1$. 由 $N \neq \{0\}$ 以及 Ra_1 的极大性可知 $a_1 \neq 0$. 我们断言对任给 $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(F, R)$ 有 a_1 整除 $\varphi(y)$, 设 $d \in R$ 满足 $(a_1, \varphi(y)) = (d)$, 则存在 $r_1, r_2 \in R$ 使得 $d = r_1a_1 + r_2\varphi(y)$, 于是 $\psi = r_1v + r_2\psi \in \mathrm{Hom}_R(F, R)$ 满足 $\psi(y) = d$, 从而 $(a_1) \subseteq (d) \subseteq \psi(N)$, 由 (a_1) 的极大性得到 $(a_1) = (d) = \psi(N)$, 由此得到 a_1 整除 $\varphi(y)$. 设 $\pi_i : F \to R$ 是第 i 个自然投射, 则对每个 i, 存在 $b_i \in R$ 使得 $b_ia_1 = \pi_i(y)$, 于是对 $y_1 = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$ 有 $v(y_1) = 1_R$. 注意到对任给 $x \in F$ 有 $x = v(x)y_1 + (x - v(x)y_1)$, 由此易得 $F = Ry_1 \oplus \mathrm{Ker}v$. 类似地, 对任给 $x' \in N$, 因为 $v(x')$ 可以被 a_1 整除, 所以 $v(x')y_1 \in Ra_1y_1$ 且

$v(x')y_1 \in N$, 于是由 $x' = v(x')y_1 + (x' - v(x')y_1)$ 易得 $N = Ra_1y_1 \oplus (\mathrm{Ker}v \cap N)$. 由 $F = Ry_1 \oplus \mathrm{Ker}v$ 可知 $\mathrm{rank}(\mathrm{Ker}v) = n-1$, 由归纳假设, 对自由 R-模 $\mathrm{Ker}v$ 的子模 $\mathrm{Ker}v \cap N$, 因为 $\mathrm{rank}(\mathrm{Ker}v \cap N) = m-1$(这由 $N = Ra_1y_1 \oplus (\mathrm{Ker}v \cap N)$ 立即得到), 故当 $m \geq 2$ 时 (如果 $m = 1$, $N = Ra_1y_1$, 结论直接成立) 存在 $\mathrm{Ker}v$ 的基 $\{y_2, y_3, ..., y_n\}$ 以及 $a_2, a_3, ..., a_m \in R$ 使得 $\{a_2y_2, a_3y_3, ..., a_my_m\}$ 是 $\mathrm{Ker}v \cap N$ 的基且 $a_2 \mid a_3 \mid \cdots \mid a_m$. 于是由 $N = Ra_1y_1 \oplus (\mathrm{Ker}v \cap N)$ 可知 $\{a_1y_1, a_2y_2, ..., a_my_m\}$ 是 N 的一个基, 因此只需再说明 a_1 整除 a_2 即可. 定义 $\varphi : F \to R$ 是满足 $\varphi(y_1) = \varphi(y_2) = 1_R, \varphi(y_k) = 0, 3 \leq k \leq m$ 的 R-模同态, 那么 $a_1, a_2 \in \varphi(N)$, 于是由 (a_1) 的极大性得到 $(a_1) = \varphi(N)$, 所以 $a_2 \in (a_1)$, 这就得到了 a_1 整除 a_2. 故由数学归纳原理知结论成立. □

Corollary 2.2. 设 R 是 P.I.D., M 是 R-模, 那么 M 投射等价于 M 自由.

Corollary 2.3. 设 R 是 P.I.D., $\alpha : R^m \to R^n$ 是非零模同态, 则存在 R^m 的一个基 $\{u_1, ..., u_m\}$ 与 R^n 的一个基 $\{v_1, ..., v_n\}$ 和正整数 r 使得 $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$, 对 $1 \leq i \leq r$ 有 $\alpha(u_i) = d_iv_i$. 对 $r < i \leq m$ 有 $\alpha(u_i) = 0$, 这里 $d_i \neq 0 \in R$ 且 $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_r$. 特别地, 任何 R 上 $n \times m$ 阶矩阵都相抵于形如

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ & & & \end{pmatrix}$$

的矩阵, 其中 $d_i \neq 0 \in R$ 且 $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_r$, 空白位置表示零元.

Proof. 由于 $\mathrm{Im}\alpha$ 是自由子模, 设其秩为 r, 那么 $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$, 并且存在 R^n 的一个基 $\{v_1, ..., v_n\}$ 与 R 中非零元 $d_1, ..., d_r$ 使得 $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_r$ 且 $\{d_1v_1, d_2v_2, ..., d_rv_r\}$ 为 $\mathrm{Im}\alpha$ 的基. 取 R^m 中元素 $u_1, ..., u_r$ 使得 $\alpha(u_i) = d_iv_i, \forall 1 \leq i \leq r$. 设 $\mathrm{Ker}\alpha$ 有基 $\{\beta_1, ..., \beta_s\}$, 那么容易验证 $\{u_1, ..., u_r, \beta_1, ..., \beta_s\}$ 是 R^m 的一个基, 进而 $s = m - r$, 记 $\beta_1, ..., \beta_s$ 为 $u_{r+1}, ..., u_m$ 即可. □

Corollary 2.4. 设 M 是自由 $\mathbb{Z}$-模有基 $\{u_1, ..., u_n\}$, K 是 M 的一个子模, 可由 $\{f_1, ..., f_n\}$ 生成. 并且存在整数矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ 使得

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j, i = 1, 2, ..., n.$$

如果 $\det A = d \neq 0$, 那么 $|M/K| = |d|$.

Proof. 由 A 在 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ 中可逆立即得到 $\{f_1, ..., f_n\}$ 是 $\mathbb{Z}$-线性无关的, 进而知 K 是秩为 n 的自由子模. 设可逆整数矩阵 P, Q 满足 $PAQ = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, ..., d_n\}$, 那么由

$$P\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = PAQ\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

可知 K 有基 $\{d_1u_1, ..., d_nu_n\}$, 进而利用 $M/K \cong (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z})$ 立即得到 $|M/K| = |d|$. □

Remark 2.5. 该推论的一个直接应用是对于 Gauss 整数环 $\mathbb{Z}[i]$ 的任何非零元 $a + bi (a, b \in \mathbb{Z})$, $\mathbb{Z}[i]/(a + bi)$ 恰好由 $a^2 + b^2$ 个元素构成 (注意理想 $(a + bi)$ 作为自由 $\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Z}[i]$ 的 $\mathbb{Z}$-子模可由 $\{a + bi, -b + ai\}$ 生成).

2.2 P.I.D. 上平坦模

根据 Baer 判别法, 不难验证 P.I.D. 上内射模与可除模等价. 本节我们来说明 P.I.D. 上平坦模与无挠模等价. 首先我们需要做一些基本准备来对模的平坦性有更深入的认识.

Lemma 2.6. 设 R 是含幺环, M 是右 R-模, 则 M 是平坦模的充要条件是对任何左 R-模 L, N, 其中 L 是有限生成模, 如果模同态 $\psi: L \to N$ 是单同态, 则 $1_M \otimes \psi: M \otimes_R L \to M \otimes_R N$ 是单同态.

Proof. 只需说明充分性：任给单左 R-模同态 $\psi: L \to N$, 设 $\sum\limits_{i=1}^{l} x_i \otimes y_i \in M \otimes_R L$ 满足

$$(1_M \otimes \psi)(\sum_{i=1}^{l} x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{l} x_i \otimes \psi(y_i) = 0.$$

设 Q 是集合 $\{y_1, y_2, ..., y_l\}$ 在 L 中生成的子模, 那么 $\sum\limits_{i=1}^{l} x_i \otimes y_i \in M \otimes_R Q$, 从而由 $\psi|_Q$ 是单同态知在 $M \otimes_R Q$ 中 $\sum\limits_{i=1}^{l} x_i \otimes y_i = 0$. 记 F 是由集合 $M \times L$ 张成的自由 $\mathbb{Z}$-模, F_1 是集合 $M \times Q$ 张成的自由 $\mathbb{Z}$-模, S 是 F 中由集合 $\{(m_1+m_2, l)-(m_1, l)-(m_2, l), (m, l_1+l_2)-(m, l_1)-(m, l_2), (mr, l)-(m, rl) | m, m_1, m_2 \in M, l, l_1, l_2 \in L, r \in R\}$ 生成的子模, S_1 是 F_1 中集合 $\{(m_1+m_2, q)-(m_1, q)-(m_2, q), (m, q_1+q_2)-(m, q_1)-(m, q_2), (mr, q)-(m, rq) | m, m_1, m_2 \in M, q, q_1, q_2 \in Q, r \in R\}$ 生成的子模, 记

$$\Phi_F: M \times L \to F/S, (m, l) \mapsto (m, l) + S$$

$$\Phi_{F_1}: M \times Q \to F_1/S_1, (m, q) \mapsto (m, q) + S_1$$

则 $(F/S, \Phi_F)$ 是 M 与 L 的一个张量积, $(F_1/S_1, \Phi_{F_1})$ 是 M 与 Q 的一个张量积, 且有加群同构 $\Theta: F/S \mapsto M \otimes_R L$ 与 $\Theta': F_1/S_1 \to M \otimes_R Q$ 使得下面两图交换：

$$\begin{tikzcd} M \times L \arrow[r, "\Phi F"] \arrow[dr, "\otimes_R"'] & F/S \arrow[d, dashed, "\Theta"] \\ & M \otimes_R L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times Q \arrow[r, "\Phi_{F_1}"] \arrow[dr, "\otimes_R"'] & F_1/S_1 \arrow[d, dashed, "\Theta'"] \\ & M \otimes_R Q \end{tikzcd}$$

因为 Θ' 是加群同构, 故由在 $M \otimes_R Q$ 中 $\sum\limits_{i=1}^{l} x_i \otimes y_i = 0$ 可知 $\sum\limits_{i=1}^{l} (x_i, y_i) \in S_1$, 于是 $\sum\limits_{i=1}^{l} (x_i, y_i) \in S$, 从而

$$\sum_{i=1}^{l} x_i \otimes y_i = \Theta(\sum_{i=1}^{l} (x_i, y_i) + S) = 0,$$

所以在 $M \otimes_R L$ 中 $\sum\limits_{i=1}^{l} x_i \otimes y_i = 0$, 由此得到 ψ 是单同态, 故 M 是平坦模. $\square$

使用类似的技术不难证明下述结论.

Proposition 2.7. 设 R 是含幺环, 那么对任何左 R-模同态 $\alpha: M \to N$ 以及右 R-模 L, 如果 $x \in \text{Ker}(1_L \otimes \alpha)$, 那么存在 L 的有限生成子模 L' 以及 $x' \in \text{Ker}(1_{L'} \otimes \alpha)$ 使得 $(i \otimes 1_M)(x') = x$, 其中 $i: L' \to L$ 是标准嵌入.

Corollary 2.8. 设 R 是含幺环, M 是右 R-模, 如果 M 任何有限生成子模是平坦的, 则 M 平坦.

Faltness Criterion. 设 R 是含幺环, M 是右 R-模, 则 M 是平坦模的充要条件是对 R 中任何有限生成左理想 I, 嵌入映射 $i: I \to R$ 所诱导的同态 $1_M \otimes i: M \otimes_R I \to M \otimes_R R$ 是单射.

Proof. 只需证明充分性, 根据前面的证明过程, 使用同样的方法可得：如果对 R 的任何有限生成左理想 I, 嵌入映射 $i: I \to R$ 所诱导的同态 $1_M \otimes i: M \otimes_R I \to M \otimes_R R$ 是单射, 那么对 R 的任何左理想 I, 嵌入映射 $i: I \to R$ 所诱导的同态 $1_M \otimes i$ 总是单射. 我们先证明一个特殊情形, 对任意自由 R-模 F 及其子模 K, 嵌入映射 $i_K: K \to F$ 所诱导的同态 $1_M \otimes i_K: M \otimes_K K \to M \otimes_R F$ 是单射. 任给 F 是零模, 结论直接成立, 故这里直接讨论 $F \neq \{0\}$ 的情形, 由前面证明过的性质可知只需验证 K 是有限生成模的情形. 设 F 有基 $\{x_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$, 则有左 R-模同构

$$\theta: \oplus_{\alpha\in\Lambda} R \to F, (r_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \mapsto \sum_{\alpha\in\Lambda} r_\alpha x_\alpha,$$

对每个 $\alpha \in \Lambda$, 记 $\pi_\alpha: F \to R, \sum\limits_{\alpha\in\Lambda} r_\alpha x_\alpha \mapsto r_\alpha$ 是标准投射, 则 $I_\alpha = \pi_\alpha(K)$ 是 R 中左理想, 那么 $\oplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha \subseteq \oplus_{\alpha\in\Lambda} R$ 且 $J = \theta^{-1}(K) \subseteq \oplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$, 只有有限多个 α 使得 $I_\alpha \neq \{0\}$, 有交换图：

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "i_K"] & F \\
J \arrow[u, "\theta|_J"] \arrow[r, "i_J"] & \oplus_{\alpha\in\Lambda} R \arrow[u, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

其中 θ, θ_J 都是左 R-模同构. 这导出交换图

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R K \arrow[r, "1_M \otimes i_K"] & M \otimes_R F \\
M \otimes_R J \arrow[u, "1_M \otimes \theta|_J"] \arrow[r, "1_M \otimes i_J"] & M \otimes_R (\oplus_{\alpha\in\Lambda} R) \arrow[u, "1_M \otimes \theta"']
\end{tikzcd}$$

且 $1_M \otimes \theta|_J, 1_M \otimes \theta$ 均为加群同构, 因此要证明 $1_M \otimes i_K$ 是单射只需证明 $1_M \otimes i_J$ 是单射. 记

$$\beta_1: M \otimes_R (\oplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha) \to \oplus_{\alpha\in\Lambda}(M \otimes_R I_\alpha), \beta_2: M \otimes_R (\oplus_{\alpha\in\Lambda} R) \to \oplus_{\alpha\in\Lambda}(M \otimes_R R)$$

分别是满足 $\beta_1(m \otimes (s_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}) = (m \otimes s_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, \beta_2 = (m \otimes (r_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}) = (m \otimes r_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 的加群同构, 则下图交换

$$\begin{tikzcd}
\oplus_{\alpha\in\Lambda}(M \otimes_R I_\alpha) \arrow[r, "(1_M \otimes i_{I_\alpha})_{\alpha\in\Lambda}"] & \oplus_{\alpha\in\Lambda}(M \otimes_R R) \\
M \otimes_R (\oplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha) \arrow[u, "\beta_1"] \arrow[r, "1_M \otimes (i_{\oplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha})"] & M \otimes_R (\oplus_{\alpha\in\Lambda} R) \arrow[u, "\beta_2"']
\end{tikzcd}$$

于是由每个 $1_M \otimes i_{I_\alpha}$ 是单射得到 $1_M \otimes (i_{\oplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha})$ 是单射, 记 $1_M \otimes i_J| : M \otimes_R J \to M \otimes_R (\oplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha), x \mapsto (1_M \otimes i_J)(x)$, 则 $1_M \otimes i_J = (1_M \otimes (i_{\oplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha}))(1_M \otimes i_J|)$, 所以问题化归为证明 $1_M \otimes i_J|$ 是单射.

Claim. 只要 $\oplus_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha$ 满足只有有限个 α 使得 $I_\alpha\neq\{0\}$, 那么对 $\oplus_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha$ 的任何左 R-子模 J, 记

$$\mathscr{I}:J\to\oplus_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha$$

是嵌入映射, 则有 $1_M\otimes\mathscr{I}:M\otimes_R J\to M\otimes(\oplus_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha)$ 是单射. 我们对使得 $I_\alpha\neq\{0\}$ 的指标 α 的个数 n 作归纳, 当 $n=0$ 的时候结论直接成立, $n=1$ 时, 设唯一使得 $I_\alpha\neq\{0\}$ 的指标 α 是 α_0, 设指标 α_0 的标准投射为 $\pi_{\alpha_0}:\oplus_{\alpha\in\Lambda}R\to R,(r_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\mapsto r_{\alpha_0}$, 记 $I=\pi_{\alpha_0}(J)$ 是 R 的左理想, 由下面的交换图

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\mathscr{I}"] \arrow[d, "\pi_{\alpha_0}|_J"'] & \oplus_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha \arrow[d, "\pi_{\alpha_0}|_{\oplus_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha}"] \\ I \arrow[r, "i"] & I_\alpha \end{tikzcd}$$

其中左右两边的态是左 R-模同构, 导出交换图:

$$\begin{tikzcd} M\otimes_R J \arrow[r, "1_M\otimes\mathscr{I}"] \arrow[d, "1_M\otimes\pi_{\alpha_0}|_J"'] & M\otimes_R(\oplus_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha) \arrow[d, "1_M\otimes(\pi_{\alpha_0}|_{\oplus_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha})"] \\ M\otimes_R I \arrow[r, "1_M\otimes i"] & M\otimes_R R \end{tikzcd}$$

其中左右两边的态是加群同构, 故由 $1_M\otimes i$ 是单射知 $1_M\otimes\mathscr{I}$ 是单射, 故 $n=1$ 时结论成立. 假设结论对 $n\geq 1$ 成立, 现在考虑 $n+1$ 的情形, 设 $I_{\alpha_1},I_{\alpha_2},...,I_{\alpha_{n+1}}\neq\{0\},I_\beta=\{0\},\forall\beta\in\Lambda-\{\alpha_1,...,\alpha_{n+1}\}$. 记 $A_1=\oplus_{\alpha\in\Lambda}S_\alpha,A_2=\oplus_{\alpha\in\Lambda}T_\alpha$, 这里 S_α 当 $\alpha\in\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ 时为 I_α, 否则为零, T_α 当 $\alpha=\alpha_{n+1}$ 时为 $I_{\alpha_{n+1}}$, 否则为零. 那么 $\oplus_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha=A_1\oplus A_2$, 由归纳假设以及前面已经证明 $n=1$ 的情形, $A_k(k=1,2)$ 的任何左 R-子模到 $A_k(k=1,2)$ 的嵌入映射, 在张量函子 $M\otimes_R-$ 的作用下仍为单同态. 现任取 $\oplus_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha$ 的左 R-子模 J, 记 $J_1=J\cap A_1,J_2$ 是 J 关于 A_2 处自然投射下的像, 则有短正合列 $0\longrightarrow J_1\xrightarrow{i_{J_1}}J\xrightarrow{p_{J_2}}J_2\longrightarrow 0$,其中 i_{J_1} 是嵌入, p_{J_2} 是自然投射, 于是有交换图:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J_1 \arrow[r, "i_{J_1}"] \arrow[d, "j_1"] & J \arrow[r, "p_{J_2}"] \arrow[d, "i_J"] & J_2 \arrow[r] \arrow[d, "j_2"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "i_{A_1}"] & \oplus_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha \arrow[r, "p_{A_2}"] & A_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

其中上下两行模同态序列正合, 作用张量函子 $M\otimes_R-$ 导出交换图:

$$\begin{tikzcd} M\otimes_R J_1 \arrow[r, "1_M\otimes i_{J_1}"] \arrow[d, "1_M\otimes j_1"'] & M\otimes_R J \arrow[r, "1_M\otimes p_{J_2}"] \arrow[d, "1_M\otimes i_J"'] & M\otimes_R J_2 \arrow[r] \arrow[d, "1_M\otimes j_2"] & 0 \\ M\otimes_R A_1 \arrow[r, "1_M\otimes i_{A_1}"] & M\otimes_R(\oplus_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha) \arrow[r, "1_M\otimes p_{A_2}"] & M\otimes_R A_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

其中上下两行加群同态列正合, j_1,j_2 是单射. 因为 A_1 是 $\oplus_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha$ 的直和因子, 所以 $1_M\otimes i_{A_1}$ 也是单射. 下面说明 $i_M\otimes i_J$ 是单射, 这里做一个更一般的情形：设有加群的交换图:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "\gamma"'] \\ A' \arrow[r, "\psi'"] & B' \arrow[r, "\varphi'"] & C' \end{tikzcd}$$

且上图两行正合, 如果 α, ψ', γ 是单同态, 那么 β 是单同态. 如果 $b \in B$ 使得 $\beta(b) = 0$, 那么 $\varphi(b) = 0$, 于是存在 $a \in A$ 使得 $\psi(a) = b$, 于是由 $\psi'\alpha(a) = 0$ 得到 $a = 0$, 所以 $b = 0$, 进而知 β 是单射, 断言得证.

于是由前面的讨论知 $1_M \otimes i_J$ 也是单射, 这就证明了特殊情形. 下面证明一般情形, 即对任给单左 R 模同态 $\psi : L \to N$, 加群同态 $1_M \otimes \psi : M \otimes_R L \to M \otimes_R N$ 是单射, 一旦证明此情形便得到 M 是平坦右 R-模. 首先对上述左 R-模 F, 存在自由左 R-模 F 及其子模 K 使得模同态序列 $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i_K} F \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ 正合, 记 $J = f^{-1}(\psi(L))$, 则 $K \subseteq J \subseteq F$, 因为 $f(J) \subseteq \psi(L)$ 且 ψ 是单射, 故可定义左 R-模同态 $\psi^{-1}f|_J : J \to L$, 于是有交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i_K|"] \arrow[d, "1_K"] & J \arrow[r, "\psi^{-1}f|_J"] \arrow[d, "i_J"] & L \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i_K"] & F \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

且上图两行都是短正合列, 于是有交换图

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R K \arrow[r, "1_M \otimes i_K|"] \arrow[d, "1_M \otimes 1_K"] & M \otimes_R J \arrow[r, "1_M \otimes \psi^{-1}f|_J"] \arrow[d, "1_M \otimes i_J"] & M \otimes_R L \arrow[r] \arrow[d, "1_M \otimes \psi"] & 0 \\
M \otimes_R K \arrow[r, "1_M \otimes i_K"] & M \otimes_R F \arrow[r, "1_M \otimes f"] & M \otimes_R N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

且上图两行正合, $1_M \otimes 1_K$ 是加群同构, 根据前面已经证明的特殊情形知 $1_M \otimes i_J$ 也是单同态, 下面证明 $1_M \otimes \psi$ 是单同态. 事实上, 通过直接地追图可以证明下面的断言:

Claim. 设有加群的交换图:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "\gamma"'] \\
A' \arrow[r, "\psi'"] & B' \arrow[r, "\varphi'"] & C'
\end{tikzcd}$$

且上图两行正合, 如果 α, φ 是满同态, β 是单同态, 那么 γ 是单同态

最后由上述断言可得 $1_M \otimes \psi$ 是单同态, 这也就得到了 M 是平坦右 R-模. □

有了上面的平坦性判别准则, 便很容易得到 P.I.D. 上模的无挠性与平坦性的等价.

Theorem 2.9. 设 R 是 P.I.D., M 是 R-模, 则 M 是平坦 R-模的充要条件是 M 是无挠 R-模. 特别地, 一个 $\mathbb{Z}$-模是平坦的当且仅当它是无挠的 (例如将加群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 视作 $\mathbb{Z}$-模不是平坦模, 所以也不是投射模).

Proof. 任给 $r \neq 0 \in R$, 则映射 $\psi_r : R \to R, a \mapsto ra$ 是单 R-模同态. 如果 M 是平坦 R-模, 那么 $\psi_r \otimes 1_M : R \otimes_R M \to R \otimes_R M$ 也是单 R-模同态, 所以对任何 $m \neq 0 \in M$, 由 $1_R \otimes m \neq 0$ 知 $(\psi_r \otimes 1_M)(1_R \otimes m) \neq 0$, 即 $r \otimes m \neq 0$, 故 $rm \neq 0$. 这表明 M 是无挠 R-模. 反之, 如果 M 是无挠 R-模, 要证明 M 是平坦模, 依平坦性判别准则, 只需证明 R 的任何有限生成理想 I, I 到 R 的嵌入 $j : I \to R$ 导出的同态 $1_M \otimes j : M \otimes_R I \to M \otimes_R R$ 是单射. 如果 I 是零理想, 结论直接成立, 下设 I 是非零理想, 因为 R 是 P.I.D., 所以存在 $a \neq 0 \in R$ 使得 $I = (a) = aR$, 于是 $\psi : R \to I, r \mapsto ra$ 是 R-模同构, 于是有加群同构 $1_M \otimes \psi : M \otimes_R R \to M \otimes_R I$. 因为 $j\psi : R \to R, r \mapsto ra$, 故对任何 $m \otimes r \in M \otimes_R R$, 有 $(1_M \otimes (j\psi))(m \otimes r) = m \otimes ra$. 任给 $x \in M \otimes_R R$, 设 $(1_M \otimes (j\psi))(x) = 0$, 由于存在 $m \in M$ 使得 $x = m \otimes 1_R$, 所以 $m \otimes a = 0$, 于是 $ma = 0$, 根据 $a \neq 0$ 以及 M 无挠可得 $m = 0$, 从而

$x = m \otimes 1_R = 0$, 故 $1_M \otimes (j\psi)$ 是单同态. 再由 $1_M \otimes (j\psi) = (1_M \otimes j)(1_M \otimes \psi)$ 以及 $1_M \otimes \psi$ 是加群同构得到 $1_M \otimes j$ 是单同态, 所以平坦性判别准则保证了 M 是平坦 R-模. $\square$

Example 2.10. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上交换代数, 那么形式幂级数代数 $A[[x]]$ 可天然视作 $\Bbbk[[x]]$-模, 易见 $A[[x]]$ 作为 $\Bbbk[[x]]$-模无挠, 所以 $A[[x]]$ 是平坦 $\Bbbk[[x]]$-模.

Proposition 2.11. 若整区 R 满足任何 R-模是平坦模, 那么 R 是域.

Proof. 只需证明 R 中任何非零元可逆. 我们已经看到整区上任何平坦模无挠, 故对任何 $a \neq 0 \in R$ 有 $R/(a)$ 是无挠 R-模, 这迫使 $R/(a) = 0$(否则 $1 + (a)$ 是非零挠元), 进而知 a 是可逆元. $\square$

2.3 P.I.D. 上有限生成模结构定理

对 P.I.D. 上有限秩的自由模, 它子模的结构是明确的：设 R 是 P.I.D., R-模 F 是秩为 $n \geq 1$ 的自由模, 那么对它的任何子模 N, 设 $\mathrm{rank}(N) = m \leq n$, 存在 F 的基 $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ 以及非零元 $a_1, a_2, ..., a_m \in R$, 使得 $\{a_1y_1, a_2y_2, ..., a_my_m\}$ 是 N 的基, 且 $a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_m$. 利用这一结果, 我们容易得到 P.I.D. 上有限生成模的直和分解. 设 M 是主理想整环 R 上的有限生成模, 那么存在正整数 n 以及满 R-模同态 $f: R^n \to M$, 于是有模同构 $R^n/\mathrm{Ker}f \cong M$. 对于自由模 R^n 的子模 $\mathrm{Ker}f$, 当 $\mathrm{Ker}f = \{0\}$ 时, $M \cong R^n$, 否则, 存在 R^n 的基 $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ 和非零元 $a_1, a_2, ..., a_m \in R$, 使得 $\{a_1y_1, a_2y_2, ..., a_my_m\}$ 是 $\mathrm{Ker}f$ 的基且 $a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_m$. 由此容易得到下述 R-模同构：

$$\psi : R^n/\mathrm{Ker}f \to R^{n-m} \oplus R/a_1R \oplus \cdots \oplus R/a_mR$$
$$\sum_{k=1}^{n} r_ky_k + \mathrm{Ker}f \mapsto (r_{m+1}, ..., r_n, r_1 + Ra_1, ..., r_m + Ra_m)$$

因此对任何 R 上有限生成模 M, 存在自然数 $r, m \geq 0$ 以及 $a_1, a_2, ..., a_m \neq 0 \in R$ 使得

$$M \cong R^r \oplus R/a_1R \oplus \cdots \oplus R/a_mR, a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_m.$$

下面是针对这一分解存在性唯一性的进一步讨论——主理想整环上有限生成模的结构理论.

Theorem 2.12 (P.I.D. 上有限生成模基本定理存在性：不变因子形式)**.** 设 R 是 P.I.D., M 是有限生成 R-模.
(1) 存在自然数 r, m 与 R 中非零非单位元素 $a_1, a_2, ..., a_m \in R$ 使得

$$M \cong R^r \oplus R/a_1R \oplus \cdots \oplus R/a_mR, a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_m.$$

(2)M 是自由模的充要条件是 M 是无挠模.
(3) 若 M 满足 (1) 中分解式, 则有 $\mathrm{Tor}(M) \cong R/a_1R \oplus R/a_2R \oplus \cdots \oplus R/a_mR$. 当 M 是挠模时, $r = 0$ 且当 M 是非零模时 $\mathrm{Ann}_R(M) = a_mR$.

Proof. 根据前面的讨论, 我们已经得到了 (1). 先证明 (2), 因为整环上的自由模一定是无挠的, 所以我们只需证明充分性. 设 M 是无挠的, 那么 (1) 中分解必有 $m = 0$, 否则 M 中有非零的挠元, 这与 M 是无挠模矛盾. 于是 $M \cong R^r$ 是自由模, 这就证明了 (2). 最后证明 (3), 易见 $\mathrm{Tor}(R^r \oplus R/a_1R \oplus \cdots \oplus R/a_mR) \cong R/a_1R \oplus \cdots \oplus R/a_mR$, 故由 (1) 的同构式知 $\mathrm{Tor}(M) \cong R/a_1R \oplus R/a_2R \oplus \cdots \oplus R/a_mR$. 当 M 是挠模时, 易见 $r = 0$, 这时由 (2) 知 $M \cong R/a_1R \oplus R/a_2R \oplus \cdots \oplus R/a_mR$. 当 $M \neq \{0\}$ 时, 有 $m \geq 1$, 利用 $a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_m$ 易得 $\mathrm{Ann}_R(M) = Ra_m$. $\square$

我们把这里的自然数 r 称为 M 的**自由秩**或 **Betti 数**, 将非零元 $a_1, a_2, ..., a_m$ 称为 M 的**不变因子**. 之后我们证明自由秩被 M 唯一确定, 不变因子在相伴意义下被 M 确定. 在此之前我们先证明下述初等因子形式的基本定理存在性.

Theorem 2.13 (P.I.D. 上有限生成模基本定理存在性：初等因子形式)**.** 设 R 是 P.I.D., M 是 R 上有限生成模, 则有存在自然数 r, t 以及 R 中素元 $p_1, p_2, ..., p_t$(这些素元可以有重复), 正整数 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t$ 使得

$$M \cong R^r \oplus R/Rp_1^{\alpha_1} \oplus R/Rp_2^{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus R/Rp_t^{\alpha_t}.$$

Proof. 根据主理想整环上有限生成模的不变因子形式直和分解, 存在自然数 r, m 与 R 中非零非单位元素 $a_1, a_2, ..., a_m \in R$ 使得 $M \cong R^r \oplus R/a_1R \oplus \cdots \oplus R/a_mR$ 且 $a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_m$. 对每个 $1 \le k \le m$, a_k 作为 R 中非零非单位元素可分解为有限个不可约元乘积, 设 $a_k = uq_1^{s_1}q_2^{s_2}\cdots q_l^{s_l}$, 这里 $q_1, q_2, ..., q_l$ 是两两不相伴的不可约元, u 是单位, $s_1, s_2, ..., s_l$ 是正整数. 我们只需说明 $R/Ra_k \cong R/Rq_1^{s_1} \oplus R/Rq_2^{s_2} \oplus \cdots \oplus R/Rq_l^{s_l}$ 即可.

对任给 $1 \le i \ne j \le l$, 易见 $Rq_i^{s_i} + Rq_j^{s_j} = R$, 所以由中国剩余定理, 可得 R-模同构 $R/(a_k) = R/(uq_1^{s_1}q_2^{s_2}\cdots q_l^{s_l}) = R/(q_1^{s_1}q_2^{s_2}\cdots q_l^{s_l}) = R/(q_1^{s_1})(q_2^{s_2})\cdots(q_l^{s_l}) \cong R/(q_1^{s_1}) \oplus R/(q_2^{s_2}) \oplus \cdots \oplus R/(q_l^{s_l}) = R/Rq_1^{s_1} \oplus R/Rq_2^{s_2} \oplus \cdots \oplus R/Rq_l^{s_l}$. □

我们把这里的 $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, ..., p_t^{\alpha_t}$ 称为 M 的**初等因子**, 之后会证明初等因子在相伴意义下唯一. 在正式证明主理想整环上有限生成模的不变因子分解与初等因子分解唯一性前, 我们再做一些准备工作.

设 R 是 P.I.D., M 是 R 上非零挠模, 设 $a \in R$ 是非零非单位的元素且 $aM = \{0\}$, 设 $a = up_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$ 为 a 的不可约元分解, 这里 u 是单位, α_k 均为正整数, p_i 与 $p_j (i \ne j)$ 是不相伴的不可约元. 记 $N_i = \{x \in M \mid p_i^{\alpha_i}x = 0\}$ 为 M 的子模, 易验证有下述直和分解式：

$$M = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_n,$$

且 $N_i = \{x \in M | \text{存在正整数}k\text{使得}p_i^k x = 0\}$. 容易验证 N_i 同构于 M 的初等因子直和分解式中那些零化子是 $p_i^{\alpha_i}$ 因子的循环模的直和. 我们把这里的 N_i 称为 M 的 p_i**-准素成分**.

Lemma 2.14. 设 R 是 P.I.D., $p \in R$ 是素元, $F = R/(p)$ 是域, 则
(1) 如果存在自然数 r 使得 $M \cong R^r$, 那么 M/pM 无论作为 R-模还是 F-模都有模同构 $M/pM \cong F^r$.
(2) 如果存在非零元 $a \in R$ 使得 $M \cong R/(a)$, 那么当 a 能被 p 整除时, 有 R-模同构 $M/pM \cong F$. 当 a 不能被 p 整除时, $M/pM \cong \{0\}$.

Proof. (1) 易见 M/pM 上可赋予天然的 F-线性空间结构：$(r+(p))(m+pM) = rm+pM$. 由 $M \cong R^r$ 可得模同构 $M/pM \cong R^r/pR^r$, 易见 $\psi : R^r/pR^r \to F \times F \times \cdots \times F, (a_1, a_2, ..., a_r)+pR^r \mapsto (a_1+pR, a_2+pR, ..., a_r+pR)$ 是定义合理的模同构, 这就证明了 (1).

(2) 当 a 不能被 p 整除时, 由 a, p 互素易得 $p(R/(a)) = R/(a)$, 所以 $M/pM \cong \{0\}$. 当 p 整除 a 时, 考虑 $\theta : R/(a) \to R/(p), x+(a) \mapsto x+(p)$, 这是定义合理的满 R-模同态且 $\mathrm{Ker}\theta = p(R/(a))$, 故有模同态基本定理得到 $(R/(a))/((p)/(a)) \cong R/(p)$, 因此 $M/pM \cong F$. □

Theorem 2.15 (P.I.D. 上有限生成模基本定理唯一性)**.** 设 R 是 P.I.D., M_1 和 M_2 是 R 上有限生成模, 则
(1) 若 $M_1 \cong M_2$, 那么它们有相同的自由秩, 以及在不计次序相伴意义下相同的初等因子组.
(2) 若 $M_1 \cong M_2$, 那么它们有相同的自由秩, 以及在不计次序相伴意义下相同的不变因子组.

特别地,对 R 上有限生成模 M,它的自由秩被 M 唯一确定,它的初等因子组与不变因子组在不计次序与相伴意义下被 M 确定. 因此 R 上有限生成模的自由秩与不变因子组、初等因子组是定义合理的. 更进一步, $M_1 \cong M_2$ 的充要条件是它们有相同的自由秩与不计次序相伴意义下相同的初等因子组 (不变因子组).

Proof. (1) 设 $M_1 \cong M_2$ 且 M_1, M_2 有初等因子形式分解：

$$M_1 \cong R^{r_1} \oplus R/Rp_1^{\alpha_1} \oplus R/Rp_2^{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus R/Rp_t^{\alpha_t},$$

$$M_2 \cong R^{r_2} \oplus R/Rq_1^{\beta_1} \oplus R/Rq_2^{\beta_2} \oplus \cdots \oplus R/Rq_s^{\beta_s}.$$

因为 $M_1 \cong M_2$, 所以 $R^{r_1} \cong M_1/\mathrm{Tor}(M_1) \cong M_2/\mathrm{Tor}(M_2) \cong R^{r_2}$, 于是由含幺交换环具备不变基性质立即得到 $r_1 = r_2$, 所以当 M_1, M_2 作为 R-模同构时, 它们有相同的自由秩. 下面我们证明 M_1 与 M_2(在相伴意义下) 有相同的初等因子组, 即 $t = s$ 且经过适当排序后有 $p_i^{\alpha_i} \sim q_i^{\beta_i}, i = 1, 2, ..., t$. 因为这时有模同构：

$$R/Rp_1^{\alpha_1} \oplus R/Rp_2^{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus R/Rp_t^{\alpha_t} \cong \mathrm{Tor}(M_1) \cong \mathrm{Tor}(M_2) \cong R/Rq_1^{\beta_1} \oplus R/Rq_2^{\beta_2} \oplus \cdots \oplus R/Rq_s^{\beta_s}.$$

所以我们把问题化归为只需证明当 M_1, M_2 是同构的有限生成挠模时, M_1 和 M_2 有不计相伴意义下相同的初等因子组即可, 下面我们设 M_1, M_2 均为挠模, 且

$$M_1 \cong R/Rp_1^{\alpha_1} \oplus R/Rp_2^{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus R/Rp_t^{\alpha_t}, M_2 \cong R/Rq_1^{\beta_1} \oplus R/Rq_2^{\beta_2} \oplus \cdots \oplus R/Rq_s^{\beta_s}.$$

设 R 中非零非单位元素 a 满足 $aM_1 = aM_2 = \{0\}$(因为 M_1, M_2 是同构的挠模, 所以这样的 a 总存在), 设 a 有不可约分解 $a = uw_1^{\gamma_1}w_2^{\gamma_2}\cdots w_\ell^{\gamma_\ell}$, 这里 u 是 R 中单位, $w_1, w_2, ..., w_\ell$ 是两两不相伴的不可约元, $\gamma_1, ..., \gamma_\ell$ 是正整数. 那么对每个不可约元 w_j, M_1 的 w_j-准素成分同构于 $R/Rp_1^{\alpha_1}, R/Rp_2^{\alpha_2}, ..., R/Rp_t^{\alpha_t}$ 中满足 $p_i \sim w_j$ 的循环模 $R/Rp_i^{\alpha_i}$ 的直和, 并且必定有 $\alpha_i \le \gamma_j$. 类似地, M_2 的 w_j-准素成分同构于 $R/Rq_1^{\beta_1}, R/Rq_2^{\beta_2}, ..., R/Rq_s^{\beta_s}$ 中满足 $q_i \sim w_j$ 的循环模 $R/Rq_i^{\beta_i}$ 的直和且 $\beta_i \le \gamma_j$. 如果我们能够证明对每个正整数 j, M_1 和 M_2 的 w_j-准素成分的初等因子组在不计次序与相伴意义下是相同的, 那么我们就可以得到 M_1 与 M_2 在不计次序与相伴意义下有相同的初等因子组. 因为 $M_1 \cong M_2$, 所以 M_1, M_2 的 w_j-准素成分同构. 如果我们能够证明下面这个更强的断言：设 M_1, M_2 是同构的有限生成挠模, $p \in R$ 是素元, 满足 M_1 与 M_2 都可以被某个 p 的自然数幂次零化, 即存在自然数 n 使得 $p^nM_1 = p^nM_2 = \{0\}$, 那么 M_1 与 M_2 在不计次序和相伴意义下有相同的初等因子组. 那么我们就得到了结论. 我们对自然数 n 作归纳, 当 $n = 0$ 时, M_1 和 M_2 都是零模, 此时它们都没有初等因子, 结论成立. 假设结论对 $n-1(n \ge 1)$ 成立, 设 M_1 的初等因子组相伴于

$$\underbrace{p, p, ..., p}_{m\text{项}}, p^{\alpha_1}, p^{\alpha_2}, ..., p^{\alpha_s}, 2 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_s \le n,$$

因此 $M_1 \cong \underbrace{R/(p) \oplus \cdots \oplus R/(p)}_{m\text{项}} \oplus R/(p^{\alpha_1}) \oplus \cdots \oplus R/(p^{\alpha_s})$. 那么 pM_1 也是 R 上有限生成模且

$$pM_1 \cong R/(p^{\alpha_1-1}) \oplus \cdots \oplus R/(p^{\alpha_s-1}), p^{n-1}(pM_1) = \{0\}.$$

再设 M_2 的初等因子组相伴于

$$\underbrace{p, p, ..., p}_{l\text{项}}, p^{\beta_1}, p^{\beta_2}, ..., p^{\beta_t}, 2 \le \beta_1 \le \beta_2 \le \cdots \le \beta_t \le n,$$

有 $M_2 \cong \underbrace{R/(p) \oplus \cdots \oplus R/(p)}_{l\text{项}} \oplus R/(p^{\beta_1}) \oplus \cdots \oplus R/(p^{\beta_t})$, 与 M_1 类似, 有 pM_2 是 R 上有限生成模且

$$pM_2 \cong R/(p^{\beta_1 - 1}) \oplus \cdots \oplus R/(p^{\beta_t - 1}), p^{n-1}(pM) = \{0\}.$$

因为 $pM_1 \cong pM_2$, 所以由归纳假设, $s = t, \alpha_1 - 1 = \beta_1 - 1, \alpha_2 - 1 = \beta_2 - 1, ..., \alpha_s - 1 = \beta_s - 1$. 因此得到 $\alpha_k = \beta_k, k = 1, 2, ..., s$. 如果再说明 $m = l$, 我们就证明了 M_1 与 M_2 有 (在不计次序与相伴意义下) 相同的初等因子组. 将 M_1/pM_1 与 M_2/pM_2 视作 $F = R/(p)$-模, 那么我们有下面的 F-模同构:

$$F^{m+s} \cong \frac{\overbrace{R/(p) \oplus R/(p) \oplus \cdots \oplus R/(p)}^{m\text{项}} \oplus R/(p^{\alpha_1}) \oplus \cdots \oplus R/(p^{\alpha_s})}{\underbrace{(p)/(p) \oplus (p)/(p) \oplus \cdots \oplus (p)/(p)}_{m\text{项}} \oplus pR/(p^{\alpha_1}) \oplus \cdots \oplus pR/p^{\alpha_s}} \cong M_1/pM_1,$$

$$F^{l+t} \cong \frac{\overbrace{R/(p) \oplus R/(p) \oplus \cdots \oplus R/(p)}^{l\text{项}} \oplus R/(p^{\beta_1}) \oplus \cdots \oplus R/(p^{\beta_l})}{\underbrace{(p)/(p) \oplus (p)/(p) \oplus \cdots \oplus (p)/(p)}_{l\text{项}} \oplus pR/(p^{\beta_1}) \oplus \cdots \oplus pR/p^{\beta_l}} \cong M_2/pM_2,$$

故 $m + s = l + t$, 于是由 $s = t$ 得到 $l = m$, 这就证明了 (1).

(2) 在 (1) 中已经证明 M_1 与 M_2 有相同的自由秩, 故只需证明 M_1 与 M_2 的不变因子组在不计次序与相伴意义下相同. 设 M_1 有不变因子 $a_1, a_2, ..., a_m, a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_m$, M_2 有不变因子 $b_1, b_2, ..., b_n, b_1 \mid b_2 \mid \cdots \mid b_n$. 设 $a_1 = u_1 p_1^{e_{11}} p_2^{e_{12}} \cdots p_t^{e_{1t}}, a_2 = u_2 p_1^{e_{21}} p_2^{e_{22}} \cdots p_t^{e_{2t}}, ..., a_m = u_m p_1^{e_{m1}} p_2^{e_{m2}} \cdots p_t^{e_{mt}}$, 这里 $u_1, u_2, ..., u_m$ 是单位, p_i 与 $p_j (i \neq j)$ 是不相伴的不可约元, e_{ij} 均为自然数, 且 $0 \leq e_{1k} \leq e_{2k} \leq \cdots \leq e_{mk}, \forall 1 \leq k \leq t, e_{m1}, e_{m2}, ..., e_{mt} \geq 1$. 于是知 M_1 的一个初等因子组就是由所有满足 $e_{ij} \geq 1$ 的素元幂 $p_j^{e_{ij}}$ 构成的, 由 (1) 知这也是 M_2 的一个初等因子组, 因为 $b_1 \mid b_2 \mid \cdots \mid b_n$, 因此 b_n 相伴于初等因子中 p_1 最高次幂, p_2 最高次幂,...,p_t 最高次幂的乘积, 即 $b_n \sim p_1^{e_{m1}} p_2^{e_{m2}} \cdots p_t^{e_{mt}} \sim a_m$, 在初等因子组中将 $p_1^{e_{m1}}, p_2^{e_{m2}}, ..., p_t^{e_{mt}}$ 删去, 剩下的 p_1 最高次幂, p_2 最高次幂, ..., p_t 最高次幂 (可以为零次) 的乘积相伴于 b_{n-1}, 即 $a_{n-1} \sim b_{m-1}$. 重复上述讨论, 迫使 $n = m$ 且 $a_k \sim b_k, k = 1, 2, ..., n$. 所以 M_1 与 M_2 有相同的不变因子. □

Remark 2.16. 根据初等因子形式的有限生成模结构定理, 我们不难看到 R 上有限生成的不可分模在同构意义下只有 R 与形如 $R/(p^n), n \geq 1$(p 是 R 中素元, R 是 P.I.D.). 故 R 上有限生成模范畴满足任何非零对象可分解为有限多个不可分对象的直和, 且分解式在不计次序和同构意义下唯一 (存在非强不可分的不可分对象).

Proposition 2.17. 设 R 是 P.I.D., $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ 是有限生成 R-模短正合列, 若记 X, Y, Z 的自由秩为 $r(X), r(Y), r(Z)$, 那么 $r(Y) = r(X) + r(Z)$.

Proof. 记 F 是 R 的商域, 那么 ${}_RF$ 是平坦模, 并注意到对任何有限生成 R-模 M, M 的自由秩就是 $M \otimes_R F$ 作为 F-线性空间的线性维数, 故用张量函子 $- \otimes_R F$ 作用条件中的短正合列立即得到结论. □

3 结构定理的应用

P.I.D. 上有限生成模的结构定理是有限生成 Abel 群结构定理的直接推广. 此外, 我们也可以利用结构定理去重新得到线性代数中矩阵的 Jordan 标准型理论与有理标准型理论.

3.1 有限生成 Abel 群的结构

因为 $\mathbb{Z}$ 是 P.I.D., 所以我们可应用 P.I.D. 上有限生成模的结构定理来得到有限生成 Abel 群基本定理.

Theorem 3.1 (有限生成 Abel 群基本定理). 设 A 是有限生成 Abel 群, 则有:
(1) 存在自然数 r, m 以及正整数 $a_1, a_2, ..., a_m \geq 2$ 使得 $A \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/a_m\mathbb{Z}, a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_m$. 且若还有自然数 s, n 以及正整数 $b_1, b_2, ..., b_n \geq 2$ 使得 $A \cong \mathbb{Z}^s \oplus \mathbb{Z}/b_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/b_n\mathbb{Z}, b_1 \mid b_2 \mid \cdots \mid b_n$, 那么 $s = r, m = n$ 且 $a_k = b_k, \forall 1 \leq k \leq m$. 这里的正整数 $a_1, a_2, ..., a_m$ 称为群 A 的**不变因子**.
(2) 存在自然数 r, m, 素数 $p_1, p_2, ..., p_m$ 与正整数 $s_1, s_2, ..., s_m$ 使得 $A \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/p_1^{s_1}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_2^{s_2}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_m^{s_m}\mathbb{Z}$. 且若还有自然数 t, l 以及素数 $q_1, q_2, ..., q_l$ 与正整数 $j_1, j_2, ..., j_l$ 使得 $A \cong \mathbb{Z}^s \oplus \mathbb{Z}/q_1^{j_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/q_l^{j_l}\mathbb{Z}$, 那么 $s = r, l = m$, 且 $p_1^{s_1}, p_2^{s_2}, ..., p_m^{s_m}$ 与 $q_1^{j_1}, q_2^{j_2}, ..., q_l^{j_l}$ 经适当排序后有 $p_k^{s_k} = q_k^{j_k}, \forall 1 \leq k \leq m$, 这里的素数幂组 $p_1^{s_1}, p_2^{s_2}, ..., p_m^{s_m}$ 称为群 A 的**初等因子**.

Example 3.2. 设 $m, n \geq 2$ 是正整数, 那么 Abel 群 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的不变因子为 g.c.d(m, n), l.c.m(m, n). 事实上, 可设 m, n 有素因子分解 $m = p_1^{a_1} \cdots p_l^{a_l}, n = p_1^{b_1} \cdots p_l^{b_l}$, 其中 $p_1, p_2, ..., p_l$ 是两两不同的素数, a_i, b_i 是自然数 (可能为零). 根据中国剩余定理, 有 $\mathbb{Z}$-模同构 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_2^{a_2}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_l^{a_l}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_1^{b_1}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_2^{b_2}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_l^{b_l}\mathbb{Z}$, 对该式删去零模直和项可得初等因子形式分解. 由上述分解式以及不变因子形式分解的唯一性立即得到 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的不变因子为

$$p_1^{\min\{a_1,b_1\}} \cdots p_l^{\min\{a_l,b_l\}}, p_1^{\max\{a_1,b_1\}} \cdots p_l^{\max\{a_l,b_l\}}.$$

即为 m 与 n 的最大公因数和最小公倍数.

3.2 Jordan 标准型

设 F 是代数闭域, V 是 F 上 n 维线性空间, T 是 V 上的 F-线性变换, 那么我们可以通过 T 赋予 V 一个 $F[x]$-模结构. 根据 Cayley-Hamilton 定理, 我们知道 V 作为 $F[x]$-模是挠模, 所以 V 作为主理想整区 $F[x]$ 上的有限生成模, 它的初等因子分解式中不存在自由部分. 于是每个直和项形如 $F[x]/(x-\lambda)^k, k \geq 1, \lambda \in F$. 易验证 $F[x]/(x-\lambda)^k$ 作为 F-线性空间有基 $\{\overline{(x-\lambda)^{k-1}}, \overline{(x-\lambda)^{k-2}}, ..., \overline{x-\lambda}, \overline{1}\}$. 易见 $x \in F[x]$ 诱导的左乘变换 $x_l : F[x]/(x-\lambda)^k \to F[x]/(x-\lambda)^k$ 是 F-线性变换, 且在基上的作用是: $x_l(\overline{(x-\lambda)^i}) = \overline{(x-\lambda)^{i+1}} + \lambda\overline{(x-\lambda)^i}, \forall 0 \leq i \leq k-1$. 易见线性变换 x_l 在给定基 $\{\overline{(x-\lambda)^{k-1}}, \overline{(x-\lambda)^{k-2}}, ..., \overline{x-\lambda}, \overline{1}\}$ 下的表示矩阵是

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix},$$

称上述形式的 k 阶矩阵为**以 λ 为特征值的 k 阶 Jordan 块**, 记作 $J_k(\lambda)$. 如果 F 上一个 n 阶准对角阵 (或者称为分块对角阵) 的每个对角分块都是 Jordan 块, 则称该矩阵是 **Jordan 标准型的**. 如果 F 上 n 维线性空间 V 上线性变换 T, 在某个 V 的基下表示矩阵是 Jordan 标准型的, 称该表示矩阵是 T 的一个 **Jordan 标准型**. 如果 F 上

一个 n 阶方阵 A 能够与一个 Jordan 标准型的矩阵 J 相似, 则称 J 是 A 的一个 **Jordan 标准型**. 由 P.I.D. 上有限生成模的结构理论, 对 $F[x]$-模 V, 有 $F[x]$-模同构：

$$V \cong F[x]/(x-\lambda_1)^{k_1} \oplus F[x]/(x-\lambda_2)^{k_2} \oplus \cdots \oplus F[x]/(x-\lambda_t)^{k_t},$$

设同构映射为 $\varphi : V \to F[x]/(x-\lambda_1)^{k_1} \oplus F[x]/(x-\lambda_2)^{k_2} \oplus \cdots \oplus F[x]/(x-\lambda_t)^{k_t}$, 那么 φ 也是 F-线性同构. 由此结合前面的讨论知存在 $F[x]/(x-\lambda_1)^{k_1} \oplus F[x]/(x-\lambda_2)^{k_2} \oplus \cdots \oplus F[x]/(x-\lambda_t)^{k_t}$ 的一个基 $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ 使得线性变换 x_l 在这个基下的表述矩阵是 Jordan 标准型的, 形如

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}.$$

对每个 $1 \le i \le n$, 记 $\varphi^{-1}(\beta_i)$ 为 α_i, 那么 $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ 是 V 的一个基且 $\varphi(T\alpha_i) = \varphi(x\alpha_i) = x\beta_i = x_l(\beta_i), \forall 1 \le i \le n$. 于是易得 T 在基 $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ 下的表述矩阵与 x_l 在 $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ 下的表示矩阵相同. 由此可知代数闭域 F 上任何 n 维线性空间 V 上的线性变换 T, 都在某个基下表示矩阵是 Jordan 标准型的. 如果代数闭域 F 上任何 n 维线性空间 V 上的线性变换 T 有 Jordan 标准型

$$B = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_t}(\lambda_t) \end{pmatrix},$$

我们说明 V 作为 $F[x]$-模有模同构 $V \cong F[x]/(x-\lambda_1)^{k_1} \oplus F[x]/(x-\lambda_2)^{k_2} \oplus \cdots \oplus F[x]/(x-\lambda_t)^{k_t}$, 一旦证明这一点, 我们便可由 P.I.D. 上有限生成模初等因子形式分解定理得到 T 的 Jordan 标准型在不计主对角线上 Jordan 块排布次序意义下唯一. 设 T 在基 $\{\alpha_{11}, ..., \alpha_{1,k_1}, ..., \alpha_{t1}, ..., \alpha_{t,k_t}\}$ 下的表示矩阵是 B, 现在我们如下定义出 V 到 $F[x]/(x-\lambda_1)^{k_1} \oplus F[x]/(x-\lambda_2)^{k_2} \oplus \cdots \oplus F[x]/(x-\lambda_t)^{k_t}$ 的 $F[x]$-模同构：对每个 $\alpha_{ij}, 1 \le j \le k_i$, 命 $\psi(\alpha_{ij}) = (0, ..., \overline{(x-\lambda_i)^{k_i-j}}, 0, ..., 0)$, 其中 $\overline{(x-\lambda_i)^{k_i-j}}$ 在第 i 分量, 那么可以定义出 F-线性映射 $\psi : V \to F[x]/(x-\lambda_1)^{k_1} \oplus F[x]/(x-\lambda_2)^{k_2} \oplus \cdots \oplus F[x]/(x-\lambda_t)^{k_t}$, 因为 ψ 将基映到基, 所以 ψ 是 F-线性同构. 并且注意到 $\psi(x\alpha_{ij}) = \psi(T\alpha_{ij}) = \psi(\alpha_{i,j-1} + \lambda_i\alpha_{ij}) = (0, ..., 0, \overline{(x-\lambda_i)^{k_i-j+1}}, 0, ..., 0) + \lambda_i(0, ..., 0, \overline{(x-\lambda_i)^{k_i-j}}, 0, ..., 0) = x(0, ..., 0, \overline{(x-\lambda_i)^{k_i-j}}, 0, ..., 0) = x\psi(\alpha_{ij}), 2 \le j \le k_i$ 并且 $\psi(x\alpha_{i1}) = \psi(\lambda_i\alpha_{i1}) = \lambda_i\psi(\alpha_{i1}) = x\psi(\alpha_{i1})$, 进而有 $\psi(x\alpha) = x\psi(\alpha), \forall \alpha \in V$. 由此得到 ψ 是 $F[x]$-模同态, 进而是 $F[x]$-模同构. 因此, 我们利用 P.I.D. 上有限生成模初等因子形式分解定理便得到了 T 的 Jordan 标准型在不计主对角线上 Jordan 块排布次序意义下唯一. 这就得到了下面的定理：

Theorem 3.3. 设 V 是代数闭域 F 上 n 维线性空间, T 是 F-线性变换, 那么
(1) 存在 V 的一个基使得 T 在这个基下表示矩阵是 Jordan 标准型的;
(2)T 的任意两个 Jordan 标准型在主对角线上 Jordan 块不计次序意义下唯一.

我们熟知有限维线性空间上线性变换在不同基下表示矩阵是相似的, 所以我们立即得到：

Theorem 3.4. 设 A 是代数闭域 F 上 n 阶方阵, 那么
(1)A 相似于 F 上某个 Jordan 标准型的矩阵, 即 A 存在 Jordan 标准型;
(2)A 的任意两个 Jordan 标准型在主对角线上 Jordan 块不计次序意义下唯一.

作为矩阵的 Jordan 标准型的应用, 我们证明 (加性)Jordan-Chevalley 分解定理.

Jordan-Chevalley Decomposition. 设 F 是代数闭域, n 是正整数, $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 那么存在唯一的可对角化矩阵 S 和幂零矩阵 N 满足 $A = S + N$ 以及 $SN = NS$. 并且存在 $f(x), g(x) \in F[x]$ 满足 $S = f(A), N = g(A)$, 这里的 $f(x), g(x)$ 可选取为常数项为零的多项式. 特别地, 任何与 A 可交换的矩阵也和 S, N 可交换.

Proof. 设 $\lambda_1, ..., \lambda_s \in F$ 是 A 在 F 上所有的互异特征值. 根据 Jordan 标准型存在性, 总有 F 上可逆矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}\{J_1, J_2, ..., J_s\}$, 这里 J_i 是所有以 λ_i 为特征值的 Jordan 块构成的准对角阵. 对每个 J_i, 作分解 $J_i = \lambda_i I + N_i$, 这里 N_i 是严格上三角阵, 那么 $\mathrm{diag}\{\lambda_1 I, ..., \lambda_s I\}$(这里单位阵的阶数可能不同) 是对角阵, $\mathrm{diag}\{N_1, N_2, ..., N_s\}$ 是严格上三角阵, 特别地, 为幂零矩阵. 命

$$S = Q\mathrm{diag}\{\lambda_1 I, ..., \lambda_s I\}Q^{-1}, N = Q\mathrm{diag}\{N_1, N_2, ..., N_s\}Q^{-1},$$

那么 S 是可对角化矩阵, N 是幂零矩阵, 满足 $A = S+N$ 且 $NS = SN$. 在证明唯一性前先说明存在 $f(x), g(x) \in F[x]$ 满足 $S = f(A), N = g(A)$. 注意到每个 J_i 有零化多项式 $(x-\lambda_i)^n$, 因此由不同的 $(x-\lambda_i)^n$ 和 $(x-\lambda_j)^n$ 是互素的多项式, 利用中国剩余定理可得存在 $f(x) \in F[x]$ 使得对每个 $1 \le i \le s$ 有 $(x-\lambda_i)^n$ 整除 $f(x) - \lambda_i$. 特别地, $f(A) = S$(如果有某个 $\lambda_i = 0$, 那么 $f(x)$ 明显常数项是零. 否则, 可以选取 $f(x)$ 额外满足 $f(x)$ 被 x 整除, 因为 x 和每个 $(x-\lambda_i)^n$ 互素). 于是由 $N = A - f(A)$ 得到 N 也可以表示为 A 的多项式. 现在我们说明满足 S 是可对角化矩阵, N 是幂零矩阵且 $NS = SN$ 的分解 $A = N + S$ 的唯一性. 假设还有分解 $A = S' + N'$ 满足 S' 可对角化, N' 幂零且 $S'N' = N'S'$. 那么 A 和 S', N' 都可交换. 现在由 S, N 可表示为 A 的多项式得到 S, N 与 S', N' 两两可交换. 现在 $S - S' = N' - N$, 等号右边是幂零矩阵, 等号左边由下面的 [引理3.5] 知是可对角化矩阵, 于是 $S = S'$. 进而也有 $N = N'$. □

Lemma 3.5. 设 F 是代数闭域, n 是正整数, $A_1, ..., A_m \in \mathrm{M}_n(F)$ 两两可交换且每个 A_i 可对角化. 那么所有的 A_i 可同时对角化, 即存在可逆阵 $P \in \mathrm{M}_n(F)$ 使得 $P^{-1}A_iP$ 是对角阵, $i = 1, 2, ..., m$.

Proof. 对正整数 n 作归纳, 当 $n = 1$ 时结论直接成立. 假设结论对阶数不超过 $n-1(n \ge 2)$ 的矩阵成立. 现在把每个 A_i 视作 $V = F^n$ 上的线性变换. 设 A_1 所有不同的特征值为 $\lambda_1, ..., \lambda_k$. 当 $k = 1$ 时, 由 A_1 可对角化得到 $A_1 = \lambda_1 I_n$. 因此, 如果所有的 A_i 都只有一个特征值 (不计重数), 那么所有的 A_i 是对角阵, 结论直接成立. 因此不妨设 A_1 不止一个特征值, 即设 $k \ge 2$. 对每个 $1 \le j \le k$, 记 V_j 是 A_1 属于特征值 λ_j 的特征子空间, 那么由 A_1 可对角化得到 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$. 根据条件, 每个 A_i 和 A_1 可交换, 所以每个 V_j 都是 A_i-不变的. 现在通过取定每个 V_j 的基得到 V 的基后, A_i 在 V 的此基下的表示矩阵是准对角阵. 例如设 A_i 在此基下表示矩阵为 $\mathrm{diag}\{A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{ik}\}$, 那么每个 A_{it} 的阶数严格小于 n 并且可对角化 (易见其最小多项式整除 A 的最小多项式). 于是由 A_{it} 和 A_{jt} 可交换, 应用归纳假设得到对每个 $1 \le t \le k$, $A_{1t}, A_{2t}, ..., A_{mt}$ 可同时对角化. 于是不难看到 $A_1, ..., A_m$ 可同时对角化. □

Remark 3.6. 更一般地, 设 F 是代数闭域, n 是正整数, $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subseteq \mathrm{M}_n(F)$ 是一族两两可交换的矩阵并且每个 A_α 可对角化. 这里指标集 Γ 非空并且可能是无限集. 那么同样存在可逆阵 $P \in \mathrm{M}_n(F)$ 使得 $P^{-1}A_\alpha P$ 是对角

阵对所有 $\alpha \in \Gamma$ 成立. 只需考虑 $\mathrm{M}_n(F)$ 中由 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 生成的 F-子空间 W, 那么 W 中任意两个矩阵可交换 (不妨设 $W \neq 0$, 否则结论直接成立). 取定 W 的基 $\{B_1, ..., B_t\}$, 那么根据 [引理3.5], 存在可逆矩阵 P 使得所有 $P^{-1}B_iP$ 是对角阵. 由此得到 $P^{-1}A_\alpha P$ 是对角阵对所有 $\alpha \in \Gamma$ 成立. 使用线性变换的语言, 如果 V 是代数闭域 F 上 $n \geq 1$ 维线性空间, $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是 V 上一族两两可交换的线性变换并且每个 σ_α 可对角化, 那么存在 V 的 1 维子空间 $V_1, ..., V_n$ 使得 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ 并且对每个 V_j, V_j 中每个非零元素是 $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 的公共特征向量.

我们很容易把矩阵形式的 Jordan-Chevalley 分解写作线性变换形式.

Corollary 3.7. 设 F 是代数闭域, n 是正整数, V 是 F 上 n 维线性空间, σ 是 V 上 F-线性变换, $U \subseteq W$ 是 V 的子空间. 那么存在 σ 唯一的分解 $\sigma = \sigma_S + \sigma_N$ 使得 σ_S 是可对角化的线性变换, σ_N 是幂零线性变换并且 $\sigma_S\sigma_N = \sigma_N\sigma_S$. 这时 σ_N 和 σ_S 都可表示为 σ 的 (F 上) 多项式. 特别地, 如果 $\sigma(W) \subseteq U$, 那么

$$\sigma_S(W), \sigma_N(W) \subseteq U.$$

3.3 有理标准型

设 F 是域, V 是 F 上 n 维线性空间, T 是 V 上的 F-线性变换, 类似于 Jordan 标准型情形, 可利用 T 天然地赋予 V 上 $F[x]$-模结构, 且是有限生成挠 $F[x]$-模. 通过 P.I.D. 上有限生成模的不变因子形式分解, $F[x]$-模 $V \cong F[x]/(d_1(x)) \oplus F[x]/(d_2(x)) \oplus \cdots \oplus F[x]/(d_t(x))$, 这里 $t \in \mathbb{N}$, $d_i(x)$ 是 $F[x]$ 中次数不低于 1 的首一多项式且满足 $d_1(x) \mid d_2(x) \mid \cdots \mid d_t(x)$. 对 $d(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in F[x]$, 不难看出 $F[x]/(d(x))$ 作为 F-线性空间有基 $\{\overline{1}, \overline{x}, ..., \overline{x}^{n-1}\}$, 且 $x \in F[x]$ 所决定的 $F[x]/(d(x))$ 上左乘变换 $x_l : F[x]/(d(x)) \to F[x]/(d(x))$ 作为 F-线性变换在基 $\{\overline{1}, \overline{x}, ..., \overline{x}^{n-1}\}$ 下的表示矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

称上述形式的 k 阶矩阵为首一多项式 $d(x)$ 的 **Frobenius 友矩阵** (或简称为**友矩阵**), 记作 $C(d(x))$.

Lemma 3.8. 设 $d(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in F[x]$ 的友矩阵是 A, 那么 A 的特征多项式是 $d(x)$.

Proof. 直接对多项式 $\det(xI_n - A)$ 的第一行展开, 对 n 作归纳即得. □

如果 F 上一个 n 阶准对角阵的每个对角分块都是友矩阵, 设为 $C(d_1(x)), C(d_2(x)), ..., C(d_t(x))$, 决定这些友矩阵的首一多项式满足 $d_1(x) \mid d_2(x) \mid \cdots \mid d_t(x)$, 则称该矩阵是**有理标准型的**, 并且把多项式 $d_i(x)$ 称为该矩阵的**不变因子**. 如果 F 上 n 维线性空间 V 上线性变换 T, 在某个 V 的基下表示矩阵是有理标准型的, 称该表示矩阵是 T 的一个**有理标准型**. 如果 F 上一个 n 阶方阵 A 能够与一个有理标准型的矩阵 C 相似, 则称 C 是 A 的一个**有理标准型**. 那么完全类似于 Jordan 标准型情形, 对上述给定的 V 上线性变换 T, 通过 $F[x]$-模同构 $V \cong F[x]/(d_1(x)) \oplus F[x]/(d_2(x)) \oplus \cdots \oplus F[x]/(d_t(x))$(这里 $d_1(x) \mid d_2(x) \mid \cdots \mid d_t(x)$), 可知 T 在某个基下表示矩阵是有理标准型的. 反之, 若 n 维线性空间 V 上线性变换 T 存在有理标准型, 例如设该有理标准型的各

对角分块依次是 $C(d_1(x)), C(d_2(x)), ..., C(d_t(x))$, 其中 $d_1(x) \mid d_2(x) \mid \cdots \mid d_t(x)$, 那么可直接验证 $F[x]$-模同构 $V \cong F[x]/(d_1(x)) \oplus F[x]/(d_2(x)) \oplus \cdots \oplus F[x]/(d_t(x))$. 所以由 P.I.D. 上有限生成模不变因子形式分解定理便保证了 T 的有理标准型唯一. 总结一下, 我们得到了：

Theorem 3.9. 设 V 是域 F 上 n 维线性空间, T 是 F-线性变换, 那么存在 V 的一个基使得 T 在这个基下表示矩阵是有理标准型的, 并且 T 的有理标准型被 T 唯一决定.

Remark 3.10. 前面看到对 n 维线性空间 V 上线性变换 T 所诱导 V 上的 $F[x]$-结构, 有不变因子形式分解 $V \cong F[x]/(d_1(x)) \oplus F[x]/(d_2(x)) \oplus \cdots \oplus F[x]/(d_t(x))$(这里 $d_1(x) \mid d_2(x) \mid \cdots \mid d_t(x)$ 是 $F[x]$-模 V 的全部不变因子), 那么 $\mathrm{Ann}_{F[x]}V = (d_t(x))$, 所以 T 在域 F 上的最小多项式就是 $d_t(x)$. 也就是说对有限维线性空间上的线性变换, 其最小多项式就是通过该线性变换赋予线性空间上多项式代数上的模结构后, 最后一个不变因子. 根据前面的讨论, 我们也看到 T 的特征多项式就是以友矩阵 $C(d_1(x)), C(d_2(x)), ..., C(d_t(x))$ 为对角分块的准对角阵的特征多项式, 故 T 的特征多项式为 $d_1(x)d_2(x)\cdots d_n(x)$.

类似于 Jordan 标准型情形, 有理标准型的存在唯一性对矩阵也有相应结论.

Theorem 3.11. 设 A 是域 F 上 n 阶方阵, 那么 A 存在唯一的有理标准型.

对域 F 上 n 阶方阵 A, B, 如果 A 和 B 在 $\mathrm{M}_n(F)$ 中相似, 那么 $xI_n - A$ 和 $xI_n - B$ 明显在 $\mathrm{M}_n(F[x])$ 中相抵. 反之, 若 $xI_n - A$ 和 $xI_n - B$ 在 $\mathrm{M}_n(F[x])$ 中相抵, 那么存在 $\mathrm{M}_n(F[x])$ 中可逆阵 $Q(x), P(x)$ 使得 $Q(x)(xI_n - A)P(x) = xI_n - B$. 注意到环同构 $\mathrm{M}_n(F[x]) \cong \mathrm{M}_n(F)[x]$, 所以可在 $\mathrm{M}_n(F[x])$ 中对 $P(x)$ 和 $xI_n - B$ 作带余除法, 即存在方阵 $M(x) \in \mathrm{M}_n(F[x]), T \in \mathrm{M}_n(F)$ 使得 $P(x) = M(x)(xI_n - B) + T$. 类似地, 存在方阵 $N(x) \in \mathrm{M}_n(F[x]), S \in \mathrm{M}_n(F)$ 使得 $Q(x) = (xI_n - B)N(x) + S$. 对等式

$$Q(x)(xI_n - A) = (xI_n - B)P(x)^{-1}$$

两边代入 $Q(x) = (xI_n - B)N(x) + S$ 可知 $(xI_n - B)N(x)(xI_n - A) + S(xI_n - A) = (xI_n - B)P(x)^{-1}$, 整理得到 $S(xI_n - A) = (xI_n - B)P(x)^{-1} - (xI_n - B)N(x)(xI_n - A) = (xI_n - B)(P(x)^{-1} - N(x)(xI_n - A))$, 注意到 $S(xI_n - A)$ 关于 x 的次数不超过 1, 所以 $P(x)^{-1} - N(x)(xI_n - A) \in \mathrm{M}_n(F)$, 记作 L. 那么由 $S(xI_n - A) = (xI_n - B)L$ 我们马上得到 $S = L, SA = BL$. 因此要说明 A 与 B 相似只需再说明 L 可逆. 首先有 $L = P(x)^{-1} - N(x)(xI_n - A)$, 两边右乘 $P(x)$ 得到 $(L + N(x)(xI_n - A))P(x) = I_n$, 于是

$$LP(x) + N(x)Q(x)^{-1}(xI_n - B) = I_n,$$

代入 $P(x) = M(x)(xI_n - B) + T$ 得到 $(LM(x) + N(X)Q(x)^{-1})(xI_n - B) = I_n - LT$, 比较两边关于 x 的次数迫使 $LM(x) + N(X)Q(x)^{-1} = 0$, 于是 L 可逆. 由此我们得到 A 和 B 在 $\mathrm{M}_n(F)$ 中相似当且仅当 $xI_n - A$ 和 $xI_n - B$ 在 $\mathrm{M}_n(F[x])$ 中相抵. 结合前面对矩阵有理标准型的结果我们得到

Theorem 3.12. 设 A, B 是域 F 上 n 阶方阵, 那么以下等价：
(1) 方阵 A 与 B 在 $\mathrm{M}_n(F)$ 中相似.
(2) 方阵 A 与 B 有相同的有理标准型.
(3) 用 A 赋予的 F^n 上 $F[x]$-模结构与用 B 赋予 F^n 上 $F[x]$-模结构同构.
(4) 方阵 $xI_n - A$ 和 $xI_n - B$ 在 $\mathrm{M}_n(F[x])$ 中相抵.

Remark 3.13. 对域 F 上 n 阶方阵 A, 用 A 赋予的 F^n 上 $F[x]$-模结构后 V 的首一不变因子 $d_1(x), d_2(x), ..., d_t(x)$ (满足 $d_1(x) \mid d_2(x) \mid \cdots \mid d_t(x)$) 也被称为 $xI_n - A$ 的不变因子. 设 $d(x) \in F[x]$ 是次数不低于 1 的多项式, 那么可直接验证其友矩阵 $C(d(x))$ 在 $\mathrm{M}_n(F[x])$ 内相抵于对角阵 $\mathrm{diag}\{1, 1, ..., 1, d(x)\}$. 如果 $xI_n - A$ 有不变因子 $d_1(x), d_2(x), ..., d_t(x)$, 我们已经看到 A 会相似于 $C(d_1(x)), C(d_2(x)), ..., C(d_t(x))$ 决定的分块对角阵, 所以 $xI_n - A$ 在 $\mathrm{M}_n(F[x])$ 内相抵于对角阵 $\mathrm{diag}\{1, ..., 1, d_1(x), d_2(x), ..., d_t(x)\}$. 进而知若首一多项式 $d_1(x), ..., d_t(x)$ 满足 $d_1(x) \mid d_2(x) \mid \cdots \mid d_t(x)$, 则 A 的有理标准型为 $C(d_1(x)), C(d_2(x)), ..., C(d_t(x))$ 决定的分块对角阵的充要条件是 $xI_n - A$ 在 $\mathrm{M}_n(F[x])$ 内相抵于对角阵 $\mathrm{diag}\{1, ..., 1, d_1(x), d_2(x), ..., d_t(x)\}$.

有了矩阵相似关系关于有理标准型的刻画后, 自然就有了下面这些经典应用.

Corollary 3.14. 设 A 是域 F 上 n 阶方阵, 那么 A 可对角化 (即在 $\mathrm{M}_n(F)$ 中相似于对角阵) 的充要条件是 A 在域 F 上的最小多项式在域 F 内有 n 个互不相同的根.

Proof. 必要性是明显的, 这里仅说明充分性. 由条件知 F^n 经 A 赋予 $F[x]$-模结构后最后一个不变因子就是 $m(x)$, 进而由 $m(x)$ 在域 F 内有 n 个互不相同的根知 A 的有理标准型是一些在域 F 上可分解为一次因式乘积且没有重根的首一多项式的友矩阵决定的分块对角阵. 因此只需说明：若 $d(x) \in F[x]$ 是次数为 $s \geq 1$ 的首一多项式且满足在域 F 内有 s 个互不相同的根, 那么 $C(d(x))$ 可对角化. 因为若记 $d(x)$ 有根 $a_1, a_2, ..., a_s$, 并记 $B = \mathrm{diag}\{a_1, ..., a_s\}$, 那么可直接验证 $xI_s - B$ 在 $M_s(F[x])$ 内相抵于 $xI_s - C(d(x))$, 进而知 $C(d(x))$ 在域 F 上可对角化. □

Corollary 3.15. 设 A 是域 F 上 n 阶方阵, 那么 A 与其转置 A^T 在 $\mathrm{M}_n(F)$ 中相似.

Proof. 设 $xI_n - A$ 有不变因子 $d_1(x), ..., d_t(x)$, 这里 $d_1(x) \mid d_2(x) \mid \cdots \mid d_t(x)$. 那么存在 $\mathrm{M}_n(F[x])$ 中的可逆阵 $P(x), Q(x)$ 使得 $P(x)(xI_n - A)Q(x) = \mathrm{diag}\{1, ..., 1, d_1(x), d_2(x), ..., d_t(x)\}$, 两边取转置可知 $xI_n - A^T$ 在 $\mathrm{M}_n(F[x])$ 内相抵于 $\mathrm{diag}\{1, ..., 1, d_1(x), d_2(x), ..., d_t(x)\}$. 这说明 A 的有理标准型与 A^T 相同, 得证. □

Corollary 3.16. 设 A, B 是域 F 上 n 阶方阵, E 是 F 的域扩张, 那么 A 与 B 在 $\mathrm{M}_n(F)$ 中相似的充要条件是它们在 $\mathrm{M}_n(E)$ 中也相似. 故域上方阵的相似关系不随基域扩张改变.

Proof. 必要性是明显的, 只需要验证充分性. 注意到 A 在域 F 上有理标准型与 A 在 E 上有理标准型相同, B 同理, 因此一旦 A 与 B 在 $\mathrm{M}_n(E)$ 中也相似, 那么在域 F 上便有相同的有理标准型, 进而相似. □