钻石引理

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2025 年 7 月 30 日

许多域上 (结合) 代数可以用生成元和生成关系的方式定义, 进而某些关于生成元的 (非交换) 单项式集能够给出该代数作为基域上线性空间的基. 实践中, 能够确定并证明某些生成元单项式构成的集合给出代数的基有助于认识给定代数的环论性质. 因此, 寻找并证明代数作为线性空间的单项式基是基本且重要的问题. 而钻石引理 [New42, Ber78] 为这一问题提供了有效的方法. 这份笔记希望以比较快的方式介绍钻石引理的基本内容, 主要参考文献是 [BG02, BRS+16]. 虽然我以全力以赴, 但难以避免笔记中存在错误, 欢迎提出宝贵建议.

目录

1 钻石引理

在叙述并证明钻石引理前, 我们先在 §1.1中引入些必要术语并作基本准备, 随后在 §1.2介绍钻石引理的证明 (也见 [注记1.4]). 最后在 §1.3中记录了钻石引理在一些具体例子中的应用.

1.1 基本准备

固定域 $\Bbbk$ 上的自由代数 $F = \Bbbk\langle X\rangle$, 其中 X 是 (非空的) 自由变量集. 将 X 生成的自由幺半群记作 W. 当 $X = \{x_1, ..., x_m\}$ 是有限集时, F 写作 $\Bbbk\langle x_1, ..., x_m\rangle$. 根据良序原理, 我们能够选定 X 上偏序关系 $\leq$ 使得 $(X, \leq)$ 构成良序集. 如果 W 上全序 $\leq$ 是 X 上给定良序的延拓且满足

(AO1) 对任何 $u, v, w \in W$, $v < w$ 蕴含 $uv < uw$ 以及 $vu < wu$;

(AO2) 对任何 $w \in W$, 集合 $\{u \in W \mid u < w\}$ 是有限集,

则称 W 上的全序 $\leq$ 是**容许的**. 例如, 对有限集 $X=\{x_1,...,x_m\}$, 固定 $x_1<x_2<\cdots<x_m$. 考虑相应字集 W 上的字典序, 对任何 $u=x_{i_1}\cdots x_{i_t}, v=x_{j_1}\cdots x_{j_s}\in W$, $u<v$ 当且仅当 $t<s$ 或 $t=s$ 且存在正整数 $1\leq k\leq s$ 使得 $x_{i_1}=x_{j_1},...,x_{i_{k-1}}=x_{j_{k-1}}$ 且 $x_{i_k}<x_{j_k}$. 那么相应的全序 $\leq$ 是容许的.

Lemma 1.1. 设 $\leq$ 是 W 上容许全序, 则 $1<w, \forall w\neq 1\in W$.

Proof. 若不然, 则 $1>w$, 进而 $w^n>w^{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}$. 这与 $\{u\in W\mid u<w\}$ 是有限集矛盾. □

现在我们固定 W 上容许全序 $\leq$, 那么用可自然对 F 中所有非零非交换多项式引入“首项”的概念. 设 F 的理想 I 可由一些非零首一非交换多项式构成的子集 $\{g_\sigma\}_{\sigma\in\Gamma}$ 生成. 那么对每个 $\sigma\in\Gamma$, 可记 g_σ 的首项为 $w_\sigma\in W$, 那么可设 $g_\sigma=w_\sigma-f_\sigma$, 这里 f_σ 是一些满足 $v<w_\sigma$ 的字 v 的 $\Bbbk$-线性组合. 称字 $u\in W$ 关于 $\{g_\sigma\}_{\sigma\in\Gamma}$ 是**约化的**, 如果 u 不含任何 $w_\sigma(\sigma\in\Gamma)$ 作为子字. 若字 $w\in W$ 不是约化的, 那么存在 $u,v\in W$ 以及 $\sigma\in\Gamma$ 使得 $w=uw_\sigma v$. 那么 $uf_\sigma v$ 和 w 在 F/I 中有像一致. 注意到 $uf_\sigma v$ 作为 F 中元素每个非零单项式对应的字都 $<w$. 有时也称集合 $\{(w_\sigma,f_\sigma)\in W\times F\mid \sigma\in\Gamma\}$ 为一个 **reduction 系统**.

作为 $\Bbbk$-线性空间, F/I 可由所有 (关于 $\{g_\sigma\}_{\sigma\in\Gamma}$) 约化字在 F/I 中的像构成的集合生成: 若不然, 设 w 为满足 $w+I$ 无法由约化字像集生成的不约化字中字长最小者. 那么 $w+I$ 能够重新表示为一些字长比 w 严格小的字在 F/I 中像的线性组合, 其中至少有一项是不约化的字的像, 这与 w 的选取矛盾. 于是知

如果理想 I 能够选取适当的首一生成元集 $\{g_\sigma\}_{\sigma\in\Gamma}$ 使得相应的约化字集在 F/I 中的像集是 $\Bbbk$-线性无关的, 那么约化字像集便给出 F/I 的一个 $\Bbbk$-基.

注意到当 I 是 F 的真理想时, 所有的 w_σ 都是非空字.

Example 1.2. 考虑量子平面 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)=\Bbbk\langle x,y\rangle/(xy-qyx)$, 其中 $q\in\Bbbk^\times$. 若置 $x<y$, 那么在左长度字典序下, $yx-q^{-1}xy$ 是首一的. 关于 $\{yx-q^{-1}xy\}$ 的约化字集为 $\{x^iy^j\mid i,j\in\mathbb{N}\}$.

对 $u,v\in W$ 以及 $\sigma\in\Gamma$, 称将 $uw_\sigma v$ 映至 $uf_\sigma v$ 且保持其他字不动的 F 上代数自同态为相应的**初等 reduction**, 记作 $r_{u,\sigma,v}$. 将有限多个初等 reduction 的合成 (依然是 F 上代数自同态) 称为一个 **reduction**. 任给 $h\in F$, 若 $h=0$, 那么 h 是 1 这一约化字的 $\Bbbk$-线性组合. 若 $h\neq 0$, 那么 (AO2) 说明 h 每个非零单项式对应的字 w 都满足 $w_\sigma<w$ 仅对有限多个 $\sigma\in\Gamma$ 成立. 因此我们立即得到

Lemma 1.3. 任给 $h\in F$, 存在 reduction $r:F\to F$ 使得 $r(h)$ 是一些 (关于 $\{g_\sigma\}_{\sigma\in\Gamma}$) 约化字的 $\Bbbk$-线性组合.

五元组 $(t,v,u,\sigma,\tau)\in W^3\times\Gamma^2$ 被称为一个**重叠歧义**, 如果 $tv=w_\sigma, vu=w_\tau$. 这时, 字 $tvu=(tv)u=t(vu)$ 满足 $r_{1,\sigma,u}(tvu)=f_\sigma u$ 以及 $r_{t,\tau,1}(tvu)=tf_\tau$. 五元组 $(t,v,u,\sigma,\tau)\in W^3\times\Gamma^2$ 被称为一个**包含歧义**, 如果 $tvu=w_\sigma$ 且 $v=w_\tau$. 这时, 字 tvu 满足 $r_{1,\sigma,1}(tvu)=f_\sigma$ 以及 $r_{t,\tau,u}(tvu)=tf_\tau u$. 当重叠/包含歧义 (t,v,u,σ,τ) 中的 σ,τ 都明确时, 也用 tvu 表示该歧义. 前面的讨论指出对于重叠歧义和包含歧义 tvu, 至少有两种不同的 reductions 来作用 tvu. 如果 $\{w_\sigma\mid\sigma\in\Gamma\}$ 中所有字有相同长度, 那么包含歧义 (t,v,u,σ,τ) 满足 $t=u=1$. 称重叠歧义 (t,v,u,σ,τ) 是**可解的**, 如果存在 reductions r,r' 使得 $r(f_\sigma u)=r'(tf_\tau)$.

$$\begin{tikzcd}
 & tvu \arrow[dl, "r_{1,\sigma,u}"'] \arrow[dr, "r_{t,\tau,1}"] & \\
f_\sigma u \arrow[dr, dashed, "r"'] & & tf_\tau \arrow[dl, dashed, "r'"] \\
 & \bullet &
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

称包含歧义 (t,v,u,σ,τ) 是**可解的**, 如果存在 reductions r, r' 使得 $r(f_\sigma) = r'(tf_\tau u)$.

$$\begin{tikzcd}
& tvu \arrow[dl, "r_{1,\sigma,1}"'] \arrow[dr, "r_{t,\tau,u}"] & \\
f_\sigma \arrow[dr, dashed, "r"'] & & tf_\tau u \arrow[dl, dashed, "r'"] \\
& \bullet &
\end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Remark 1.4. 钻石引理的命名来自对歧义作 reduction 时图(1.1)和(1.2)的菱形状.

Remark 1.5. 前面已经指出当所有 w_σ 长度相同时, 只有平凡的包含歧义, 而这时歧义直接可解.

称 F 中元素 h 是 **reduction 唯一的**, 如果对任何 reductions s_1, s_2, $s_1(h), s_2(h)$ 是一些约化字的线性组合蕴含 $s_1(h) = s_2(h)$. 由于约化字在任何 reduction 作用下不动, 所以若记 $\mathrm{red}(h) := s_1(h) = s_2(h)$, 那么 $\mathrm{red}(h)$ 在任何 reduction 作用下不变. 并且 F 的所有 reduction 唯一的元素构成的集合是 F 的 $\Bbbk$-子空间: 如果 $h, g \in F$ 都是 reduction 唯一的, 那么对任何 reduction s, 只要 $s(h-g)$ 是一些约化字的 $\Bbbk$-线性组合, 那么 $s(h-g) = s(h) - s(g)$. 根据前面的讨论以及 [引理1.3], 存在 reduction r 使得 $rs(h) = \mathrm{red}(h), rs(g) = \mathrm{red}(g)$, 进而 $\mathrm{red}(h-g) = s(h-g) = rs(h-g) = \mathrm{red}(h) - \mathrm{red}(g)$. 于是我们也证明了

Proposition 1.6 ([BRS+16])**.** 自由代数 F 中所有 reduction 唯一的元素构成的集合是 F 的 $\Bbbk$-子空间, 且 $\mathrm{red}(-)$ 定义了其上 $\Bbbk$-线性映射. 故 W 中所有元素 reduction 唯一蕴含 F 中所有元素是 reduction 唯一的.

注意到对任何 $h \in F$ 以及 reduction r, 有 $h + I = r(h) + I$. 所以

Proposition 1.7 ([BRS+16])**.** 如果 I 的首一生成元集 $\{g_\sigma\}_{\sigma\in\Gamma}$ 满足约化字集在 F/I 中的像是 $\Bbbk$-线性无关的, 那么任何 $h \in F$ 是 reduction 唯一的.

Proof. 注意到对任何 reduction s_1, s_2 有 $s_1(h) + I = h + I = s_2(h) + I$. 所以当 $s_1(h), s_2(h)$ 都是一些约化字的 $\Bbbk$-线性组合时, 由条件立即得到 $s_1(h) = s_2(h)$. □

Proposition 1.8 ([BRS+16])**.** 如果 I 的首一生成元集 $\{g_\sigma\}_{\sigma\in\Gamma}$ 满足任何 $h \in F$ 是 reduction 唯一的, 那么所有重叠歧义和包含歧义都是可解的.

Proof. 如果 uvw 是重叠歧义或包含歧义, 那么对任何初等 reduction r_1, r_2, $r_1(uvw)$ 和 $r_2(u,v,w)$ 都分别能在某个 reduction 作用下是一些约化字的 $\Bbbk$-线性组合, [引理1.3]. 再利用 reduction 唯一条件便知. □

1.2 定理证明

Theorem 1.9 (钻石引理, [BG02, BRS+16])**.** 设 $F = \Bbbk\langle X\rangle$ 的真理想 I 有首一多项式构成的生成元集 $\{g_\sigma \mid \sigma \in \Gamma\}$, X 生成的幺半群 W 上有容许全序 $\leq$, 并设 g_σ 的首项为 w_σ, 有 $g_\sigma = w_\sigma - f_\sigma$. 则以下等价:

(1) 所有重叠歧义和包含歧义可解.

(2) 自由代数 F 中所有元素 reduction 唯一.

(3) 关于 $\{g_\sigma \mid \sigma \in \Gamma\}$ 的约化字集构成 F/I 的 $\Bbbk$-基.

当上述等价条件之一成立时, 称 $\{g_\sigma \mid \sigma \in \Gamma\}$ 是理想 I 的 **Gröbner-Shirshov 基**.

Proof. (3)⇒(2)⇒(1) 来自 [命题1.7] 和 [命题1.8]. 下面先证 (1)⇒(2). 根据 [命题1.6], 只要证 W 中元素 reduction 唯一. 下面对良序集 $(W, \le)$ 作超限归纳法证明结论. 根据 [引理1.1], W 中最小元是 reduction 唯一的. 假设结论对满足 $v < w$ 的字都成立. 那么根据 [命题1.6], 比 w 严格小的字的 $\Bbbk$-线性组合也都是 reduction 唯一的. 现在设 reductions r, r' 满足 $r(w), r'(w)$ 都是约化字的 $\Bbbk$-线性组合且设 $r = r_k r_{k-1} \cdots r_1$ 和 $r' = r'_j r'_{j-1} \cdots r'_1$ 是 r, r' 关于初等 reduction 的合成分解. 我们需要证明 $r(w) = r'(w)$ 来得到 w 是 reduction 唯一的. 并且可假设 $r_1(w), r'_1(w) \neq w$(否则, 我们有 $r(w) = r'(w)$). 当 $r_1 = r'_1$ 时, 由于 $r_1(w) = r'_1(w)$ 都是严格小于 w 的字, 所以根据归纳假设, $r(w) = \mathrm{red}(r_1(w)), r'(w) = \mathrm{red}(r'_1(w))$, 于是 $r_1(w) = r'_1(w)$ 保证了 $r(w) = r'(w)$. 下面设 $r_1(w) \neq r'_1(w)$ 并设 r_1 变动的字为 w_σ, r'_1 变动的字为 w_τ. 那么字 w_σ 与 w_τ 在 w 中可能重叠、包含或是无重叠部分. 我们分这三种情况讨论证明 $r(w) = r'(w)$.

Case 1. 当 w_σ, w_τ 重叠时, 我们不妨设存在 $t, u, y, z \in W$ 使得 $w = y w_\sigma u z = y t w_\tau z$. 这时我们有重叠歧义 $w_\sigma u = t w_\tau$ 以及有 $r_1 = r_{y,\sigma,uz}, r_2 = r_{yt,\tau,z}$. 由条件, 所有重叠歧义可解, 因此存在 reductions s_1, s_2 使得 $s_1 r_{1,\sigma,u}(w_\sigma u) = s_2 r_{t,\tau,1}(t w_\tau)$. 于是 s_1, s_2 可自然诱导 w 上 reductions(在分解中的每个初等 reduction $r_{a,\rho,b}$ 改为 $r_{ya,\rho,bz}$)s'_1, s'_2 使得 $s'_1 r_1(w) = s'_2 r_2(w)$. 利用 [引理1.3] 以及 $r_1(w), r'_1(w)$ 的 reduction 唯一性, 得到 $\mathrm{red}(r_1(w)) = \mathrm{red}(r'_1(w))$. 因此 $r(w) = \mathrm{red}(r_1(w)) = \mathrm{red}(r'_1(w)) = r'(w)$.

Case 2. 当 w_σ, w_τ 产生包含歧义时, 不妨设有 $t, u, y, z \in W$ 使得 $w = y t w_\sigma u z = y w_\tau z$. 这时有包含歧义 $t w_\sigma u = w_\tau$, 且 $r_1 = r_{t,\sigma,u}$ 以及 $r_2 = r_{1,\tau,1}$. 由包含歧义可解, 存在 reductions s_1, s_2 使得 $s_1 r_{t,\sigma,u}(t w_\sigma u) = s_2 r_{1,\tau,1}(w_\tau)$. 类似重叠歧义情形的讨论, 有 w 上 reductions s'_1, s'_2 使得 $s'_1 r_1(w) = s'_2 r_2(w)$. 根据归纳假设, 这里 $r_1(w), r'_1(w)$ 都是 reduction 唯一的, 故重复重叠歧义情形的讨论便知 $r(w) = r'(w)$.

Case 3. 当 w_σ, w_τ 无重叠部分时, 不妨设有 $u, y, z \in W$ 使得 $w = y w_\sigma u w_\tau z$. 这时 $r_1 = r_{y,\sigma,u w_\tau z}$ 且 $r'_1 = r_{y w_\sigma u,\tau,z}$. 于是 $r_1(w) = y f_\sigma u w_\tau z, r'_1(w) = y w_\sigma u f_\tau z$ 都是 reduction 唯一的. 注意到 $y f_\sigma u f_\tau z$ 也是 reduction 唯一的, 并且 $\mathrm{red}(r_1(w)) = \mathrm{red}(y f_\sigma u f_\tau z) = \mathrm{red}(r'_1(w))$, 所以我们有 $r(w) = r'(w)$.

于是, 由超限归纳原理得到 W 中所有元素 reduction 唯一, 进而得到 (1)⇒(2). 最后证明 (2)⇒(3) 来完成证明. 设 F 中所有元素 reduction 唯一, 那么 [命题1.6] 说明我们有 $\Bbbk$-线性映射 $\mathrm{red}: F \to F$, 且 $V = \mathrm{red}(F)$ 就是所有约化字张成的 $\Bbbk$-子空间, 结合 reduction 唯一性的定义知约化字集给出 V 的 $\Bbbk$-基. 我们有 $\Bbbk$-线性满射 $\mathrm{red}: F \to V$ 且 red 在 V 上的限制映射是恒等映射, 从而有 $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{red}) \oplus V$. 下证 $\mathrm{Ker}(\mathrm{red}) = I$ 来得到约化字集在 F/I 中的像集是 F/I 的 $\Bbbk$-基. 先说明 $I \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{red})$: 只需证任何形如 $u g_\sigma v$(这里 $u, v \in W$) 的元素在 red 的作用下为零. 事实上, $r_{u,\sigma,v}: F \to F$ 明显将 $u g_\sigma v$ 映至零, 进而 $0 = \mathrm{red}(u g_\sigma v)$, 所以 $I \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{red})$. 根据 [引理1.3], F 中任何元素都能加上一些 I 中元素的和后属于 V. 所以 $F = I + V \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{red}) \oplus V = F$. 这迫使 $I = \mathrm{Ker}(\mathrm{red})$. 于是我们得到约化字集在 F/I 中的像集是 F/I 的 $\Bbbk$-基. □

1.3 应用算例

Example 1.10 (量子仿射空间, [BG02]). 设 $n \ge 2$ 是正整数, $q_{ij} \in \Bbbk^\times$ 满足 $q_{ii} = 1$ 以及 $q_{ij} q_{ji} = 1, \forall 1 \le i, j \le n$. 考虑乘性反对称阵 $\boldsymbol{q} = (q_{ij})_{n \times n}$ 处的量子仿射空间 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n) = \Bbbk\langle x_1, ..., x_n \rangle / (x_i x_j - q_{ij} x_j x_i)$, 命 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ 并使用左长度字典序比较 $x_1, ..., x_n$ 上的字. 定义 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 的生成关系给出 reduction 系统 $S = \{(x_i x_j, q_{ij} x_j x_i) \mid 1 \le j < i \le n\}$. 根据 [注记1.5], S 的所有包含歧义可解 (只有平凡的包含歧义). 下面说

明所有重叠歧义可解: 只需证对任何正整数 $1 \leq k < j < i \leq n$ 产生的重叠歧义 $x_i x_j x_k$ 可解. 我们有

$$(x_i x_j) x_k \to q_{ij} x_j (x_i x_k) \to q_{ij} q_{ik} (x_j x_k) x_i \to q_{ij} q_{ik} q_{jk} x_k x_j x_i,$$

$$x_i (x_j x_k) \to q_{jk} (x_i x_k) x_j \to q_{jk} q_{ik} x_k (x_i x_j) \to q_{jk} q_{ik} q_{ij} x_k x_j x_i.$$

所以 reduction 系统的所有重叠歧义和包含歧义可解, 根据钻石引理得到约化字集对应的 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 中像集, 即 $\{x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \cdots x_n^{\ell_n} \mid \ell_1, ..., \ell_n \in \mathbb{N}\}$, 构成 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 的 $\Bbbk$-基.

Example 1.11 (非交换 Jordan 平面, [BRS+16])**.** 回忆 Jordan 平面是由生成元 x, y 和生成关系 $xy - yx = y^2$ 定义的 $\Bbbk$-代数, 这里记作 $\mathcal{J}$. 定义 $x < y$ 并使用左长度字典序比较 x, y 上的字. 我们有 reduction 系统 $S = \{(yx, xy - y^2)\}$. [注记1.5] 表明 S 中包含歧义都是平凡的. 而 S 明显没有重叠歧义, 所以根据钻石引理我们得到 $\{x^i y^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ 是 Jordan 平面 $\mathcal{J}$ 的 $\Bbbk$-基.

Example 1.12 ([BRS+16])**.** 设 A 是由生成元 x, y 以及生成关系 $xy^2 = y^2 x, yx^2 = x^2 y$ 定义的 $\Bbbk$-代数. 定义 $x < y$ 并使用左长度字典序比较 x, y 上的字. 这时有 reduction 系统 $S = \{(y^2 x, xy^2), (yx^2, x^2 y)\}$. [注记1.5] 表明 S 中包含歧义都是平凡的. 下面说明 S 的所有重叠歧义可解:

$$(y^2 x) x \to x (y^2 x) \to x^2 y^2, \ y (yx^2) \to (yx^2) y \to x^2 y^2.$$

可直接验证 $\{x^i (yx)^j y^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}\}$ 就是约化字全体, 利用钻石引理可知这给出 A 的 $\Bbbk$-基.

Example 1.13 (无限 Taft 代数, [LWZ07])**.** 设 $n \geq 2$ 是正整数, $\epsilon \in \Bbbk^\times$ 是 n 次本原单位根. 回忆 ϵ 处的无限 Taft 代数是由 g, x 生成, 关于生成关系 $g^n = 1, xg = \epsilon gx$ 定义的 $\Bbbk$-代数, 这里记作 T. 定义 $g > x$ 并使用左长度字典序比较 x, g 上的字. 我们有 reduction 系统 $S = \{(g^n, 1), (gx, \epsilon^{-1} xg)\}$. 由于 $n \geq 2$, 这里不存在包含歧义. 下面说明所有重叠歧义可解: $g^n x \to x, g^{n-1}(gx) \to g^{n-1}\epsilon^{-1} xg \to \epsilon^{-2} g^{n-3}(gx) g^2 \to \cdots \to \epsilon^{-n} x g^n \to x$. 而约化字集为 $\{x^i g^j \mid i, j \in \mathbb{N}且 j \leq n-1\}$, 所以由钻石引理便知这给出 T 的 $\Bbbk$-基.

Example 1.14 (Suzuki 代数, [Suz96])**.** 设 H 是由 x_1, x_2, g_1, g_2 生成, 以及生成关系

$$x_i g_j = -g_j x_i, x_i^2 = 0, x_1 x_2 = -x_2 x_1, g_j^2 = 1, g_1 g_2 = g_2 g_1, 1 \leq i, j \leq 2$$

定义的 $\Bbbk$-代数. 我们定义 $x_1 < x_2 < g_1 < g_2$, 那么有 reduction 系统

$$\begin{aligned} S = \{ & (g_2 x_1 \ -x_1 g_2), (g_1 x_2, -x_2 g_1), (g_1 x_1, -x_1 g_1), (g_2 x_2, -x_2 g_2), \\ & (x_1^2, 0), (x_2^2, 0), (g_1^2, 1), (g_2^2, 1), (x_2 x_1, x_1 x_2), (g_2 g_1, g_1 g_2)\}. \end{aligned}$$

根据 [注记1.5], 只要证所有重叠歧义可解. 即要验证下面的重叠歧义都可解.

$$g_2 x_1^2, g_2^2 x_1, g_2 g_1 x_2, g_1^2 x_2, g_1 x_2^2, g_1 x_2 x_1, g_2 g_1 x_1, g_1^2 x_1, g_1 x_1^2, g_2^2 x_2, g_2 x_2^2, g_2 x_2 x_1, g_2 g_1^2, x_2^2 x_1, x_2 x_1^2, g_2^2 g_1.$$

$$g_i x_j^2 : \begin{cases} g_i (x_j^2) \to 0, \\ (g_i x_j) x_j \to -x_j (g_i x_j) \to x_j^2 g_i \to 0. \end{cases}$$

$$g_i^2 x_j : \begin{cases} (g_i^2) x_j \to x_j, \\ g_i (g_i x_j) \to -(g_i x_j) g_i \to x_j g_i^2 \to x_j. \end{cases}$$

$$g_2g_1x_i: \begin{cases} (g_2g_1)x_i \to g_1(g_2x_i) \to -(g_1x_i)g_2 \to x_ig_1g_2, \\ g_2(g_1x_i) \to -(g_2x_i)g_1 \to x_i(g_2g_1) \to x_ig_1g_2. \end{cases}$$

$$g_jx_2x_1: \begin{cases} (g_jx_2)x_1 \to -x_2(g_jx_1) \to (x_2x_1)g_j \to -x_1x_2g_j, \\ g_j(x_2x_1) \to -(g_jx_1)x_2 \to x_1(g_jx_2) \to -x_1x_2g_j. \end{cases}$$

$$g_2^2g_1: \begin{cases} g_2^2g_1 \to g_1, \\ g_2(g_2g_1) \to (g_2g_1)g_2 \to g_1g_2^2 \to g_1. \end{cases}$$

$$x_2^2x_1: \begin{cases} x_2^2x_1 \to 0, \\ x_2(x_2x_1) \to -(x_2x_1)x_2 \to x_1x_2^2 \to 0. \end{cases}$$

$$x_2x_1^2: \begin{cases} (x_2x_1)x_1 \to -x_1(x_2x_1) \to x_1^2x_2 \to 0, \\ x_2x_1^2 \to 0. \end{cases}$$

因此由钻石引理得到所有重叠歧义和包含歧义可解. 这时约化字集为 $\{x_1^{\ell_1}x_2^{\ell_2}g_1^{\ell_3}g_2^{\ell_4} \mid 0 \le \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \le 1\}$. 于是我们得到 H 作为 $\Bbbk$-线性空间有基 $\{x_1^{\ell_1}x_2^{\ell_2}g_1^{\ell_3}g_2^{\ell_4} \mid 0 \le \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \le 1\}$.

参考文献

[Ber78] G.M. Bergman. The diamond lemma for ring theory. *Adv. Math.*, 29(2):178–218, 1978.

[BG02] Ken A. Brown and Ken R. Goodearl. *Lectures on algebraic quantum groups*. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.

[BRS+16] Gwyn Bellamy, Daniel Rogalski, Travis Schedler, J. Toby Stafford, and Michael Wemyss. *Noncommutative algebraic geometry*, volume 64 of *Mathematical Sciences Research Institute Publications*. Cambridge University Press, New York, 2016. Lecture notes based on courses given at the Summer Graduate School at the Mathematical Sciences Research Institute (MSRI) held in Berkeley, CA, June 2012.

[BZ10] K. A. Brown and J. J. Zhang. Prime regular Hopf algebras of GK-dimension one. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 101(1):260–302, 2010.

[LWZ07] D.-M. Lu, Q.-S. Wu, and J. J. Zhang. Homological integral of Hopf algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(10):4945–4975, 2007.

[New42] M. H. A. Newman. On theories with a combinatorial definition of "equivalence.". *Ann. of Math. (2)*, 43:223–243, 1942.

[Suz96] Satoshi Suzuki. Unimodularity of finite-dimensional Hopf algebras. *Tsukuba J. Math.*, 20(1):231–238, 1996.