导出范畴初步

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 12 月 14 日

目录

1 Abel 范畴的补充

我们所学的初等同调代数大多在模范畴上展开, 而随着代数学习的深入或是科研的需要, 就不可避免需要使用建立在 Abel 范畴上的同调代数来作为基本工具. 这里简要回顾 Abel 范畴的相关基本概念以固定记号.

如果范畴 $\mathcal{A}$ 中对象 $0 \in \text{ob}\mathcal{A}$ 满足对任何 $A \in \text{ob}\mathcal{A}$, 态射集 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(0, A)$ 和 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, 0)$ 都是单点集, 则称 0 是 $\mathcal{A}$ 中的一个**零对象**. 易见范畴中的零对象一旦存在, 那么在同构意义下唯一. 例如模范畴中的零模就是零对象. 通常范畴未必存在零对象, 例如考虑模范畴中所有非零模构成的全子范畴. 零对象可以理解为模范畴中零模扮演的角色. 如果范畴 $\mathcal{A}$ 存在零对象 (记作 0), 对任何 $A, B \in \text{ob}\mathcal{A}$, 设 $0_{A,0} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, 0)$ 和 $0_{0,B} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(0, B)$ 是相应态射集中唯一的态射. 称 $0_{A,B} = 0_{0,B}0_{A,0} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ 是 A 到 B 的**零态** (经常简记作 0). 可直接验证 A 到 B 的零态不依赖于零对象的具体选取. 对存在零对象 0 的范畴 $\mathcal{A}$, 任何态射 $f : A \to B$ 和对象 C 满足 $0_{B,C}f = 0_{A,C}$ 以及 $f0_{C,A} = 0_{C,B}$. 现在我们回顾加性范畴的概念:

Definition 1.1. 加性范畴, [Jac89] 称范畴 $\mathcal{A}$ 是**加性范畴**, 如果

- (AC1) 范畴 $\mathcal{A}$ 存在零对象;
- (AC2) 对任何 $A, B \in \text{ob}\mathcal{A}$, 态射集 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ 上有二元运算 $+$ 使得 $(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B), +)$ 构成 Abel 群;
- (AC3) 对任何 $A, B, C \in \text{ob}\mathcal{A}$, $f, f_1, f_2 : A \to B$ 以及 $g, g_1, g_2 : B \to C$ 有如下分配律:
$$g(f_1 + f_2) = gf_1 + gf_2, (g_1 + g_2)f = g_1f + g_2f;$$
- (AC4) 任给有限多个对象 $A_1, ..., A_n \in \text{ob}\mathcal{A}$, 存在对象 $A \in \text{ob}\mathcal{A}$ 和态射 $p_k : A \to A_k, i_k : A_k \to A$(这里 $1 \leq k \leq n$) 使得 $p_ki_k = 1_{A_k}$ 对所有 $1 \leq k \leq n$ 成立, 对 $1 \leq k \neq j \leq n$ 有 $p_ji_k = 0$ 以及
$$i_1p_1 + i_2p_2 + \cdots + i_kp_k = 1_A.$$

Remark 1.2. 通常将仅满足 (AC2) 和 (AC3) 的范畴称为**预加性范畴**, 见 [Ste75]. 根据对偶范畴的定义立即看到任何加性范畴 $\mathcal{A}$ 的对偶范畴 $\mathcal{A}^{op}$ 依然是加性范畴. 不同的是 (AC4) 中态射 p_k 和 i_k 的位置在 $\mathcal{A}^{op}$ 中互换.

利用加性范畴中的 (AC3) 容易验证加性范畴 $\mathcal{A}$ 中任何两个对象 A, B 间的零态 $0_{A,B}$ 就是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ 中的零元. 并且固定 (AC4) 中的记号可直接验证任何对象 $A_1, ..., A_n \in \text{ob}\mathcal{A}$, $\{A_k\}_{k=1}^n$ 在范畴 $\mathcal{A}$ 中的积和余积都存在: $(A, \{i_k\}_{k=1}^n)$ 是 $\{A_k\}_{k=1}^n$ 在范畴 $\mathcal{A}$ 中的余积并且 $(A, \{p_k\}_{k=1}^n)$ 是 $\{A_k\}_{k=1}^n$ 在范畴 $\mathcal{A}$ 中的积. 一般地, 对满足 (AC1)-(AC3) 的范畴 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ 满足 (AC4) 的充要条件是 $\mathcal{A}$ 中任意有限多个对象的积存在 (类似地, 也等价于 $\mathcal{A}$ 中任意有限多个对象的余积存在). 根据 (AC4) 和前面的讨论看到加性范畴中任意有限多个对象的积对象和余积对象同构, 因此群范畴存在零对象但不是加性范畴. 模范畴明显是加性范畴.

下面我们回顾加性范畴中积/余积对象间态射非常便利的记号.

Notation 1.3. 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_m \in \text{ob}\mathcal{A}$, 并且对每个 $1 \leq j \leq n$ 和 $1 \leq i \leq m$ 有态射 $a_{ij} : X_j \to Y_i$. 现在有 $\{X_j\}_{j=1}^n$ 的积对象和余积对象可取为同一对象 $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$(并记 $i_k : X_k \to X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ 是标准映射), 同样设 $Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m$ 是 $\{Y_i\}_i^m$ 的积对象以及余积对象 ($q_k : Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m \to Y_k$ 是标准映射). 那

么存在唯一的态射 $\xi : X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \to Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m$ 使得对任何 $1 \le s \le n$ 和 $1 \le t \le m$ 有 $q_t \xi i_s = a_{ts}$. 将 ξ 记作 $(a_{ij})_{m\times n}$, 那么在此记号下 i_k 可写作下述形式 (第 k 行为 1 其余元素为零):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : X_k \to X_1 \oplus \cdots \oplus X_n.$$

而 q_k 可表达为 $(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) : Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m \to Y_k$(第 k 分量为 1, 其余分量为零). 在此记号下, 如果还有 $Z_1, ..., Z_\ell \in \text{ob}\mathcal{A}$ 和态射 $g_{lt} : Y_t \to Z_l$, 这诱导态射 $(b_{lt})_{\ell\times m} : Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m \to Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_\ell$, 可直接验证

$$X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \xrightarrow{(a_{ij})_{m\times n}} Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m \xrightarrow{(b_{lt})_{\ell\times m}} Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_\ell$$

的合成态射就是 $(b_{lt})_{\ell\times m}(a_{ij})_{m\times n} = (c_{ij})_{\ell\times n}$, 这里 $c_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{im}a_{mj}$. 类似地, 在态射的矩阵记号下, 具有相同始对象和终对象的两个态射之和在矩阵记号下, 每个分量是原有位置矩阵分量之和.

上述记号可以让我们保持矩阵计算的习惯来处理态射的合成. 在加性范畴场景我们主要感兴趣**加性函子**, 即加性范畴间诱导态射集间加群同态的函子. 可直接证明加性范畴间的函子是加性的当且仅当该函子保持任意有限积和有限余积; 加性范畴间的加性函子将零对象映至零对象. 如果 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是加性范畴间的加性函子, 那么对任何 $X, Y \in \text{ob}\mathcal{A}$ 有 $F(X \oplus Y) \cong FX \oplus FY$. 从这个观察我们证明

Proposition 1.4. 设 $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 都是加性范畴间的加性函子, $\eta : F \to G$ 是自然变换且 $X, Y \in \text{ob}\mathcal{A}$. 那么 $\eta_{X\oplus Y} : F(X \oplus Y) \to G(X \oplus Y)$ 是 $\mathcal{B}$ 中同构的充要条件是 $\eta_X : FX \to GX$ 和 $\eta_Y : FY \to GY$ 都是同构.

Proof. 因为加性函子保持有限积和有限余积, 所以不妨设 $F(X \oplus Y) = FX \oplus FY$ 和 $G(X \oplus Y) = GX \oplus GY$, 那么根据 (AC4) 有下述交换图:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r] \arrow[d, "\eta_X"'] & FX \oplus FY \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{X\oplus Y}"] & FY \arrow[d, "\eta_Y"] \\ GX \arrow[r] & GX \oplus GY \arrow[r] & GY \end{tikzcd}$$

并且根据我们的假设, 现在有

$$\eta_{X\oplus Y} = \begin{pmatrix} \eta_X & 0 \\ 0 & \eta_Y \end{pmatrix},$$

由此, 结合态射的矩阵记号运算法则, 我们立即看到 $\eta_{X\oplus Y}$ 是同构的充要条件是 η_X, η_Y 为同构. □

类似于模范畴场景, 我们也能在加性范畴中讨论

Definition 1.5 (态射的核, [Jac89])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是有零对象的范畴, $f : A \to B$ 是 $\mathcal{A}$ 中态射. 称态射 $k : K \to A$ 为 $f : A \to B$ 在 $\mathcal{A}$ 中的**核**, 如果满足

- 态射 k 是 monic 态;
- 态射 $fk = 0$;

- 对任给 $\mathcal{A}$ 中对象 G 和态射 $g : G \to A$ 满足 $fg = 0$, 那么存在态射 $g' : G \to K$ 使得 $kg' = g$.

Remark 1.6. 设 $k : K \to A$ 是 (有零对象的) 范畴 $\mathcal{A}$ 中态射 $f : A \to B$ 的核, 那么只要态射 $g : G \to A$ 满足 $fg = 0$, 满足 $kg' = g$ 的态射 g' 存在且唯一. 易知态射的核一旦存在, 那么在同构意义下唯一.

Remark 1.7. 有时为了叙述方便, 也会使用 [Ste75] 中记号将 $f : A \to B$ 在 $\mathcal{A}$ 中的核 $k : K \to A$ 作为态射简记为 $\ker f$, 把 K 记作 $\mathrm{Ker} f$. 那么记号 $\mathrm{Ker} f = 0$ 表示核 $k : K \to A$ 中始对象 $K = 0$. 对 f 的核 $k : K \to A$, 可直接验证加性范畴中 $\mathrm{Ker} f = 0$ 当且仅当 $\ker f = 0$ 以及 $\mathrm{Ker} f = 0$ 的充要条件是 f 是 monic 态. 所以在态射的核存在的前提下, 核能够判别态射是否是 monic 态.

模范畴的全子范畴中态射的核可能与在整个模范畴中的核不同; 模范畴的全子范畴中态射的核可能不存在. 对偶地, 我们也能够在具有零对象的范畴中考虑余核的概念.

Definition 1.8 (态射的余核, [Jac89]). 设 $\mathcal{A}$ 是有零对象的范畴, $f : A \to B$ 是 $\mathcal{A}$ 中态射. 称态射 $c : B \to C$ 为 $f : A \to B$ 在 $\mathcal{A}$ 中的**余核**, 如果满足

- 态射 c 是 epic 态;
- 态射 $cf = 0$;
- 对任给 $\mathcal{A}$ 中对象 H 和态射 $h : B \to H$ 满足 $hf = 0$, 那么存在态射 $h' : C \to H$ 使得 $h'c = h$.

Remark 1.9. 态射的余核一旦存在便在同构意义下唯一. 我们也时常使用记号 $\mathrm{coker} f$ 来表示态射 f 的余核, 并把余核作为态射的终对象记作 $\mathrm{Coker} f$. 那么对态射 $f : A \to B$ 的余核 $c : B \to C$, 记号 $\mathrm{Coker} f = 0$ 表示 $C = 0$. 可直接验证加性范畴中 f 的余核 $\mathrm{Coker} f = 0$ 当且仅当 $\mathrm{coker} f = 0$, 这也等价于 $f : A \to B$ 是 epic 态.

Remark 1.10. 如果加性范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射 $f : A \to B$ 有核 $k : K \to A$, 那么在加性范畴 $\mathcal{A}^{op}$ 中, $f : B \to A$ 有余核 $k : A \to K$. 如果 $\mathcal{A}$ 中态射 $f : A \to B$ 有余核 $c : B \to C$, 那么在加性范畴 $\mathcal{A}^{op}$ 中, $c : C \to B$ 是 $f : B \to A$ 的核. 特别地, 如果加性范畴 $\mathcal{A}$ 中任何态射都存在核以及余核, 那么对偶范畴 $\mathcal{A}^{op}$ 中任何态射也存在核与余核.

Notation 1.11. 类似模范畴, 在加性范畴 $\mathcal{A}$ 中如果态射 $f : A \to B$ 是 monic 态, 会采用记号 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ 来表示 f 是 monic 态; 如果 $f : A \to B$ 是 epic 态, 也会使用记号 $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ 表示 f 是 epic 态. 在 Abel 范畴引入正合性概念后, 将说明这种记号习惯是合理的, 见 [注记1.25].

模范畴中态射的余核明显存在. 现在我们能够正式阐述 Abel 范畴的概念.

Definition 1.12 (Abel 范畴, [Jac89]). 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, 称 $\mathcal{A}$ 是 **Abel 范畴**, 如果

- (AC5) 所有态射的核与余核存在;
- (AC6) 任何 monic 态是其余核的核, epic 态是核的余核;
- (AC7) 对任何态射 $f : A \to B$, 存在 epic 态 e 和 monic 态 m 使得 $f = me$.

Remark 1.13. 如果 Abel 范畴中任意一族对象的积存在, 则称该范畴是**完备的**; 如果 Abel 范畴中任意一族对象的余积 (有时也改称为**直和**) 存在, 则称该范畴是**余完备的**.

Remark 1.14. 设 $\Bbbk$ 是域, 如果 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中任意两个对象的态射集不仅是加法群, 还是 $\Bbbk$-线性空间并且态射的合成是 $\Bbbk$-双线性的, 则称 $\mathcal{A}$ 是 **$\Bbbk$-线性 Abel 范畴**.

Abel 范畴的定义中的 (AC7) 被称为"满单分解", 可以证明满足 (AC5) 和 (AC6) 的加性范畴自动满足 (AC7), 即这里的条件 (AC7) 本质上是多余的. 我们在下面的 [引理1.15] 记录其证明, 以后将自由地使用.

Lemma 1.15. 设 $\mathcal{A}$ 是满足 (AC5) 和 (AC6) 的加性范畴, 那么 $\mathcal{A}$ 满足 (AC7).

Proof. 设 $f: A \to B$ 是 $\mathcal{A}$ 中的态射并有核 $k: \mathrm{Ker}f \to A$ 以及 k 的余核 $e: A \to \mathrm{Coker}k$, 则对下图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"] & B \\
& & \mathrm{Coker}k \arrow[d] & \\
& & 0 &
\end{tikzcd}$$

由 $fk = 0$ 知存在态 $m: \mathrm{Coker}k \to B$ 使得 $f = me$. 这里 e 作为 k 的余核是 epic 态, 故只要证 m 是 monic 态. 因为 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, 所以要证明 m 是 monic 态只需证明对任何满足 $mg = 0$ 的态 $g: D \to \mathrm{Coker}k$, 有 $g = 0$.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & B \\
 & & D \arrow[r, "g"] & \mathrm{Coker}k \arrow[d] \arrow[ur, "m"'] & \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

设 $l: \mathrm{Coker}k \to \mathrm{Coker}g$ 是 g 的余核, 如果我们能够证明 l 是 monic 态, 那么就得到了 $g = 0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f \arrow[r, "k"] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "e"'] & & B \\
& D \arrow[r, "g"] & \mathrm{Coker}k \arrow[d] \arrow[urr, "m"'] \arrow[r, "l"] & \mathrm{Coker}g \arrow[ur, dashed, "h"'] & \\
& & 0 & &
\end{tikzcd}$$

下证 l 是 monic 态. 因为 $mg = 0$, 所以存在态 $h: \mathrm{Coker}g \to B$ 使得 $m = hl$. 易见有 $f = hle$. 设 $k': \mathrm{Ker}(le) \to A$ 是态 le 的核, 那么 $lek' = 0$. 进而 $fk' = hlek' = 0$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Ker}(le) \arrow[dr, "k'"] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f \arrow[r, "k"] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "e"'] & & B \\
D \arrow[rr, "g"] & & \mathrm{Coker}k \arrow[d] \arrow[urr, "m"'] \arrow[r, "l"] & \mathrm{Coker}g \arrow[ur, "h"'] & \\
& & 0 & &
\end{tikzcd}$$

因此由 k 是 f 的核知存在态 $q : \mathrm{Ker}(le) \to \mathrm{Ker}f$ 使得 $k' = kq$. 所以 $ek' = ekq = 0$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Ker}(le) \arrow[d, dashed, "q"'] \arrow[dr, "k'"] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & B \\
& D \arrow[r, "g"] & \mathrm{Coker}k \arrow[r, "l"] \arrow[ur, "m"'] \arrow[d] & \mathrm{Coker}g \arrow[u, "h"'] \\
& & 0 &
\end{tikzcd}$$

利用 k' 是 le 的核容易验证 k' 也是 e 的核. 于是由 AC6 知 e 与 el 都是 k' 的余核, 从而由余核的同构唯一性知存在同构 $u : \mathrm{Coker}g \to \mathrm{Coker}k$ 使得 $ule = e$. 利用 e 是 epic 态得到 $ul = 1_{\mathrm{Coker}k}$, 这说明 l 是 monic 态. 于是结合前面的讨论知 $g = 0$, 所以 m 是 monic 态. 这就证明了满单分解 $f = me$ 的存在性. □

设 $\mathcal{A}$ 是满足 (AC5) 的加性范畴, 那么任何态射 $f : A \to B$ 对应

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c_1"'] & B \arrow[r, "c"] & C \arrow[r] & 0 \\
& & \mathrm{Coker}k \arrow[d] & \mathrm{Ker}c \arrow[u, "k_1"'] & & \\
& & 0 & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

于是存在唯一的态射 $\overline{f} : \mathrm{Coker}k \to \mathrm{Ker}c$ 使得 $f = k_1\overline{f}c_1$. 可以证明满足 (AC5) 的加性范畴是 Abel 范畴当且仅当任何态射 $f : A \to B$ 在上述讨论下导出的态射 $\overline{f} : \mathrm{Coker}k \to \mathrm{Ker}c$ 是同构. 因此在 Abel 范畴中总有“同态定理”成立. 任何范畴中的同构既是 monic 态也是 epic 态. 在 Abel 范畴中既是 monic 态也是 epic 态的态射一定是同构: 根据 [注记1.6] 和 [注记1.9], 可选取 coker$k$ 为 1_A 以及选取 ker$c$ 为 1_B, 于是 $f = \overline{f}$ 是同构.

Example 1.16. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 那么 $\mathcal{A}^{op}$ 也是 Abel 范畴.

Proof. 从 [注记1.2] 以及 [注记1.10] 以及 [引理1.15] 知只需要说明 $\mathcal{A}^{op}$ 满足 (AC6). 而由 $\mathcal{A}^{op}$ 中的 monic 态是 $\mathcal{A}$ 中的 epic 态, $\mathcal{A}^{op}$ 中的 epic 态是 $\mathcal{A}$ 中 monic 态结合 [注记1.10] 便知 $\mathcal{A}^{op}$ 满足 (AC6). □

范畴 $\mathcal{A}$ 中对象 A 的子对象原本指代终对象是 A 的某 monic 态所在的等价类, 为了讨论方便时常将该等价类的代表元记作/称作 A 的子对象. 即对任何 monic 态 $\iota : A' \to A$, 将 ι 或 A' 称为 A 的子对象. 在这一术语下, 态射 $f : A \to B$ 如果核存在, ker$f$ 便是 A 的一个子对象 (也能说 Ker$f$ 是 A 的子对象). 如果 A 的子对象 $\iota_1 : A_1 \to A$ 和子对象 $\iota_2 : A_2 \to A$ 满足存在态射 $u : A_2 \to A_1$ 使得 $\iota_1 u = \iota_2$(这时 u 自动是 monic 态), 记 $A_1 \subseteq A_2$. 在此记号下, 如果 A 有子对象 $\iota_1 : A_1 \to A$ 和子对象 $\iota_2 : A_2 \to A$ 满足 $A_1 \subseteq A_2$ 和 $A_2 \subseteq A_1$, 那么 ι_1 和 ι_2 所对应的子对象 (等价类) 是相同的. 对于商对象我们也常将商对象作为 epic 态等价类的一个代表元称为给定对象的商对象. 于是范畴中的态射 $f : A \to B$ 的余核只要存在, 我们能够把 coker$f$ 称为 B 的商对象.

Notation 1.17. 在 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中, 如果对象 A 有子对象 A'(即有 monic 态 $\iota : A' \to A$), 将 A 的商对象 cokerι 的终对象 Cokerι 记作 A/A'(虽然从 A' 到 A 的等价的 monic 态未必唯一, 但 A/A' 在同构意义下唯一).

现在给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射 $f: A \to B$, 称 $\mathrm{Ker}(\mathrm{coker} f)$ 为 f 的**像**, 记作 $\mathrm{Im} f$, 它可视作 B 的子对象. 根据态射核的定义, 严格地说这里的 $\mathrm{Im} f$ 来自某个 monic 态 $\iota: \mathrm{Im} f \to B$, 并且对象 $\mathrm{Im} f$ 所在的同构类被 f 唯一决定. 在此记号下, 根据态射的核的定义, 存在唯一的态射 $f': A \to \mathrm{Im} f$ 使得

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "f'"'] & & B \\ & \mathrm{Im} f \arrow[ur, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

交换, 这里 $f': A \to \mathrm{Im} f$ 利用 (AC7) 可知是 epic 态 (这里的 f' 仅在取定 ι 的前提下唯一, 对于 $\mathrm{Ker}(\mathrm{coker} f)$ 对应 monic 态的不同代表元 ι 的选取定义出的态射 f' 对应 A 的商对象 (等价类) 被 f 唯一决定). 利用 [记号1.17], 态射 $f: A \to B$ 导出的同构 $\overline{f}: \mathrm{Coker} k \to \mathrm{Ker} c$ 能够重新表述为 $A/\mathrm{Ker} f \cong \mathrm{Im} f$.

Example 1.18. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $f: A \to B$ 是 epic 态, 那么零态 $B \to 0$ 是 f 的余核. 因此 $1_B: B \to B$ 是 f 的余核的核, 进而在我们的记号下有 $\mathrm{Im} f \cong B$. 如果 f 是 monic 态, 那么由 $\mathrm{Ker} f = 0$ 得到 $A \cong \mathrm{Im} f$.

Example 1.19 (子对象族的和, [Ste75]). 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 并设 $\mathcal{A}$ 中的对象族 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$(这里 Λ 是指标集) 满足都是 X 的子对象且存在直和 $(\oplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha; i_\alpha: X_\alpha \to \oplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha)$, 这里把 X_α 作为 X 的子对象取定一个 monic 态 $\iota_\alpha: X_\alpha \to X$. 则有唯一的态射 $\iota: \oplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \to X$(未必 monic) 使下图对所有的指标 $\alpha \in \Lambda$ 交换:

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[rr, "i_\alpha"] \arrow[dr, "\iota_\alpha"'] & & \oplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \arrow[dl, dashed, "\iota"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

那么态射 ι 的像集 $\mathrm{Im}\iota$ 是 X 的子对象, 称 $\mathrm{Im}\iota$ 为 X 的子对象族 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 的**和** (这里假定了直和对象的存在性, 当 Λ 是有限集时, (AC4) 保证了有限直和总存在), 记作 $\sum_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$. 如果每个 $\alpha \in \Lambda$ 所对应的 ι_α 选取不同, 定义出的态射 $\oplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \to X$ 与 ι 相差某个同构. 进而不同选取的 ι_α 定义出的和对象 $\sum_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ 都是同构的. 将上述态射 ι 的标准分解设为下图, 其中 ι' 是 epic 态, j 是 monic 态.

$$\begin{tikzcd} \oplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\iota'"'] & & X \\ & \sum_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

如果上图中的 epic 态 $\iota': \oplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \to \sum_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ 进一步是 monic 态, 即给出同构 $\oplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \cong \sum_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$, 这时称 X 的子对象族 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是**独立的**, 并称和对象 $\sum_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ 是**直和的**. 注意每个 X_α 都是和对象 $\sum_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ 的子对象: 对态射 $\iota' i_\alpha: X_\alpha \to \sum_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$, 注意到 $j\iota' i_\alpha = \iota_\alpha$ 是 monic 态, 所以 $\iota' i_\alpha$ 是 monic 态.

$$\begin{tikzcd} & X & \\ X_\alpha \arrow[ur, "\iota_\alpha"] \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[drr, bend right, "\iota' i_\alpha"'] & \oplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \arrow[u, "\iota"'] \arrow[dr, "\iota'"] & \\ & & \sum_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \arrow[ul, bend right, "j"'] \end{tikzcd}$$

依然保持对象 X 的子对象族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的直和存在的假设. 我们说明如果 X 有子对象 $\ell: W \to X$ 满足所有的 $\alpha \in \Lambda$ 都有 $X_\alpha \subseteq W$, 那么也有 $\sum_{\alpha\in\Lambda} \subseteq W$, 进而知子对象族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的和对象作为 X 的子对象是所有包含全体 X_α 的子对象中最小者. 首先对每个 $\alpha \in \Lambda$ 有态射 $u_\alpha : X_\alpha \to W$ 使得 $\ell u_\alpha = \iota_\alpha$, 于是由余积的定义知存在唯一的态射 $u : \oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to W$ 使得 $ui_\alpha = u_\alpha$. 进而 $\ell ui_\alpha = \ell u_\alpha, \forall\alpha \in \Lambda$, 由此得到 $\iota i_\alpha = \ell ui_\alpha, \forall\alpha \in \Lambda$, 由余积的定义得到 $\ell u = \iota$. 现在容易验证 $k : \mathrm{Ker}\iota \to \oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 也是 ι' 的核, 所以 ι' 是 k 的余核. 从而由 $\ell uk = 0$ 得到存在唯一的态射 $v : \mathrm{Im}\iota \to W$ 使得 $vu = \iota'$(注意这里 $\mathrm{Im}\iota = \sum_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$). 从而由 $j\iota' = \ell u = \ell v\iota'$ 以及 ι' 是 epic 态得到 $\ell v = j$. 而 j 是 monic 态也说明 v 是 monic 态, 因此 $\sum_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \mathrm{Im}\iota \subseteq W$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\iota \arrow[r, "k"] & \oplus_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\iota'"] \arrow[ddr, bend right, "\iota"'] & & W \arrow[ddl, bend left, "\ell"] \\
& & \mathrm{Im}\iota \arrow[ur, dashed, "v"'] \arrow[d, "j"] & \\
& & X &
\end{tikzcd}
$$

设 R 是含幺环. 在模范畴 R-**Mod** 情形, 取定左 R-模 X 的子模族 $\{X_\alpha\}_\alpha$, 有标准嵌入 $\iota_\alpha : X_\alpha \to X$, 这时模的直和 $\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 到 X 的诱导同态 ι 的像就是通常子模 X_α 的和, 并且子模族 $\{X_\alpha\}_\alpha$ 的和是直和当且仅当相应的同态 $\iota' : \oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to \sum_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 是单射.

如果 A 有子对象 $\iota : A' \to A$, 用 $f(A')$ 表示 $f\iota : A' \to A$. 前面已经指出 Abel 范畴中的态射 $f : A \to B$ 定义出的像 $\mathrm{Im}f$ 作为 B 的子对象被 f 唯一决定. 于是我们能够像模范畴情形在 Abel 范畴讨论正合.

Definition 1.20 (正合列, [Ste75]). 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 并有态射序列

$$\cdots \longrightarrow X_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \longrightarrow \cdots .$$

如果 $\mathrm{Im}f_{i-1} = \mathrm{Ker}f_i$(作为 X_i 的子对象), 那么称上述序列, 或 f_{i-1} 和 f_i 在 X_i 处**正合**. 如果上述态射序列在每个指标 i 对应的对象 X_i 处正合, 则称上述态射序列是 $\mathcal{A}$ 中的**正合列**. 形如 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 的正合列称为**短正合列**.

Remark 1.21. 现在设 $f : A \to B$ 和 $g : B \to C$ 作为 Abel 范畴中的态射在 B 处正合. 设 $\iota : \mathrm{Im}f \to B$ 是态射 $f : A \to B$ 的像作为 B 的子对象的代表元, j : $\mathrm{Ker}g \to C$ 是态射 $g : B \to C$ 的核作为 B 的子对象的代表元. 根据正合的定义, 存在同构 $u : \mathrm{Im}f \to \mathrm{Ker}g$ 使得下图交换:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & B \arrow[r, "g"] & C \\
\mathrm{Im}f \arrow[ur, "\iota"] \arrow[rr, dashed, "u"] & & \mathrm{Ker}g \arrow[ul, "\mathrm{j}"']
\end{tikzcd}
\tag{1.1}
$$

由此可知 $gf = 0$ 并且根据 $gf = 0$ 导出的 $\mathrm{Im}f$ 到 $\mathrm{Ker}g$ 的态射 (即 u) 是同构. 反之, 如果态射 $f : A \to B$ 和 $g : B \to C$ 满足 $gf = 0$ 并且由 $gf = 0$ 所导出使得图 (1.1) 交换的唯一态射 $u : \mathrm{Im}f \to \mathrm{Ker}g$ 是同构, 那么自然作为 B 的子对象有 $\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}g$. 因此一旦 $gf = 0$, 取定 f 的像以及 g 的核的代表元后可通过验证图 (1.1) 中的态射 u 是同构来验证 f 和 g 在 B 处正合.

Remark 1.22. 如果 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中有正合列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, 那么 $\mathcal{A}^{op}$(回忆 [例1.16]) 中的态射序列

$$C \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} A$$

也正合. 回忆 $\mathcal{A}^{op}$ 中 f 的核来自 f 在 $\mathcal{A}$ 中的余核, g 在 $\mathcal{A}^{op}$ 中的像来自 g 在 $\mathcal{A}$ 中核的余核. 并且考虑 $\mathcal{A}$ 中 $f: A \to B$ 的标准分解 $f = \iota f'$, 这里 $f': A \to \mathrm{Im}f$ 是 epic 态且 $\iota: \mathrm{Im}f \to B$ 是 monic 态后可知 f 在 $\mathcal{A}$ 中的余核也是 ι 在 $\mathcal{A}$ 中的余核. 所以要证明 $\mathcal{A}$ 中 f 的余核就是 g 的核的余核, 只需证明 $\mathcal{A}$ 中 ι 就是 g 在 $\mathcal{A}$ 中的核, 而这来自 $\mathcal{A}$ 中正合性的定义. 因此 $C \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} A$ 在 $\mathcal{A}$ 中也正合.

因为 Abel 范畴中 monic 态都是其余核的核, 所以如果 $k: K \to A$ 是态射 $f: A \to B$ 的核, 那么 $\mathrm{Im}k = \mathrm{Ker}f$, 即态射 $f: A \to B$ 导出正合列 $K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B$. 如果态射 $g: B \to C$ 有余核 $c: C \to \mathrm{Coker}g$, 那么根据态射的像的定义立即得到 $\mathrm{Im}g = \mathrm{Ker}c$, 故有正合列 $B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{c} \mathrm{Coker}g$. 反之, 如果态射序列

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

正合, 那么 f 是 monic 态蕴含 $f: A \to B$ 是 $g: B \to C$ 的核. 在上述序列正合的前提下, g 是 epic 态蕴含标准映射 $\iota: \mathrm{Im}f \to B$ 是 g 的核且 $g: B \to C$ 是 ι 的余核. 进而利用 $f: A \to B$ 可经对象 $\mathrm{Im}f$ 分解为 epic 态和 monic 态的合成易见 f 是 g 的核. 所以上面的讨论证明了

Proposition 1.23. 对 Abel 范畴中的态射序列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, 有
(1) 态射 f 是 g 的核当且仅当该序列正合且 f 是 monic 态.
(2) 态射 g 是 f 的余核当且仅当该序列正合且 g 的 epic 态.

Lemma 1.24. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 并有态射序列 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$, 那么该序列是短正合列的充要条件是 f 与 g 在 B 处正合, f 是 monic 态且 g 是 epic 态.

Proof. 必要性: 设 f 和零态在 A 处正合, 那么由 $1_A: A \to A$ 是零态 $0 \to A$ 的余核以及零态 $0 \to A$ 是 monic 态可知零态的像 $\mathrm{Im}0 = 0$. 于是由正合性得到 $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Im}0 = 0$, 应用 [注记1.7] 得到 f 是 monic 态. 类似地, 零态 $C \to 0$ 是 epic 态并且有核 $1_C: C \to C$, 所以 $\mathrm{Im}g = 1_C$(作为 C 的子对象), 于是由 g 和 g 的余核的合成为零态得到存在态射 $g': C \to B$ 使得 $gg' = 1_C$, 这说明 g 是 epic 态.

充分性: 现在设 f 是 monic 态, g 是 epic 态且 f 和 g 在 B 处正合. 那么由 [注记1.7] 知 $\mathrm{Ker}f = 0 = \mathrm{Im}0$ 且 [注记1.9] 说明 $\mathrm{Coker}g = 0$. 进而 $\mathrm{Im}g = 1_C$(作为 C 的子对象), 因此由零态 $C \to 0$ 的核也是 1_C(作为 C 的子对象) 得到 $\mathrm{Im}g = \mathrm{Ker}0$. 这说明 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$, 是正合的. □

Remark 1.25. 根据 [引理1.24] 的讨论, 态射 $f: A \to B$ 是 monic 态当且仅当 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ 是正合的. 而态射 $g: B \to C$ 是 epic 态也等价于 $B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 正合. 于是我们能够将 [命题1.23] 重述为序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

正合的充要条件是 f 是 g 的核. 序列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 正合当且仅当 g 是 f 的余核.

Example 1.26 (子对象的交, [Ste75]). 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $X\in\mathrm{ob}\mathcal{A}$ 并设 $\mathcal{A}$ 中的对象族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$(这里 Λ 是指标集) 满足都是 X 的子对象且对象族 $\{X/X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 存在积, 相应的标准态射记作 $p_\alpha:\prod_{\alpha\in\Lambda}X/X_\alpha\to X/X_\alpha$. 使用 [例1.19] 中相同的记号, 将子对象态射 $X_\alpha\to X$ 记作 ι_α, 那么有正合列

$$0\longrightarrow X_\alpha\xrightarrow{\iota_\alpha}X\xrightarrow{\pi_\alpha}X/X_\alpha\longrightarrow 0,$$

进而根据积的定义, 存在唯一的态射 $\pi:X\to\prod_{\alpha\in\Lambda}X/X_\alpha$ 使得对所有指标 $\alpha\in\Lambda$ 有 $p_\alpha\pi=\pi_\alpha$. 将态射 π 的核称为 X 的子对象族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的**交**, 记作 $\cap_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$. 根据定义立即得到 $\cap_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 是 X 的子对象. 记子对象的标准映射为 $k:\cap_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha\to X$, 进而 $\pi_\alpha k=0$, 因此由 ι_α 是 π_α 的核得到存在唯一的态射 $t_\alpha:\cap_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha\to X_\alpha$ 使得

$$\begin{tikzcd}
\prod_{\alpha\in\Lambda}X/X_\alpha \arrow[rr, "p_\alpha"] & & X/X_\alpha \\
& X \arrow[ul, "\pi"] \arrow[ur, "\pi_\alpha"'] & \\
X_\alpha \arrow[ur, "\iota_\alpha"] & & \cap_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha \arrow[ul, "k"'] \arrow[ll, dashed, "t_\alpha"']
\end{tikzcd}$$

交换. 根据 k 是 monic 态立即得到 t_α 也是 monic 态. 现在我们说明 $\cap_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 是 X 的子对象中含于所有 X_α 中的最大者. 现在设 X 有子对象 $\ell:W\to X$ 满足 $W\subseteq X_\alpha,\forall\alpha\in\Lambda$, 即有子对象态射 $j_\alpha:W\to X_\alpha$ 使得对所有的指标 $\alpha\in\Lambda$ 有 $\iota_\alpha j_\alpha=\ell$. 于是 $\pi_\alpha\ell=0,\forall\alpha\in\Lambda$, 由此结合积的定义得到 $\pi\ell=0$. 因此存在唯一的态射 $s:W\to\cap_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 使得 $\ell=ks$, 而 ℓ 是 monic 态蕴含 s 也是 monic 态, 因此 $W\subseteq\cap_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$.

如果 Abel 范畴间的加性函子 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$(这里讨论共变情形, 逆变类似定义) 满足对任何短正合列

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$$

有 $0\longrightarrow FA\xrightarrow{F(f)}FB\xrightarrow{F(g)}FC$ 正合, 则称 F 是**左正合函子**. 如果对任何上述形式短正合列有

$$FA\xrightarrow{F(f)}FB\xrightarrow{F(g)}FC\longrightarrow 0$$

正合, 则称 F 是**右正合函子**. 如果 F 既是左正合函子也是右正合函子, 称为**正合函子**. 正合函子的合成依然是正合的. 我们也可以对 Abel 范畴间的逆变加性函子定义相应概念. 这时标准函子 $\mathcal{A}\to\mathcal{A}^{op}$ 是正合的, 见 [注记1.22]. 任何函子/逆变函子 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 诱导逆变函子/函子 $\hat{F}:\mathcal{A}^{op}\to\mathcal{B}$. 下面的观察说明讨论 Abel 范畴间的函子/逆变函子的正合性质, 考虑共变函子即可. 如果 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的逆变加性函子, 那么

- 逆变函子 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是左/右正合的当且仅当函子 $\hat{F}:\mathcal{A}^{op}\to\mathcal{B}$ 是右/左正合的.
- 逆变函子 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是正合的当且仅当函子 $\hat{F}:\mathcal{A}^{op}\to\mathcal{B}$ 是正合的.

Example 1.27. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 由 [命题1.23] 易知对任何 $X\in\mathrm{ob}\mathcal{A}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,-):\mathcal{A}\to\mathbf{Ab}$ 是左正合函子. 并且逆变函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,X):\mathcal{A}\to\mathbf{Ab}$ 也是左正合的.

因为加性函子将零对象映到零对象, 所以根据 [注记1.25] 可知正合函子保持 monic 态和 epic 态; 左正合函子保持 monic 态; 右正合函子保持 epic 态. 一般地

Proposition 1.28. 设 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的加性函子, 那么
(1) 函子 F 左正合的充要条件是 F 保持态射的核.
(2) 函子 F 右正合的充要条件是 F 保持态射的余核.

Proof. (1) 函子 F 如果左正合, 那么对任何态射 $f:A\to B$ 的核 $k:\mathrm{Ker}f\to A$, 有

$$0\longrightarrow \mathrm{Ker}f\xrightarrow{k} A\xrightarrow{f} B$$

正合. 考虑态射 $f:A\to B$ 的标准分解 (下图中 f' 是 epic 态, ι 是 monic 态)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & B \\ & \mathrm{Im}f \arrow[ur, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

那么 k 明显是 f' 的余核, 因此由 f' 是 epic 态可知 f' 也是 k 的余核. 因此 [注记1.25] 说明

$$\mathrm{Ker}f\xrightarrow{k} A\xrightarrow{f'} \mathrm{Im}f\longrightarrow 0$$

正合, 结合 k 是 monic 态, 由 [引理1.24] 得到 $0\longrightarrow \mathrm{Ker}f\xrightarrow{k} A\xrightarrow{f'} \mathrm{Im}f\longrightarrow 0$ 正合. 用函子 F 作用, 得到正合列

$$0\longrightarrow F(\mathrm{Ker}f)\xrightarrow{Fk} FA\xrightarrow{F(f')} F(\mathrm{Im}f),$$

易知这时 Fk 也是 $F(f)$ 的核, 进而知 F 保持态射的核. 反之, 设 F 保持态射的核, 任取短正合列

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{f} B\xrightarrow{g} C\longrightarrow 0,$$

从 [注记1.25] 知 f 是 g 的核, 所以 $F(f)$ 也是 $F(g)$ 的核. 于是 [注记1.25] 说明

$$0\longrightarrow FA\xrightarrow{F(f)} FB\xrightarrow{F(g)} FC$$

正合. 因此 F 是左正合函子.

(2) 类似 (1), 由 [注记1.25] 容易得到 F 保持态射的余核蕴含 F 右正合. 现在设 F 是右正合函子, 并设态射 $f:A\to B$ 有余核 $c:B\to\mathrm{Coker}f$, 同样考虑 f 的标准分解, 有 epic 态 $f':A\to\mathrm{Im}f$ 和 monic 态 $\iota:\mathrm{Im}f\to B$ 使得 $f=\iota f'$. 类似 (1), 利用 f' 是 epic 态得到 $c\iota=0$, 进而得到 c 也是 ι 的余核. 从而 ι 是 epic 态 c 的核, 由此得到 ι 和 c 在 B 处正合, 再用函子 F 作用短正合列 $0\longrightarrow \mathrm{Im}f\xrightarrow{\iota} B\xrightarrow{c} \mathrm{Coker}c\longrightarrow 0$ 可得 $F(c)$ 是 $F(\iota)$ 的余核, 进而利用 $F(f')$ 是 epic 态可得 $F(c)$ 是 $F(f)$ 的余核. □

Remark 1.29. 设 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的加性函子. 如果 F 是左正合函子, 那么对任何 $\mathcal{A}$ 中正合列 $0\longrightarrow A\xrightarrow{f} B\xrightarrow{g} C$, 有 $0\longrightarrow FA\xrightarrow{Ff} FB\xrightarrow{Fg} FC$ 是 $\mathcal{B}$ 中正合列 (回忆 [命题1.23]).

如果 F 是右正合函子, 那么对 $\mathcal{A}$ 中任何正合列 $A\xrightarrow{f} B\xrightarrow{g} C\longrightarrow 0$ 有下述序列在 $\mathcal{B}$ 中正合:

$$FA\xrightarrow{Ff} FB\xrightarrow{Fg} FC\longrightarrow 0.$$

类似地, 如果 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是逆变加性函子, 当 F 是左正合函子时, $\mathcal{A}$ 中任何正合列 $A\xrightarrow{f} B\xrightarrow{g} C\longrightarrow 0$ 能够导出 $\mathcal{B}$ 中正合列 $0\longrightarrow FC\xrightarrow{Fg} FB\xrightarrow{Ff} FA$. 当 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是逆变右正合加性函子时, $\mathcal{A}$ 中任何正合列 $0\longrightarrow A\xrightarrow{f} B\xrightarrow{g} C$ 能够导出 $\mathcal{B}$ 中正合列 $FC\xrightarrow{Fg} FB\xrightarrow{Ff} FA\longrightarrow 0$.

Corollary 1.30. 设 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的正合函子, 那么对任何态射 $f:A\to B$ 有 $F(\mathrm{Im}f)\cong \mathrm{Im}F(f)$. 特别地, 如果 $\mathcal{A}$ 中有态射 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$ 满足 $gf=0$, 那么在 $\mathcal{B}$ 中有同构

$$F(\mathrm{Ker}g/\mathrm{Im}f)\cong \mathrm{Ker}(Fg)/\mathrm{Im}(Ff).$$

Proof. 考察态射 $f:A\to B$ 的标准分解 (下图中 f' 是 epic 态, ι 是 monic 态):

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & B \\ & \mathrm{Im}f \arrow[ur, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

用函子 F 作用上图, 得到 monic 态 $F(\iota)$. 由于 [命题1.28] 的证明过程表明 f 的余核也是 ι 的余核, 所以应用 [命题1.28] 立即得到 $F(f)$ 的余核也是 $F(\iota)$ 的余核. 结合 $F(\iota)$ 是 monic 态得到 $F(\iota)$ 是 $F(f)$ 的余核的核. 因此根据态射的像的定义可知 $F(\mathrm{Im}f)\cong \mathrm{Im}F(f)$. 现在设还有态射 $g:B\to C$ 满足 $gf=0$. 因为 $gf=0$, 所以如果设 $\iota:\mathrm{Im}f\to B$ 是标准态射, 则存在唯一的态射 $u:\mathrm{Im}f\to\mathrm{Ker}g$ 使得 $ku=\iota$, 其中 $k:\mathrm{Ker}g\to B$ 是 g 的核. 这里 u 明显是 monic 态, 即 $\mathrm{Im}f$ 是 $\mathrm{Ker}g$ 的子对象. 于是通过 [注记1.25] 我们得到正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Im}f\xrightarrow{u}\mathrm{Ker}g\xrightarrow{c}\mathrm{Ker}g/\mathrm{Im}f\longrightarrow 0.$$

由 F 是正合函子, 作用上述短正合列得到 $F(\mathrm{Ker}g)/F(\mathrm{Im}f)\cong F(\mathrm{Ker}g/\mathrm{Im}f)$, 再应用 [命题1.28] 即可. □

Remark 1.31. 在 [推论1.30] 证明过程中, 我们看到当 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中态射 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$ 满足 $gf=0$. 那么有正合列 $0\longrightarrow \mathrm{Im}f\xrightarrow{u}\mathrm{Ker}g\xrightarrow{c}\mathrm{Ker}g/\mathrm{Im}f\longrightarrow 0$, 进而知 f 和 g 在 B 处正合的充要条件是 $\mathrm{Ker}g/\mathrm{Im}f=0$. 因此对象 $\mathrm{Ker}g/\mathrm{Im}f$ 可测试 f 和 g 的正合性, 事实上这就是复形的 (上) 同调对象, 之后我们会详细讨论相应性质, 见 [定义1.54]. 如果 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴中的正合忠实满函子, 那么对任何 $\mathcal{A}$ 中态射 $f:A\to B$, 易见 $f=0$ 当且仅当 $F(f)=0$ 以及对任何 $X\in\mathrm{ob}\mathcal{A}$, $X=0$ 当且仅当 $FX=0$. 因此应用 [推论1.30] 和前面的讨论立即得到态射 $f:A\to B$ 和态射 $g:B\to C$ 在 B 处正合的充要条件是 $Ff:FA\to FB$ 和 $Fg:FB\to FC$ 在对象 FB 处正合.

Proposition 1.32. Abel 范畴间的正合函子保持任何正合列.

Proof. 证明与模范畴场景完全类似, 设 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的正合函子, 并有正合序列 (下图第一行)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[rr, "f^{n-1}"] \arrow[dr, "\pi^{n-1}"'] & & X^{n} \arrow[rr, "f^{n}"] \arrow[dr, "\pi^{n}"'] & & X^{n+1} \arrow[rr, "f^{n+1}"] \arrow[dr, "\pi^{n+1}"'] & & X^{n+2} \arrow[r] & \cdots \\ & & \mathrm{Im}f^{n-1} \arrow[ur, "\iota^{n}"'] \arrow[dr] & & \mathrm{Im}f^{n} \arrow[ur, "\iota^{n+1}"'] \arrow[dr] & & \mathrm{Im}f^{n+1} \arrow[ur, "\iota^{n+2}"'] \arrow[dr] & & \\ & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & \end{tikzcd}$$

其中 monic 态 ι^{n+1} 和 epic 态 π^{n} 表示 f^{n} 的标准分解, 易见 ι^{n} 和 π^{n} 在 X^{n} 处正合. 因此通过将函子 F 作用上图再利用正合函子保持核与余核便知每个 $F(f^{n-1})$ 和 $F(f^{n})$ 在 FX^{n} 处正合. □

在 [例1.27] 中指出 Abel 范畴上的共变/逆变 Hom 函子都是左正合的. 类似模范畴情形, 可以考虑

Definition 1.33 (投射/内射对象, [Wei94]). 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $X \in \text{ob}\mathcal{A}$.

- 如果 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X,-)$ 是正合函子, 那么称 X 是 $\mathcal{A}$ 中**投射对象**.
- 如果 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-,X)$ 是正合函子, 那么称 X 是 $\mathcal{A}$ 中**内射对象**.

如果 $\mathcal{A}$ 满足对 $\mathcal{A}$ 中任何对象 A, 都存在投射对象 P 和 P 到 A 的 epic 态, 则称 $\mathcal{A}$ **有足够多的投射对象**. 如果 $\mathcal{A}$ 满足对 $\mathcal{A}$ 中任何对象 A, 都存在内射对象 I 和 A 到 I 的 monic 态, 则称 $\mathcal{A}$ **有足够多的内射对象**.

Remark 1.34. 因为共变/逆变 Hom 函子本身就是左正合的, 所以 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中对象 X 是投射的也等价于对任何 epic 态 $\pi: A \to B$ 和态射 $f: X \to B$, 存在态射 $\overline{f}: X \to A$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "\overline{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "\pi"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

对偶地, $\mathcal{A}$ 中对象 X 是内射的当且仅当对任何 monic 态 $\iota: A \to B$ 和态射 $g: B \to X$, 存在态射 $\overline{g}: A \to X$ 使得 $g\iota = \overline{g}$. 由 [注记1.22] 可知 X 是 $\mathcal{A}$ 中投射/内射对象等价于 X 是 $\mathcal{A}^{op}$ 中内射/投射对象. 模范畴既有足够多的投射对象也有足够多的内射对象. 一般地, Abel 范畴未必具有足够多的投射对象或具有足够多的内射对象.

Remark 1.35. 对于余完备的 Abel 范畴 (回忆 [注记1.13]), 易验证任意一族投射对象的余积依然是投射的; 对于完备的 Abel 范畴, 易验证任意一族内射对象的积依然是内射的. 反之亦然, 见 [注记1.56].

设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 并有短正合列 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$, 称该短正合列是**可裂的**, 如果存在态射 $\iota: C \to B$ 使得 $g\iota = 1_C$. 下面我们记录可裂短正合列的刻画.

Proposition 1.36 ([Jac89]). 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 且 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 正合. 则以下等价:
(1) 该短正合列是可裂的.
(2) 该短正合列满足存在态射 $p: B \to A$ 和 $\iota: C \to B$ 使得 $fp + \iota g = 1_B$.
(3) 该短正合列满足存在态射 $p: B \to A$ 和 $\iota: C \to B$ 使得 $fp + \iota g = 1_B, pf = 1_A, g\iota = 1_C, p\iota = 0$.
(4) 该短正合列满足存在态射 $p: B \to A$ 使得 $pf = 1_A$.

Proof. 这里 (3) 蕴含 (1), (2) 和 (4). 下面证明 (1)⇒(2)⇒(3) 以及 (4)⇒(2) 来完成证明. 先证 (1)⇒(2): 这时有态射 $\iota: C \to B$ 使得 $g\iota = 1_C$, 于是 $g(1_B - \iota g) = 0$, 于是由 f 是 g 的核得到存在态射 $p: B \to A$ 使得 $fp = 1_B - \iota g$. 再说明 (2)⇒(3): 这时对 $fp + \iota g = 1_B$ 右乘 f 得到 $fpf = f$, 结合 f 是 monic 态得到 $pf = 1_A$, 类似地对 $fp + \iota g = 1_B$ 左乘 g 得到 $g\iota = 1_C$. 于是 $fp + \iota g = 1_B$ 右乘 ι 得到 $fp\iota = 0$, 结合 f 是 monic 态便知 $p\iota = 0$. 最后证明 (4)⇒(2): 注意到 $(1_B - fp)f = 0$, 所以由 g 是 f 的余核得到存在态射 $\iota: C \to B$ 使得 $1_B - fp = \iota g$, 这就完成命题证明. □

Remark 1.37. 如果Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中态射 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$ 满足 $gf = 0$ 且存在态射 $p: B \to A$ 和 $\iota: C \to B$ 使得 $fp + \iota g = 1_B, pf = 1_A, g\iota = 1_C, p\iota = 0$, 那么 f 是 monic 态, g 是 epic 态并且容易看出 f 是 g 的核, 进而 [命题1.23] 保证了 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 是短正合列. 特别地, Abel 范畴间的加性函子总能把可裂短正合列映至可裂短正合列.

Remark 1.38. 比较 [命题1.36(4)] 和加性范畴定义中的 (AC4) 便知 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 只要是可裂短正合列, 那么 $B \cong A \oplus C$. 更进一步, 有下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A \oplus C \arrow[r] \arrow[u, "(f\ g)"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

这里第二行的态射都是标准的, 上下两行都是正合列并且易见竖直方向的态射都是同构. 反之, 如果给定的短正合列和上图的第二行的短正合列间有同构, 那么给定的短正合列明显是可裂的, 所以我们也可以通过上面的交换图存在性给出短正合列可裂的刻画.

Proposition 1.39 ([ZW18])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 是 $\mathcal{A}$ 中态射序列.

(1) 如果对任何 $\mathcal{A}$ 中对象 W 有加群正合列 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(W,X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(W,Y) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(W,Z)$, 那么序列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 正合.

(2) 如果对任何 $\mathcal{A}$ 中对象 W 有加群正合列 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z,W) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,W) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,W)$, 那么序列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 正合.

Proof. (1) 取 $W = X$, 那么由 $g_*f_*(1_X) = 0$ 得到 $gf = 0$. 现在设 $k : \mathrm{Ker}g \to Y$ 是核和 $f : X \to Y$ 的标准分解

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & Y \\
& \mathrm{Im}f \arrow[ur, "\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

那么有标准态射 $u : \mathrm{Im}f \to \mathrm{Ker}g$ 使得 $ku = \iota$(特别地, u 是 monic 态). 再取 $W = \mathrm{Ker}g$, 那么由 $gk = 0$ 得到存在态射 $h : \mathrm{Ker}g \to X$ 使得 $fh = k$. 于是 $\iota f'h = kuf' = k$, 进而 u 是 epic 态. 因此由 u 既是 monic 态也是 epic 态得到 u 是同构, 这说明 f 和 g 在 Y 处正合.

(2) 取 $W = Z$ 立即得到 $gf = 0$. 保持 (1) 中的记号, $f : X \to Y$ 有标准分解 $f = \iota f'$ 且 $k : \mathrm{Ker}g \to Y$ 是 g 的核. 现在 $gf = 0$ 说明有 monic 态 $u : \mathrm{Im}f \to \mathrm{Ker}g$ 使得 $ku = \iota$. 取 $W = \mathrm{Coker}f$, 并记 $c : Y \to \mathrm{Coker}f$ 是余核态射, 那么 $f^*(c) = 0$, 所以存在态射 $h : Z \to \mathrm{Coker}f$ 使得 $hg = c$. 特别地, $ck = 0$, 所以存在态射 $v : \mathrm{Ker}g \to \mathrm{Im}f$ 满足 $\iota v = k$. 于是 $kuv = k$, 由此立即得到 u 是 epic 态, 因此是同构. □

下面我们讨论 Abel 范畴间伴随函子的正合性质, 我们约定**当讨论加性范畴间伴随函子时, 要求伴随函子间的联络中所有的伴随双射是加群同构**. 现在我们证明

Proposition 1.40 ([ZW18])**.** 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是 Abel 范畴且 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 和 $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 是加性函子. 如果 G 是 F 的左伴随函子, 即每个 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}, Y \in \mathrm{ob}\mathcal{B}$ 对应加群同构 $\eta_{Y,X} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GY,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y,FX)$ 满足对固定的 Y, η 关于变量 X 给出 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GY,-)$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y,F-)$ 的自然等价; 对固定的 X, η 关于变量 Y 给出 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G-,X)$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(-,FX)$ 的自然等价. 那么 G 是右正合函子且 F 是左正合函子.

Proof. 先证明 F 是左正合函子. 取定 $\mathcal{A}$ 中短正合列 $0 \longrightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0$, 要证

$$0 \longrightarrow FX' \xrightarrow{Ff} FX \xrightarrow{Fg} FX''$$

是 $\mathcal{B}$ 中正合列. 根据 [命题1.39], 只需说明对任何 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{B}$ 有下述加群同态列正合:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, FX') \xrightarrow{(Ff)_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, FX) \xrightarrow{(Fg)_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, FX'').$$

事实上, F 和 G 间的联络 η 给出下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, FX') \arrow[r, "(Ff)_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, FX) \arrow[r, "(Fg)_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, FX'') \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GY, X') \arrow[r, "f_*"] \arrow[u, "\eta_{Y,X'}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GY, X) \arrow[r, "g_*"] \arrow[u, "\eta_{Y,X}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GY, X'') \arrow[u, "\eta_{Y,X''}"']
\end{tikzcd}$$

由 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GY, -)$ 是左正合函子得到下行正合, 于是上行也正合. 再证对 $\mathcal{B}$ 中任何正合列

$$0 \longrightarrow Y' \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Y'' \longrightarrow 0,$$

有 $GY' \xrightarrow{Gf} GY \xrightarrow{Gg} GY'' \longrightarrow 0$ 在 $\mathcal{A}$ 中正合. 同样由 [命题1.39] 知只需证

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GY'', W) \xrightarrow{(Gg)^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GY, W) \xrightarrow{(Gf)^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GY', W).$$

而这来自 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(-, W)$ 是左正合函子以及下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GY'', W) \arrow[r, "(Gg)^*"] \arrow[d, "\eta_{Y'',W}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GY, W) \arrow[r, "(Gf)^*"] \arrow[d, "\eta_{Y,W}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GY', W) \arrow[d, "\eta_{Y',W}"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y'', FW) \arrow[r, "g^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, FW) \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y', FW)
\end{tikzcd}$$

□

Remark 1.41. 特别地, 结合 [命题1.28] 得到 Abel 范畴间左伴随函子保持余核以及 epic 态, 右伴随函子保持核以及 monic 态. 从 [命题1.40] 也可以推出模范畴上 Hom 函子左正合, 张量函子右正合.

1.1 Freyd-Mitchell 嵌入

本节先回顾 Freyd-Mitchell 嵌入定理的叙述以及一些基本应用 (见 [推论1.45] 以及 [推论1.46]), 它使得许多 Abel 范畴上的同调代数问题能够转化为模范畴场景解决. 下面的嵌入定理来自 [Mit64] 和 [Fre64].

Freyd-Mitchell Theorem. 设 $\mathcal{A}$ 是一个小 Abel 范畴 (即对象类是集合的 Abel 范畴), 那么存在含幺环 R 以及共变正合的忠实满函子 $F : \mathcal{A} \to R$-**Mod**.

该定理的一个直接应用便是模范畴中任何可以仅用“追图法”证明的同调代数结论都可以用忠实正合满函子过渡到 Abel 范畴上. 但嵌入定理的条件适用于 Abel 范畴, 所以我们还是需要说明任何一个在模范畴中“仅用追图”可证的同调代数结论都可以化归到一个小 Abel 范畴上讨论. 注意到我们可处理的任何一个交换图中出现的所有对象构成的类都是集合 (甚至在绝大部分情况下, 例如蛇形引理、五引理所处理的交换图中出现的对象数目是有限的), 因此我们只需说明任何 Abel 范畴中的对象集都含于某个小 Abel 子范畴中即可.

Proposition 1.42. 设 $\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴, $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 是非空集合, 那么存在 $\mathcal{A}$ 的一个 Abel 全子范畴 $\mathcal{B}$ 使得对象类 $\mathrm{ob}\mathcal{B}$ 是包含 $\mathcal{S}$ 的集合, 即 $\mathcal{B}$ 为包含 $\mathcal{S}$ 的小 Abel 全子范畴, 且 $\mathcal{B}$ 中正合列在 $\mathcal{A}$ 中也正合.

Proof. 定义 $\mathcal{S}_0$ 是 $\mathcal{S}$ 添加 $\mathcal{A}$ 中零对象构成的集合. 那么 $\mathcal{S}$ 可生成 $\mathcal{A}$ 的一个全子范畴 $\mathcal{B}_0$, 它是小范畴. 定义 $\mathcal{S}_1$ 为 $\mathrm{ob}\mathcal{B}_0$ 添加 $\mathcal{B}_0$ 中所有态射在 $\mathcal{A}$ 中的核、余核以及有限直和 (均指定一个对象) 构成的集合 (这里确实可以使 $\mathcal{S}_1$ 成为集合, 首先对范畴 $\mathcal{A}$ 的所有同构类都选定一个代表元, 那么任何态射 $f : X \to Y$ 的核 $k : \mathrm{Ker}f \to X$ 与余核 $c : Y \to \mathrm{Coker}f$ 都可以指定对象 $\mathrm{Ker}f$ 以及 $\mathrm{Coker}f$. 任何有限个对象的直和本身在同构意义下唯一, 因此一旦我们对 $\mathcal{A}$ 中所有同构类都选定一个代表元, 就对任意有限个对象也取定一个直和对象, 注意到 $\mathcal{B}_0$ 中所有态射构成的类是集合, 所以如此构造的 $\mathcal{S}_1$ 也是集合). 并定义 $\mathcal{B}_1$ 是以 $\mathcal{S}_1$ 为对象集的全子范畴. 假设对正整数 n, 已经定义好对象集 $\mathcal{S}_n$ 以及 $\mathcal{S}_n$ 生成的全子范畴 $\mathcal{B}_n$, 定义 $\mathcal{S}_{n+1}$ 为 $\mathrm{ob}\mathcal{B}_n$ 添加 $\mathcal{B}_n$ 中所有态射在 $\mathcal{A}$ 中的核、余核以及有限直和 (均指定一个对象) 构成的集合, $\mathcal{B}_{n+1}$ 是以 $\mathcal{S}_{n+1}$ 为对象集的全子范畴. 递归地, 对每个正整数 n, 定义出 $(\mathcal{B}_n, \mathcal{S}_n)$. 根据构造方式, 每个 $\mathcal{S}_n$ 是集合且 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{S}_{n+1} \subseteq \cdots$. 现作

$$\mathrm{ob}\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n,$$

那么 $\mathrm{ob}\mathcal{B}$ 是集合, 定义 $\mathcal{B}$ 是以 $\mathrm{ob}\mathcal{B}$ 为对象集的全子范畴, 还需说明 $\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴. 任取 $\mathcal{B}$ 中有限个对象 $X_1, ..., X_n$, 存在正整数 N 使得这些对象都在 $\mathcal{S}_N$ 中, 所以 $\mathcal{S}_{N+1}$ 中有它们的直和. 于是由 $\mathcal{S}_0$ 含有零对象易知 $\mathcal{B}$ 是对象集包含 $\mathcal{S}$ 的加性范畴. 任取 $\mathcal{B}$ 中态射 $f : X \to Y$, 则存在正整数 t 使得 X, Y 在 $\mathcal{S}_t$ 中, 于是 $\mathcal{S}_{t+1}$ 中存在 $\mathrm{Ker}f$ 以及 $\mathrm{Coker}f$, 利用 $\mathcal{B}_{t+1}$ 是全子范畴便知 $f : X \to Y$ 在 $\mathcal{B}$ 中存在核与余核. 如果能够说明 $\mathcal{B}$ 中任何 monic 态是它余核的核、任何 epic 态是它核的余核, 便可得 $\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴. 而这一点由 $\mathcal{B}$ 本身的构造以及范畴 $\mathcal{A}$ 自身具备该性质便知结论成立. 所以 $\mathcal{B}$ 是对象集包含 $\mathcal{S}$ 的 Abel 全子范畴. 根据 $\mathcal{B}$ 中态射的核以及余核的构造, $\mathcal{B}$ 中的正合列也会在 $\mathcal{A}$ 中正合. □

Remark 1.43. 在 [引理1.15] 已指出满足 (AC5) 和 (AC6) 的加性范畴自动是 Abel 范畴, 这里没有验证 (AC7).

Remark 1.44. 如果 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的子范畴 $\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴并且 $\mathcal{B}$ 中的正合列在 $\mathcal{A}$ 中也正合, 则称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 **Abel 子范畴**. 注意到 [命题1.42] 证明过程中构造的子范畴是 Abel 子范畴. 用正合函子的语言, 如果 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的子范畴 $\mathcal{B}$ 也是 Abel 范畴, 那么 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Abel 子范畴当且仅当嵌入函子 $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 是正合函子.

现在我们可以用 Freyd-Mitchell 嵌入定理来把模范畴上众多通过“追图法”得到的同调代数结论推广到 Abel 范畴上. 这里仅列出嵌入定理在“五引理”以及“蛇形引理”证明上的应用.

Corollary 1.45 (五引理)**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 下图是 $\mathcal{A}$ 中交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & X_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & X_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & X_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & X_5 \\
{\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & {\scriptstyle f_4}\downarrow & & {\scriptstyle f_5}\downarrow \\
Y_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Y_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Y_3 & \xrightarrow{\beta_3} & Y_4 & \xrightarrow{\beta_4} & Y_5
\end{array}$$

其中上下两行均为正合列, 则有

(1) 若 f_1 是 epic 态, f_2, f_4 均为 monic 态, 则 f_3 是 monic 态.

(2) 若 f_5 是 monic 态, f_2, f_4 均为 epic 态, 则 f_3 是 epic 态.

(3) 特别地, 若 f_1, f_2, f_4, f_5 均为同构, 则 f_3 也是同构.

Proof. 五引理在模范畴中的版本追图易证. 现在设 $\mathcal{B}$ 是含有 $\{X_1,...,X_5,Y_1,...,Y_5\}$ 的小 Abel 全子范畴, 那么根据 Freyd-Mitchell 嵌入定理, 存在含幺环 R 以及共变正合的忠实满函子 $F:\mathcal{B}\to R$-**Mod**. 进而有交换图:

$$\begin{tikzcd}
FX_1 \arrow[r, "F\alpha_1"] \arrow[d, "Ff_1"'] & FX_2 \arrow[r, "F\alpha_2"] \arrow[d, "Ff_2"'] & FX_3 \arrow[r, "F\alpha_3"] \arrow[d, "Ff_3"'] & FX_4 \arrow[r, "F\alpha_4"] \arrow[d, "Ff_4"'] & FX_5 \arrow[d, "Ff_5"'] \\
FY_1 \arrow[r, "F\beta_1"] & FY_2 \arrow[r, "F\beta_2"] & FY_3 \arrow[r, "F\beta_3"] & FY_4 \arrow[r, "F\beta_4"] & FY_5
\end{tikzcd}$$

因为 F 是正合函子, 所以上下两行是模范畴中的正合列. 同时, 正合函子保持 monic 态与 epic 态, 所以 $\mathcal{A}$ 中 monic 态在 F 作用下变为模范畴中的单同态, epic 态在 F 作用下变成模范畴中的满同态. 于是可对上面的交换图应用模范畴中的五引理. 于是知: (1) 若 f_1 是 epic 态, f_2,f_4 均为 monic 态, 则 Ff_3 是单同态. (2) 若 f_5 是 monic 态, f_2,f_4 均为 epic 态, 则 Ff_3 是满同态. 最后, 由 F 是忠实的满函子可知 F 反向保持 monic 态和 epic 态, 于是知 Abel 范畴中的五引理成立. □

Corollary 1.46 (蛇形引理, [Wei94]). 考虑 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\alpha'"] & Y' \arrow[r, "\beta'"] & Z' &
\end{tikzcd}$$

其中上下两行正合, 那么存在下述形式的正合列:

$$\mathrm{Ker}f \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathrm{Ker}g \xrightarrow{\tilde{\beta}} \mathrm{Ker}h \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}f \xrightarrow{\tilde{\alpha'}} \mathrm{Coker}g \xrightarrow{\tilde{\beta'}} \mathrm{Coker}h$$

并满足下图交换:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}f \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, "k_1"] & \mathrm{Ker}g \arrow[r, "\tilde{\beta}"] \arrow[d, "k_2"] & \mathrm{Ker}h \arrow[d, "k_3"] & \\
 & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "c_1"] & Y' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "c_2"] & Z' \arrow[d, "c_3"] & \\
 & \mathrm{Coker}f \arrow[r, "\tilde{\alpha'}"] & \mathrm{Coker}g \arrow[r, "\tilde{\beta'}"] & \mathrm{Coker}h &
\end{tikzcd}$$

Proof. 蛇形引理在模范畴中的版本可通过追图直接验证 (细节较多). 首先 $\mathcal{A}$ 中总有下图:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}f \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, "k_1"] & \mathrm{Ker}g \arrow[r, "\tilde{\beta}"] \arrow[d, "k_2"] & \mathrm{Ker}h \arrow[d, "k_3"] & \\
 & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "c_1"] & Y' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "c_2"] & Z' \arrow[d, "c_3"] & \\
 & \mathrm{Coker}f \arrow[r, "\tilde{\alpha'}"] & \mathrm{Coker}g \arrow[r, "\tilde{\beta'}"] & \mathrm{Coker}h &
\end{tikzcd}$$

设 $\mathcal{B}$ 是包含上图所有对象的小 Abel 全子范畴：依 Freyd-Mitchell 嵌入定理, 存在含幺环 R 以及共变正合的忠实满函子 $F:\mathcal{B}\to R$-**Mod**. 那么用函子 F 作用上图, 应用模范畴版本蛇形引理再拉回 $\mathcal{B}$ 中即可 (注意 [注记1.28] 指出正合函子保持核以及余核, [注记1.31] 指出正合忠实满函子反向保持正合性). □

1.2 复形范畴回顾

本节固定加性范畴 $\mathcal{A}$, 回忆 $\mathcal{A}$ 上的 **(上链) 复形** $(X^\bullet,d^\bullet)$ 由对象族 $X^\bullet=\{X^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 以及 $d^\bullet=\{d^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 构成, 并满足 $d^{i+1}d^i=0,\forall i\in\mathbb{Z}$. 类似可定义链复形, 但这份笔记使用上链复形的语言. 上链复形 $(X^\bullet,d^\bullet)$ 可写作

$$\cdots\longrightarrow X^0\xrightarrow{d^0}X^1\xrightarrow{d^1}\cdots\longrightarrow X^n\xrightarrow{d^n}X^{n+1}\xrightarrow{d^{n+1}}\cdots.$$

上面的 $d_X^\bullet$ 被称为复形的**微分**. 任何 $X\in\mathrm{ob}\mathcal{A}$, 固定整数 k, 定义 $X^k=X$, 当 $i\neq k$ 时命 $X^k=0$, 并将所有微分定义为零态射可得一复形, 当 $X\neq 0$ 时称该复形**集中在** k **次位置**.

如果复形 $(X^\bullet,d_X^\bullet)$ 和 $(Y^\bullet,d_Y^\bullet)$ 间有态射链 $f^\bullet=\{f^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 使得对任何指标 i, 有下图交换:

$$\begin{tikzcd}
X^i \arrow[r, "d_X^i"] \arrow[d, "f^i"'] & X^{i+1} \arrow[d, "f^{i+1}"] \\
Y^i \arrow[r, "d_Y^i"] & Y^{i+1}
\end{tikzcd}$$

则称 $f^\bullet$ 是 $(X^\bullet,d_X^\bullet)$ 到 $(Y^\bullet,d_Y^\bullet)$ 的**链映射**或**复形态射**, 常简记为 $f^\bullet:X^\bullet\to Y^\bullet$. 易见加性范畴 $\mathcal{A}$ 上所有 (上链) 复形和复形间链映射构成一范畴, 称为 $\mathcal{A}$ 上的**复形范畴**, 记作 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$. 易见 $f^\bullet:X^\bullet\to Y^\bullet$ 是 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 中 monic 态的充要条件是每个 f^i 是 $\mathcal{A}$ 中 monic 态; $f^\bullet:X^\bullet\to Y^\bullet$ 是 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 中 epic 态的当且仅当每个 f^i 是 $\mathcal{A}$ 中 epic 态.

Example 1.47 (Hom 复形, [ZW18]). 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, $(X^\bullet,d_X^\bullet)$ 和 $(Y^\bullet,d_Y^\bullet)$ 都是 $\mathcal{A}$ 上复形. 对整数 n, 定义

$$\mathrm{Hom}^n(X,Y)=\prod_{p\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^p,Y^{p+n}),$$

其上有自然的加群结构. $\mathrm{Hom}^n(X,Y)$ 中的每个元素可写作 $f=(f^p)_{p\in\mathbb{Z}}$, 其中 $f^p:X^p\to Y^{p+n}$. 下面我们对每个整数 n, 定义微分 $d^n:\mathrm{Hom}^n(X,Y)\to\mathrm{Hom}^{n+1}(X,Y)$ 使得 $(\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y),d^\bullet)$ 成为复形. 对每个 $p\in\mathbb{Z}$, 记

$$(d^nf)^p=d_Y^{n+p}f^p+(-1)^{n+1}f^{p+1}d_X^p\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^p,Y^{p+n+1}).$$

定义 $d^nf=((d^nf)^p)_{p\in\mathbb{Z}}\in\mathrm{Hom}^{n+1}(X,Y)$. 下面验证 $d^{n+1}d^nf=0$. 对每个 $p\in\mathbb{Z}$, 有

$$(d^{n+1}d^nf)^p=d_Y^{p+n+1}(d^nf)^p+(-1)^n(d^nf)^{p+1}d_X^p.$$

再对上式代入 $(d^nf)^p=d_Y^{n+p}f^p+(-1)^{n+1}f^{p+1}d_X^p$ 和 $(d^nf)^{p+1}=d_Y^{n+p+1}f^{p+1}+(-1)^{n+1}f^{p+2}d_X^{p+1}$ 得到

$$\begin{aligned}
(d^{n+1}d^nf)^p=&d_Y^{p+n+1}(d^nf)^p+(-1)^n(d^nf)^{p+1}d_X^p\\
=&d_Y^{p+n+1}(d_Y^{n+p}f^p+(-1)^{n+1}f^{p+1}d_X^p)+(-1)^n(d_Y^{n+p+1}f^{p+1}+(-1)^{n+1}f^{p+2}d_X^{p+1})d_X^p\\
=&(-1)^{n+1}d_Y^{p+n+1}f^{p+1}d_X^p+(-1)^nd_Y^{n+p+1}f^{p+1}d_X^p\\
=&0.
\end{aligned}$$

由此得到复形 $(\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y),d^\bullet)$, 称为复形 $(X^\bullet,d_X^\bullet)$ 到 $(Y^\bullet,d_Y^\bullet)$ 的 **Hom 复形**. 对固定的整数 n, 有

$$\mathrm{Ker}d^n=\{f=(f^p)_{p\in\mathbb{Z}}\in\mathrm{Hom}^n(X,Y)|d_Y^{n+p}f^p=(-1)^nf^{p+1}d_X^p\}.$$

如果 $n=0$, 那么 $\mathrm{Ker}d^0$ 就是复形 $(X^\bullet,d_X^\bullet)$ 到 $(Y^\bullet,d_Y^\bullet)$ 的链映射全体. 并且对整数 n 也有

$$\mathrm{Im}d^{n-1}=\{f=(f^p)_{p\in\mathbb{Z}}\in\mathrm{Hom}^n(X,Y)|\text{存在}s=(s^p)_{p\in\mathbb{Z}}\text{使得}f^p=(d^{n-1}s)^p=d_Y^{n-1+p}s^p+(-1)^ns^{p+1}d_X^p\}.$$

Remark 1.48. 若 R,S 是含幺环, X 是左 R-模复形, Y 是 R-S 双模复形, 则 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)$ 进一步是右 S-模复形. 更一般地, 若有环 T 以及 X 是 R-T 双模复形, Y 是 R-S 双模复形, 则 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)$ 可自然视作 T-S 双模复形.

Remark 1.49. 如果 X,Y 都是集中在 ℓ 次部分的 $\mathcal{A}$ 上复形 (即 $X^i=0,Y^i=0,\forall i\neq\ell$, 设 $X=U[-\ell],Y=V[-\ell]$, 这里 $U,V\in\mathrm{ob}\mathcal{A}$), 那么 $\mathrm{Hom}^n(X,Y)$ 只有当 $n=0$ 时才可能是非零加群. 这是有自然的加群同构 $\mathrm{Hom}^0(X,Y)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U,V)$. 所以这时 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)$ 就是集中在 0 次部分的加群复形. 例如, 如果 A 是 K-代数, V 是 A-A 双模, 那么将 $V[-\ell]$ 视作左 A-模复形后 $\mathrm{Hom}^\bullet(V[\ell],V[\ell])$ 也可以视作 A-A 双模复形, 0 次部分同构于 $\mathrm{Hom}_A(V,V)$.

如果复形 $(X^\bullet,d^\bullet)$ 满足对充分大的整数 n 都有 $X^n=0$, 那么称该复形是**上有界的**. 如果复形 $(X^\bullet,d^\bullet)$ 满足对充分小的整数 n 有 $X^n=0$, 称该复形是**下有界的**. 既是上有界又是下有界的复形称为**有界的**. 用 $\mathscr{C}^b(\mathcal{A}),\mathscr{C}^-(\mathcal{A}),\mathscr{C}^+(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$ 上所有有界复形构成的全子范畴, 所有上有界的复形构成的全子范畴以及所有下有界的复形构成的全子范畴. 如果复形 $(X^\bullet,d^\bullet)$ 满足 $X^n=0,\forall n\in\mathbb{Z}$, 称之为**零复形**. 零复形明显是 $\mathscr{C}(\mathcal{A}),\mathscr{C}^b(\mathcal{A}),\mathscr{C}^-(\mathcal{A}),\mathscr{C}^+(\mathcal{A})$ 中的零对象. 这里再指出和 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 的情形一样, $\mathscr{C}^b(\mathcal{A}),\mathscr{C}^-(\mathcal{A}),\mathscr{C}^+(\mathcal{A})$ 中的链映射是 monic/epic 态当且仅当对应的态射族中每个态射是 monic/epic 态. 因为加性范畴中具有相同始对象和终对象的态射间可作加法, 所以复形间的链映射也有自然的加法运算, 并且满足分配律.

现在设有加性范畴 $\mathcal{A}$ 上复形 $(X^\bullet,d_X^\bullet)$ 和 $(Y^\bullet,d_Y^\bullet)$, 那么在 [记号1.3] 下, 对每个指标 i 有态射

$$\begin{pmatrix}d_X^i&0\\0&d_Y^i\end{pmatrix}:X^i\oplus Y^i\to X^{i+1}\oplus Y^{i+1},\tag{1.2}$$

于是我们能够得到复形 $(X^\bullet,d_X^\bullet)$ 和 $(Y^\bullet,d_Y^\bullet)$ 的积和余积. 具体地, 记每个指标 i, 有态射

$$\iota_X^i=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}:X^i\to X^i\oplus Y^i,\iota_Y^i=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}:Y^i\to X^i\oplus Y^i,$$

$$p_X^i=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}:X^i\oplus Y^i\to X^i,p_Y^i=\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}:X^i\oplus Y^i\to Y^i.$$

那么 $\{X^i\oplus Y^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 带上 (1.2) 给出的微分构成复形, 关于 $\iota_X^\bullet$ 和 $\iota_Y^\bullet$ 构成复形 $(X^\bullet,d_X^\bullet)$ 和 $(Y^\bullet,d_Y^\bullet)$ 在 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 中的余积; 关于 $\iota_X^\bullet$ 和 $\iota_Y^\bullet$ 构成复形 $(X^\bullet,d_X^\bullet)$ 和 $(Y^\bullet,d_Y^\bullet)$ 在 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 中的积. 当复形 $(X^\bullet,d_X^\bullet)$ 和 $(Y^\bullet,d_Y^\bullet)$ 都是有界复形时, 对应的积/余积对象也是有界的; 当复形 $(X^\bullet,d_X^\bullet)$ 和 $(Y^\bullet,d_Y^\bullet)$ 都是上有界复形, 对应的积/余积对象也是上有界的; 当复形 $(X^\bullet,d_X^\bullet)$ 和 $(Y^\bullet,d_Y^\bullet)$ 都是下有界复形, 对应的积/余积对象也是下有界的. 特别地, 在 $\mathscr{C}(\mathcal{A}),\mathscr{C}^b(\mathcal{A}),\mathscr{C}^-(\mathcal{A}),\mathscr{C}^+(\mathcal{A})$ 中, 任意有限多个复形对象的积/余积都存在. 上面的讨论说明

Proposition 1.50 ([Wei94]). 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, 那么 $\mathscr{C}(\mathcal{A}),\mathscr{C}^b(\mathcal{A}),\mathscr{C}^-(\mathcal{A}),\mathscr{C}^+(\mathcal{A})$ 都是加性范畴.

Example 1.51 ([ZW18]). 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, $(X^\bullet, d_X^\bullet) \in \mathrm{ob}\mathscr{C}(\mathcal{A})$. 下面说明可自然定义加性函子 $\mathrm{Hom}^\bullet(X, -) : \mathscr{C}(\mathcal{A}) \to \mathscr{C}(\mathbf{Ab})$. 对每个 $\mathcal{A}$ 上复形 $(Y^\bullet, d_Y^\bullet)$, 根据 [例1.47] 有 Hom 复形 $\mathrm{Hom}^\bullet(X, Y)$, 这是 $\mathscr{C}(\mathbf{Ab})$ 中对象. 如果 $f^\bullet : Y^\bullet \to Z^\bullet$ 是 $\mathcal{A}$ 上复形间的链映射, 那么对每个整数 n, p, 有加群同态

$$(f^{p+n})_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^p, Y^{p+n}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^p, Z^{p+n}), \varphi \mapsto f^{p+n}\varphi.$$

于是得到加群同态

$$\mathrm{Hom}^n(X, f) : \mathrm{Hom}^n(X, Y) \to \mathrm{Hom}^n(X, Z), (\varphi^p)_{p\in\mathbb{Z}} \mapsto (f^{p+n}\varphi^p)_{p\in\mathbb{Z}}.$$

对任何整数 n, 可直接计算验证下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}^n(X,Y) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(X,f)"] \arrow[d, "d^n"'] & \mathrm{Hom}^n(X,Z) \arrow[d, "\delta^n"] \\
\mathrm{Hom}^{n+1}(X,Y) \arrow[r, "\mathrm{Hom}^{n+1}(X,f)"] & \mathrm{Hom}^{n+1}(X,Z)
\end{tikzcd}$$

因此任何链映射 $f^\bullet : Y^\bullet \to Z^\bullet$ 对应的 $\mathrm{Hom}^\bullet(X, f) = (\mathrm{Hom}^n(X, f))_{n\in\mathbb{Z}}$ 是复形 $\mathrm{Hom}^\bullet(X, Y)$ 到 $\mathrm{Hom}^\bullet(X, Z)$ 的链映射. 因此我们能够定义加性函子 $\mathrm{Hom}^\bullet(X, -) : \mathscr{C}(\mathcal{A}) \to \mathscr{C}(\mathbf{Ab})$ 满足把每个 $\mathcal{A}$ 上复形 $(Y^\bullet, d_Y^\bullet)$ 对应到复形 $\mathrm{Hom}^\bullet(X, Y)$ 并且把 $\mathcal{A}$ 上复形间链映射 $f^\bullet : Y^\bullet \to Z^\bullet$ 对应到链映射

$$\mathrm{Hom}^\bullet(X, f) = (\mathrm{Hom}^n(X, f))_{n\in\mathbb{Z}} : \mathrm{Hom}^\bullet(X, Y) \to \mathrm{Hom}^\bullet(X, Z).$$

对偶地, 我们也可以定义逆变加性函子 $\mathrm{Hom}^\bullet(-, X) : \mathscr{C}(\mathcal{A}) \to \mathscr{C}(\mathbf{Ab})$.

现在设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 并设有链映射 $f^\bullet : (X^\bullet, d_X^\bullet) \to (Y^\bullet, d_Y^\bullet)$, 那么由每个 $f^i : X^i \to Y^i$ 存在核以及余核, 设为 $k^i : \mathrm{Ker} f^i \to X^i$ 以及 $c^i : Y^i \to \mathrm{Coker} f^i$. 因为 $d_X^i k^i = 0$, 所以存在唯一的态射 $d_K^i : \mathrm{Ker} f^i \to \mathrm{Ker} f^{i+1}$ 使得 $k^{i+1}d_K^i = d_X^i k^i$. 类似地, $c^{i+1}d_Y^i = 0$ 说明存在唯一的态射 $d_C^i : \mathrm{Coker} f^i \to \mathrm{Coker} f^{i+1}$ 使得 $d_C^i c^i = c^{i+1}d_Y^i$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker} f^i \arrow[r, dashed, "d_K^i"] \arrow[d, "k^i"'] & \mathrm{Ker} f^{i+1} \arrow[d, "k^{i+1}"] \\
X^i \arrow[r, "d_X^i"] \arrow[d, "f^i"'] & X^{i+1} \arrow[d, "f^{i+1}"] \\
Y^i \arrow[r, "d_Y^i"] \arrow[d, dashed, "c^i"'] & Y^{i+1} \arrow[d, dashed, "c^{i+1}"] \\
\mathrm{Coker} f^i \arrow[r, "d_C^i"] & \mathrm{Coker} f^{i+1}
\end{tikzcd}$$

利用 k^i 是 monic 态和 c^i 是 epic 态容易验证 $d_K^{i+1}d_K^i = 0$ 以及 $d_C^{i+1}d_C^i = 0$. 记 $K^i = \mathrm{Ker} f^i$ 以及 $C^i = \mathrm{Coker} f^i$, 那么 $(K^\bullet, d_K^\bullet)$ 和 $(C^\bullet, d_C^\bullet)$ 都是复形并且 $k^\bullet : K^\bullet \to X^\bullet$ 和 $c^\bullet : Y^\bullet \to C^\bullet$ 都是链映射. 容易直接验证 $(K^\bullet, d_K^\bullet)$ 是 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ 在 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 中的核且 $(C^\bullet, d_C^\bullet)$ 是 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ 在 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 中的余核. 如果 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 和 $(Y^\bullet, d_Y^\bullet)$ 都是有界复形, 那么 $(K^\bullet, d_K^\bullet)$ 和 $(C^\bullet, d_C^\bullet)$ 也都有界; 如果 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 和 $(Y^\bullet, d_Y^\bullet)$ 都是上有界复形, 那么 $(K^\bullet, d_K^\bullet)$ 和 $(C^\bullet, d_C^\bullet)$ 也都上有界; 如果 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 和 $(Y^\bullet, d_Y^\bullet)$ 都是下有界复形, 那么 $(K^\bullet, d_K^\bullet)$ 和 $(C^\bullet, d_C^\bullet)$ 也都下有界. 根据复形间链映射的核以及余核的构造可知复形间链映射如果是 monic 态, 那么是其在复形范畴中余核的核; 如果是 epic 态, 那么是其在复形范畴中核的余核. 前面的讨论证明了

Theorem 1.52 ([Wei94])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 那么 $\mathscr{C}(\mathcal{A}),\mathscr{C}^b(\mathcal{A}),\mathscr{C}^-(\mathcal{A}),\mathscr{C}^+(\mathcal{A})$ 都是 Abel 范畴.

Remark 1.53. 特别地, 我们能够在 $\mathscr{C}(\mathcal{A}),\mathscr{C}^b(\mathcal{A}),\mathscr{C}^-(\mathcal{A}),\mathscr{C}^+(\mathcal{A})$ 中讨论正合. 如果

$$0 \longrightarrow X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \longrightarrow 0$$

是 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 中正合列, 那么通过前面复形链映射的核以及余核的构造便知这时对任何指标 i 有 f^i 是 monic 态, g^i 是 epic 态并且 f^i 和 g^i 在 Y^i 处正合. 即对所有的整数 i 有正合列 $0 \longrightarrow X^i \xrightarrow{f^i} Y^i \xrightarrow{g^i} Z^i \longrightarrow 0$. 反之, 如果链映射 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ 和 $g^\bullet : Y^\bullet \to Z^\bullet$ 满足对所有的 i 有 $0 \longrightarrow X^i \xrightarrow{f^i} Y^i \xrightarrow{g^i} Z^i \longrightarrow 0$ 正合, 那么 $f^\bullet$ 是 monic 态, $g^\bullet$ 是 epic 态, 并且由态射的像的定义以及链映射的核与余核的构造可得 $f^\bullet$ 和 $g^\bullet$ 在 $Y^\bullet$ 处正合. 所以 $\mathscr{C}(A)$ 中复形的短正合列就是限制在每个指标 i, 都给出 $\mathcal{A}$ 中短正合列的链映射序列. 作为 $\mathscr{C}(A)$ 的全子范畴, $\mathscr{C}^b(\mathcal{A}),\mathscr{C}^-(\mathcal{A}),\mathscr{C}^+(\mathcal{A})$ 中链映射的核与余核的构造和 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 中一致, 故 $\mathscr{C}^b(\mathcal{A}),\mathscr{C}^-(\mathcal{A}),\mathscr{C}^+(\mathcal{A})$ 中的复形短正合列作为 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 中的链映射序列也是短正合列. 因此在 $\mathscr{C}(\mathcal{A}),\mathscr{C}^b(\mathcal{A}),\mathscr{C}^-(\mathcal{A}),\mathscr{C}^+(\mathcal{A})$ 中, 复形短正合列统一可由每个指标处的态射序列构成 $\mathcal{A}$ 中短正合列刻画.

下面介绍 Abel 范畴上的上同调函子. 固定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, 并对复形范畴 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 的每个复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 和整数 i, 取定 $d_X^i : X^i \to X^{i+1}$ 的核 $k_X^i : \mathrm{Ker}d_X^i \to X^i$ 和余核 $c_X^i : X^{i+1} \to \mathrm{Coker}d_X^i$. 考察下图:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[rr, "d_X^{i-1}"] & & X^i \arrow[d, "c_X^{i-1}"] \arrow[rr, "d_X^i"] & & X^{i+1} \arrow[r, "d_X^{i+1}"] & X^{i+2} \arrow[r] & \cdots \\
& \mathrm{Im}d_X^{i-1} \arrow[urr, "\iota_X^{i-1}"] & & \mathrm{Coker}d_X^{i-1} & & \mathrm{Ker}d_X^i \arrow[ull, "k_X^i"'] & &
\end{tikzcd}$$

现在 $d_X^{i+1}d_X^i = 0$, 那么 $d_X^i\iota_X^{i-1} = 0$. 于是存在唯一的态射 $a_X^i : \mathrm{Im}d_X^{i-1} \to \mathrm{Ker}d_X^i$ 使得 $k_X^i a_X^i = \iota_X^{i-1}$, 即

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "d_X^{i-1}"] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] & X^{i+1} \arrow[r, "d_X^{i+1}"] & X^{i+2} \arrow[r] & \cdots \\
& \mathrm{Im}d_X^{i-1} \arrow[ur, "\iota_X^{i-1}"] \arrow[rr, dashed, "a_X^i"] & & \mathrm{Ker}d_X^i \arrow[ul, "k_X^i"'] & &
\end{tikzcd}$$

是交换的. 因为 $\iota_X^{i-1} : \mathrm{Im}d_X^{i-1} \to X^i$ 是 monic 态, 所以这里 $a_X^i : \mathrm{Im}d_X^{i-1} \to \mathrm{Ker}d_X^i$ 也是 monic 态, 即 $\mathrm{Im}d_X^{i-1}$ 是 $\mathrm{Ker}d_X^i$ 的子对象. 现在对由 k_X^i 和 c_X^i 决定的 monic 态 a_X^i, 取定其余核 $e_X^i : \mathrm{Ker}d_X^i \to \mathrm{Coker}e_X^i$. 在 [记号1.17] 下, $\mathrm{Coker}e_X^i$ 可以写作 $\mathrm{Ker}d_X^i/\mathrm{Im}d_X^{i-1}$. **之后在讨论复形范畴 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 时, 我们对所有的复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 统一固定微分 $d_X^i : X^i \to X^{i+1}$ 的核 k_X^i : $\mathrm{Ker}d_X^i \to X^i$ 和余核 $c_X^i : X^{i+1} \to \mathrm{Coker}d_X^i$ 的选取, 并对这时的标准 monic 态 $a_X^i : \mathrm{Im}d_X^{i-1} \to \mathrm{Ker}d_X^i$ 固定余核 $e_X^i : \mathrm{Ker}d_X^i \to \mathrm{Coker}e_X^i$ 的选取** (之后会证明对上面的态射不同的选取定义出的复形范畴上的上同调函子是自然同构的, 见 [注记1.57]).

Definition 1.54 (上同调对象)**.** 对 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$, 称 $e_X^n : \mathrm{Ker}d_X^n \to \mathrm{Coker}e_X^n$ 的终对象

$$\mathrm{Coker}e_X^n = \mathrm{Ker}d_X^n/\mathrm{Im}d_X^{n-1}$$

为复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 的 n 次**上同调对象**, 将 $\mathrm{Ker}d_X^n/\mathrm{Im}d_X^{n-1}$ 记作 $H^n(X)$.

固定整数 n, 现在对任何复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$, 都有 n 次上同调对象 $H^n(X)$. 下面我们说明任何链映射 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ 能够自然诱导态射 $H^n(f) : H^n(X) \to H^n(Y)$. 首先由 $d_X^n k_X^n = 0$ 得到 $d_Y^n f^n k_X^n = 0$, 所以存在唯一的态

射 $c^n(f):\mathrm{Ker}d_X^n\to\mathrm{Ker}d_Y^n$ 使得 $k_Y^nc^n(f)=f^nk_X^n$. 再由 $c_Y^{n-1}f^nd_X^{n-1}=0$ 得到存在态射 $z^n(f):\mathrm{Coker}d_X^{n-1}\to\mathrm{Coker}d_Y^{n-1}$ 使得 $z^n(f)c_X^{n-1}=c_Y^{n-1}f^n$. 于是 $c_Y^{n-1}f^n\iota_X^{n-1}=0$. 故存在唯一的态射 $b^n(f):\mathrm{Im}d_X^{n-1}\to\mathrm{Im}d_Y^{n-1}$ 使

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Im}d_X^{n-1} \arrow[r, "\iota_X^{n-1}"] \arrow[d, dashed, "b^n(f)"] & X^n \arrow[r, "c_X^{n-1}"] \arrow[d, "f^n"] & \mathrm{Coker}d_X^{n-1} \arrow[d, "z^n(f)"] \\
\mathrm{Im}d_Y^{n-1} \arrow[r, "\iota_Y^{n-1}"] & Y^n \arrow[r, "c_Y^{n-1}"] & \mathrm{Coker}d_Y^{n-1}
\end{tikzcd}$$

交换. 现在由 $\iota_X^{n-1}=k_X^na_X^n$ 以及 $\iota_Y^{n-1}=k_Y^na_Y^n$ 以及 k_Y^n 是 monic 态得到下图的交换性:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Im}d_X^n \arrow[r, "a_X^n"] \arrow[d, "b^n(f)"] & \mathrm{Ker}d_X^n \arrow[r, "k_X^n"] \arrow[d, "c^n(f)"] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"] \\
\mathrm{Im}d_Y^n \arrow[r, "a_Y^n"] & \mathrm{Ker}d_Y^n \arrow[r, "k_Y^n"] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1}
\end{tikzcd}$$

根据上同调对象的定义, 下图上下两行正合, 并由 $e_Y^nc^n(f)a_X^n=e_Y^na_Y^nb^n(f)=0$ 得到存在唯一的态射 $H^n(f):H^n(X)\to H^n(Y)$ 使得 $H^n(f)e_X^n=e_Y^nc^n(f)$, 即下图交换:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}d_X^n \arrow[r, "a_X^n"] \arrow[d, "b^n(f)"] & \mathrm{Ker}d_X^n \arrow[r, "e_X^n"] \arrow[d, "c^n(f)"] & H^n(X) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "H^n(f)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}d_Y^n \arrow[r, "a_Y^n"] & \mathrm{Ker}d_Y^n \arrow[r, "e_Y^n"] & H^n(Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

根据 $b^n(f)$ 的定义, 我们看到对任何链映射 $f^\bullet:X^\bullet\to Y^\bullet$ 和 $g^\bullet:X^\bullet\to Y^\bullet$ 有 $b^n(f+g)=b^n(f)+b^n(g)$. 进而由 a_X^n 是 monic 态也得到 $c^n(f+g)=c^n(f)+c^n(g)$. 再利用 e_X^n 是 epic 态, 我们得到

$$H^n(f+g)=H^n(f)+H^n(g).$$

再给定链映射 $h^\bullet:Y^\bullet\to Z^\bullet$, 我们说明 $H^n(hf)=H^n(h)H^n(f)$. 类似前面的讨论, 验证 $b^n(hf)=b^n(h)b^n(f)$ 即可. 而这由 ι_Z^n 是 monic 态以及 $b^n(f),b^n(h)$ 和 $b^n(hf)$ 的定义便知.

如果链映射 $f^\bullet$ 是恒等链映射 $1_X^\bullet:X^\bullet\to Y^\bullet$, 那么 $b^n(1_X)$ 是 $\mathrm{Im}d_X^{n-1}$ 上恒等态射, 利用 k_Y^n 是 monic 态也可看出 $c^n(1_X)$ 是 $\mathrm{Ker}d_X^n$ 上恒等态射. 于是 $H^n(1_X):H^n(X)\to H^n(X)$ 也是恒等态射.

所以对固定的整数 n, 可如下定义出范畴 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 到 $\mathcal{A}$ 的函子 $H^n:\mathscr{C}(\mathcal{A})\to\mathcal{A}$:

- 对任何 $\mathcal{A}$ 上复形 $(X^\bullet,d_X^\bullet)$, $H^n(X)$ 是该复形的 n 次上同调对象;
- 对任何 $\mathcal{A}$ 上复形间的链映射 $f^\bullet:X^\bullet\to Y^\bullet$, 如上定义 $H^n(f):H^n(X)\to H^n(Y)$.

从前面的讨论知 $H^n:\mathscr{C}(\mathcal{A})\to\mathcal{A}$ 是加性函子, 称为 n 次**上同调函子**.

Remark 1.55. 特别地, 上同调函子也可以限制在 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 的全子范畴 $\mathscr{C}^b(\mathcal{A}),\mathscr{C}^-(\mathcal{A}),\mathscr{C}^+(\mathcal{A})$ 上.

Remark 1.56. 也将复形范畴中的同构称为**链同构**. 利用上同调函子不难看出同构的复形 $(X^\bullet,d_X^\bullet)\cong(Y^\bullet,d_Y^\bullet)$ 具有同构的上同调对象, 即对任何整数 n, 有同构 $H^n(X)\cong H^n(Y)$. 根据 [注记1.31], 复形 $(X^\bullet,d_X^\bullet)$ 的 n 次上同调对象是零当且仅当 d_X^n 和 d_X^{n+1} 在 X^n 处正合 (如果复形 $(X^\bullet,d_X^\bullet)$ 满足对所有的整数 n 有 $H^n(X)=0$, 即

复形的所有微分序列是正合列, 称该复形是**正合的**或**零调的**). 由此易见在 Abel 范畴中, 如果下图交换, u, v, w 为同构, 那么上行正合的充要条件是下行正合.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & C \arrow[d, "w"] \\
A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C'
\end{tikzcd}$$

作为该观察的应用, 我们说明对 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的一族对象 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$(指标集 Λ 非空), 有

- 只要 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的积 $(\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, \{p_\alpha : \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ 存在, $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 内射当且仅当每个 X_α 内射.
- 只要余积 $(\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, \{i_\alpha : X_\alpha \to \oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ 存在, $\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 投射当且仅当每个 X_α 投射.

现在设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的积和余积存在. 对任何 $\mathcal{A}$ 中对象 Z, 有 Abel 群同构

$$\eta_Z : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, Z) \to \prod_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_\alpha, Z), \varphi \mapsto (\varphi i_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},$$

$$\xi_Z : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha) \to \prod_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, X_\alpha), \psi \mapsto (p_\alpha \psi)_{\alpha\in\Lambda}.$$

并且不难看出 η 和 ξ 具有自然性, 因此对 $\mathcal{A}$ 中任何短正合列 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$, 有

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, A) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\eta_A"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, B) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\eta_B"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, C) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \prod_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_\alpha, A) \arrow[r, "(f_*)_{\alpha\in\Lambda}"] & \prod_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_\alpha, B) \arrow[r, "(g_*)_{\alpha\in\Lambda}"] & \prod_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_\alpha, C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

交换以及下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "\xi_C"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\xi_B"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\xi_A"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \prod_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, X_\alpha) \arrow[r, "(g^*)_{\alpha\in\Lambda}"] & \prod_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, X_\alpha) \arrow[r, "(f^*)_{\alpha\in\Lambda}"] & \prod_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X_\alpha) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

于是这两个交换图的上行正合等价于下行正合, 由此便得到前面要说明的结论. 由于 Abel 范畴中有限积同构于有限余积, 所以如果 $\mathcal{A}$ 中对象 X 满足存在对象 X' 使得 $X \oplus X'$ 是投射/内射对象, 则 X 也是投射/内射对象.

Remark 1.57. 之前上同调函子的定义是基于对 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上复形范畴里每个复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 的微分 d_X^i 固定其核 $k_X^i : \mathrm{Ker}d_X^i \to X^i$ 和余核 $c_X^i : X^{i+1} \to \mathrm{Coker}d_X^i$ 的选取, 并对这时的标准 monic 态 $a_X^i : \mathrm{Im}d_X^{i-1} \to \mathrm{Ker}d_X^i$ 固定余核 $e_X^i : \mathrm{Ker}d_X^i \to \mathrm{Coker}e_X^i$ 的选取而言的. 如果我们对所有的复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 指派另一种相应选取, d_X^i 的核选为 $\overline{k}_X^i : \overline{\mathrm{Ker}d_X^i} \to X^i$, 余核选为 $\overline{c}_X^i : X^{i+1} \to \overline{\mathrm{Coker}d_X^i}$, 相应标准 monic 态 $\overline{a}_X^i : \overline{\mathrm{Im}d_X^{i-1}} \to \overline{\mathrm{Ker}d_X^i}$ 的余核选定为 $\overline{e}_X^i : \overline{\mathrm{Ker}d_X^i} \to \overline{\mathrm{Coker}e_X^i}$, 将这时定义的 n 次上同调函子记作 $\overline{H}^n$. 下面说明 $\overline{H}^n$ 和 H^n 是自然同构的. 对每个 $\mathcal{A}$ 上复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$, 有唯一的同构 $u_X^{n-1} : \mathrm{Im}d_X^{n-1} \to \overline{\mathrm{Im}d_X^{n-1}}$ 使得 $\overline{\iota}_X^{n-1} u_X^{n-1} = \iota_X^{n-1}$, 也有唯一的同构 $v_X^n : \mathrm{Ker}d_X^n \to \overline{\mathrm{Ker}d_X^n}$ 使得 $\overline{k}_X^n v_X^n = k_X^n$, 即有交换图:

$$\begin{tikzcd}
X^{n-1} \arrow[rr, "d_X^{n-1}"] & & X^n \arrow[rr, "d_X^n"] & & X^{n+1} \\
\mathrm{Im}d_X^{n-1} \arrow[urr, tail, "\iota_X^{n-1}"] \arrow[r, dashed, "u_{X^{n-1}}"'] & \overline{\mathrm{Im}d_X^{n-1}} \arrow[ur, tail, "\overline{\iota}_X^{n-1}"'] & & \overline{\mathrm{Ker}d_X^n} \arrow[ul, tail, "\overline{k}_X^n"] & \mathrm{Ker}d_X^n \arrow[l, dashed, "v_X^n"] \arrow[ull, tail, "k_X^n"']
\end{tikzcd}$$

于是利用 $\overline{k}_X^n$ 是 monic 态可直接验证有交换图:

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{Im}d_X^{n-1}} \arrow[r, "\overline{a}_X^n"] & \overline{\mathrm{Ker}d_X^n} \\
\mathrm{Im}d_X^{n-1} \arrow[u, "u_X^{n-1}"] \arrow[r, "a_X^n"] & \mathrm{Ker}d_X^n \arrow[u, "v_X^n"']
\end{tikzcd}$$

于是由固定的 e_X^n 和 $\overline{e}_X^n$ 的选取, 存在唯一的态射 $\xi_X^n : H^n(X) \to \overline{H}^n(X)$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overline{\mathrm{Im}d_X^{n-1}} \arrow[r, "\overline{a}_X^n"] & \overline{\mathrm{Ker}d_X^n} \arrow[r, "\overline{e}_X^n"] & \overline{H}^n(X) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}d_X^{n-1} \arrow[u, "u_X^{n-1}"] \arrow[r, "a_X^n"] & \mathrm{Ker}d_X^n \arrow[u, "v_X^n"'] \arrow[r, "e_X^n"] & H^n(X) \arrow[u, dashed, "\xi_X^n"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

根据五引理 (回忆 [注记1.45]), ξ_X^n 是同构. 所以每个复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 能够对应同构 $\xi_X^n : H^n(X) \to \overline{H}^n(X)$. 一旦说明对任何链映射 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ 有下述交换图, 便知 H^n 和 $\overline{H}^n$ 自然同构.

$$\begin{tikzcd}
\overline{H}^n(X) \arrow[r, "\overline{H}^n(f)"] & \overline{H}^n(Y) \\
H^n(X) \arrow[u, "\xi_X^n"] \arrow[r, "H^n(f)"] & H^n(Y) \arrow[u, "\xi_Y^n"']
\end{tikzcd}$$

现在考虑上同调函子定义中的态射 $c^n(f) : \mathrm{Ker}d_X^n \to \mathrm{Ker}d_Y^n$ 以及 $\overline{c}^n(f) : \overline{\mathrm{Ker}d_X^n} \to \overline{\mathrm{Ker}d_Y^n}$, 它们满足

$$e_Y^n c^n(f) = H^n(f) e_X^n \text{ 以及 } \overline{e}_Y^n \overline{c}^n(f) = \overline{H}^n(f) \overline{e}_X^n.$$

于是利用 e_Y^n 是 epic 态便能够得到 $\overline{H}^n(f)\xi_X^n = \xi_Y^n H^n(f)$. 故有自然同构 $H^n \cong \overline{H}^n$.

Example 1.58. 如果 $\mathcal{A}$ 是含幺环 R 上模范畴 R-**Mod**, 对任何 R-模复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$, 指定 $k_X^n : \mathrm{Ker}d_X^n \to X^n$ 是 R-模同态 d_X^n 的核的标准嵌入, $c_X^n : X^{n+1} \to X^{n+1}/\mathrm{Im}d_X^n$ 是标准投射, 那么这时标准 monic 态 $\alpha_X^n : \mathrm{Im}d_X^n \to \mathrm{Ker}d_X^n$ 就是标准嵌入. 并指定 e_X^n 为标准投射 $e_X^n : \mathrm{Ker}d_X^n \to \mathrm{Ker}d_X^n/\mathrm{Im}d_X^n$, 那么这时 n 次上同调对象 $H^n(X)$ 就是通常的 n 次上同调模. 前面构造的映射 $c^n(f) : \mathrm{Ker}d_X^n \to \mathrm{Ker}d_Y^n$ 和 $b^n(f) : \mathrm{Im}d_X^n \to \mathrm{Im}d_Y^n$ 就是模同态 $f^n : X^n \to Y^n$ 给出的限制映射. 于是这时的上同调函子 $H^n : \mathscr{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}) \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ 与模范畴情形一致.

从 [推论1.30] 我们可以得到 Abel 范畴间正合函子和上同调函子可交换:

Proposition 1.59. 设 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的正合函子, 那么对任何 $(X^\bullet, d_X^\bullet) \in \mathrm{ob}\mathscr{C}(\mathcal{A})$, 和整数 n, 有 $(FX^\bullet, Fd_X^\bullet)$ 是 $\mathcal{B}$ 上复形并且 $FH^n(X) \cong H^n(FX)$(作为 $\mathcal{B}$ 中对象).

Proof. 因为加性函子将零态映至零态, 所以 $(FX^\bullet, Fd_X^\bullet)$ 是复形, 应用 [推论1.30] 完成证明. □

Example 1.60 (温和截断, [Zha15]). 设 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的复形, n 是整数. 称

$$\cdots \xrightarrow{d_X^{n-3}} X^{n-2} \xrightarrow{d_X^{n-2}} X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}|} \mathrm{Ker}d_X^n \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

为给定复形在 n 次部分的**左温和截断**, 上述复形记作 $\tau_{\leq n}X^\bullet$. 称

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Im}d_X^{n-1} \longrightarrow X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \xrightarrow{d_X^{n+1}} \cdots$$

为给定复形在 n 次部分的**右温和截断**, 上述复形记作 $\tau_{\geq n}X^\bullet$.

Remark 1.61. 对 Abel 范畴上复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$, 易见温和截断 $\tau_{\leq n}X^\bullet$ 和 $\tau_{\geq n}X^\bullet$ 的 n 次上同调都是 $H^n(X)$. 且

$$0 \longrightarrow \tau_{\leq n}X^\bullet \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow \tau_{\geq n+1}X^\bullet \longrightarrow 0$$

是复形短正合列. 对 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 也有其他的截断方法: 我们有**左强制截断** (记作 $X_{\leq n}$):

$$\cdots \xrightarrow{d_X^{n-2}} X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots.$$

也称下述复形为给定复形在 n 次部分的**右强制阶段** (记作 $X_{\geq n}$):

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \xrightarrow{d_X^{n+1}} X^{n+2} \xrightarrow{d_X^{n+2}} \cdots$$

在强制截断场景, 我们也有复形短正合列: $0 \longrightarrow X_{\geq n} \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow X_{\leq n-1} \longrightarrow 0.$

结合 [命题1.59] 和 Freyd-Mitchell 嵌入使我们能将一般 Abel 范畴上复形的同调问题转化为模范畴上复形的同调问题. 例如 Abel 范畴上复形的短正合列能够诱导复形的长正合列:

Corollary 1.62 (同调代数基本定理, [Wei94])**.** 给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上复形的短正合列

$$0 \longrightarrow X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \longrightarrow 0,$$

那么对每个整数 n, 存在态射 $\Delta^n : H^n(Z) \to H^{n+1}(X)$ 使得下述上同调对象间的态射序列正合:

$$\cdots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} H^n(X) \xrightarrow{H^n(f)} H^n(Y) \xrightarrow{H^n(g)} H^n(Z) \xrightarrow{\Delta^n} H^{n+1}(X) \longrightarrow H^{n+1}(Y) \longrightarrow \cdots.$$

这里的 Δ^n 称为**连接态射**, 连接同态进一步满足下述自然性: 给定复形的交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "\alpha^\bullet"'] & Y^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "\beta^\bullet"'] & Z^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^\bullet"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q^\bullet \arrow[r, "h^\bullet"'] & W^\bullet \arrow[r, "s^\bullet"'] & E^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中上下两行是复形短正合列, 那么对每个整数 i, 有下图交换:

$$\begin{tikzcd}
H^n(Z) \arrow[r, "\Delta^n"] \arrow[d, "H^n(\gamma)"'] & H^{n+1}(X) \arrow[d, "H^{n+1}(\alpha)"] \\
H^n(E) \arrow[r, "\Delta^n"] & H^{n+1}(Q)
\end{tikzcd}$$

Proof. 该结论的模范畴版本可追图直接验证. 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的小 Abel 全子范畴使得它包含三个复形中所有对象 (回忆 [命题1.42]). 根据 Freyd-Mitchell 嵌入定理, 存在含幺环 R 以及共变正合的忠实满函子 $F : \mathcal{B} \to R$-**Mod**. 进而得到 R-**Mod** 中复形短正合列 $0 \longrightarrow FX^\bullet \xrightarrow{Ff^\bullet} FY^\bullet \xrightarrow{Fg^\bullet} FZ^\bullet \longrightarrow 0$, 对复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$, 从 [命题1.59] 知 $F(H^n(X)) \cong H^n(FX), \forall n \in \mathbb{Z}$. 现在对 $0 \longrightarrow FX^\bullet \xrightarrow{Ff^\bullet} FY^\bullet \xrightarrow{Fg^\bullet} FZ^\bullet \longrightarrow 0$, 应用模范畴时结论成立, 存在 $\star^n : H^n(FZ) \to H^{n+1}(FX)$ 使得有长正合列

$$\cdots \xrightarrow{\star^{n-1}} H^n(FX) \xrightarrow{H^n(Ff)} H^n(FY) \xrightarrow{H^n(Fg)} H^n(FZ) \xrightarrow{\star^n} H^{n+1}(FX) \longrightarrow H^{n+1}(FY) \longrightarrow \cdots.$$

总可构造一族同构 $\eta_X^n: H^n(FX) \to F(H^n(X)), \eta_Y^n: H^n(FY) \to F(H^n(Y))$ 和 $\eta_Z^n: H^n(FZ) \to F(H^n(Z))$ 并要求 η^n 具有自然性 (利用 [注记1.57] 在模范畴中调整上同调函子的定义, 使得 $\mathcal{A}$ 中上同调对象在 F 作用下与模范畴上修正的上同调模一致, 这又和模范畴上复形范畴本身的上同调函子自然同构) 以及利用 F 是满函子构造态射 $\Delta^n: H^n(Z) \to H^{n+1}(X)$ 得到下述交换图:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\star^{n-1}"] & H^n(FX) \arrow[r, "H^n(Ff)"] \arrow[d, "\eta_X^n"] & H^n(FY) \arrow[r, "H^n(Fg)"] \arrow[d, "\eta_Y^n"] & H^n(FZ) \arrow[r, "\star^n"] \arrow[d, "\eta_Z^n"] & H^{n+1}(FX) \arrow[r, "H^{n+1}(Ff)"] \arrow[d, "\eta_X^{n+1}"] & H^{n+1}(FY) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_Y^{n+1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "F(\Delta^{n-1})"] & F(H^n(X)) \arrow[r, "F(H^n(f))"] & F(H^n(Y)) \arrow[r, "F(H^n(g))"] & F(H^n(Z)) \arrow[r, "F(\Delta^n)"] & F(H^{n+1}(X)) \arrow[r, "F(H^{n+1}(f))"] & F(H^{n+1}(Y)) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

其中上行的正合性保证了下行的正合性, 回忆 [注记1.56]. 应用 [注记1.31], F 反向保持正合列, 得到 $\mathcal{A}$ 中正合列 $\cdots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} H^n(X) \xrightarrow{H^n(f)} H^n(Y) \xrightarrow{H^n(g)} H^n(Z) \xrightarrow{\Delta^n} H^{n+1}(X) \longrightarrow H^{n+1}(Y) \longrightarrow \cdots$.

因为我们能够选取到具有自然性的 η^n, 所以 $\star^n$ 的自然性保证了 $F(\Delta^n)$ 也具有自然性. 最后由 F 是忠实满函子得到连接态射 Δ^n 具有自然性. □

在 [注记1.56] 中指出复形间的链同构诱导上同调对象间的同构. 一般地, 人们引入

Definition 1.63 (拟同构, [Wei94]). 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 如果链映射 $f^\bullet: X^\bullet \to Y^\bullet$ 满足对所有的整数 n 使得 $H^n(f): H^n(X) \to H^n(Y)$ 是 $\mathcal{A}$ 中同构, 则称 $f^\bullet$ 是**拟同构**.

一般地, 复形间的拟同构未必是链同构. 例如设 R 是含幺环, 任取 R-**Mod** 中短正合列

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0,$$

要求 $M' \neq 0$, 那么下图给出复形间拟同构:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

但上述复形间的链映射明显不是同构. 下面介绍复形的可裂性. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 如果复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet) \in \mathrm{ob}\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 满足态射序列 $\{s^n: X^{n+1} \to X^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 使得 $d_X^n s^n d_X^n = d_X^n, \forall n \in \mathbb{Z}$, 则称该复形是**可裂的**. 易见可裂复形未必正合 (考虑对象均非零而微分都是零的复形). 既是可裂的又是正合的复形称为**可裂正合的**.

Example 1.64. 考虑 $\mathbb{Z}$-模复形 $\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \cdots$, 该复形正合但不可裂.

也可以将 [例1.64] 中的正合复形视作 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-模复形, 那么我们得到模范畴中每项自由的复形未必可裂.

Example 1.65. 若 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上有上有界的正合复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 满足每个 X^n 是投射对象, 则该复形可裂正合.

Proof. 设复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 满足每个 X^n 是 $\mathcal{A}$ 中投射对象. 如果每个 $X^n = 0$, 那么结论是明显的, 所以不妨设该复形非零. 设 m 是满足 $X^m \neq 0$ 的最大整数. 那么由该复形正合可知有正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}d_X^{m-2} \xrightarrow{\iota_X^{m-2}} X^{m-1} \xrightarrow{d_X^{m-1}} X^m \longrightarrow 0.$$

现在 X^m 是投射对象说明上述复形是可裂的, 进而由 [命题1.36], 存在态射 $p^{m-1}: \mathrm{Im}d_X^{m-2} \to X^{m-1}, s^{m-1}: X^m \to X^{m-1}$ 使得 $d_X^{m-1}s^{m-1} = 1, p^{m-1}\iota_X^{m-2} = 1, 1 = \iota_X^{m-2}p^{m-1} + s^{m-1}d_X^{m-1}$ 并且由 [注记1.38] 得到 $X^{m-1} \cong \mathrm{Im}d_X^{m-2} \oplus X^m$. 所以应用 [注记1.56] 得到 $\mathrm{Im}d_X^{m-2}$ 也是投射对象. 现在有 $d^{m-1}s^{m-1}d^{m-1} = d^{m-1}$ 并且 $\mathrm{Im}d_X^{m-2}$ 是投射对象. 再考察下述可裂短正合列:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}d_X^{m-3} \xrightarrow{\iota_X^{m-3}} X^{m-2} \xrightarrow{\tilde{d}_X^{m-2}} \mathrm{Im}d_X^{m-2} \longrightarrow 0,$$

同样由 $\mathrm{Im}d_X^{m-2}$ 的投射性得到 $\mathrm{Im}d_X^{m-3}$ 是投射对象以及存在态射 $p^{m-2}: X^{m-2} \to \mathrm{Im}d_X^{m-3}, \tilde{s}^{m-2}: \mathrm{Im}d_X^{m-2} \to X^{m-2}$ 满足 $\tilde{d}_X^{m-2}\tilde{s}^{m-2} = 1, p^{m-2}\iota_X^{m-3} = 1$ 以及 $1 = \iota_X^{m-3}p^{m-2} + \tilde{s}^{m-2}\tilde{d}_X^{m-2}$. 进而有 $d_X^{m-2}\tilde{s}^{m-2} = \iota_X^{m-2}$. 现在定义 $s^{m-2} = \tilde{s}^{m-2}p^{m-1}$, 那么利用 $1 = \iota_X^{m-2}p^{m-1} + s^{m-1}d_X^{m-1}$ 立即得到 $d_X^{m-2} = d_X^{m-2}s^{m-2}d_X^{m-2}$. 重复前面关于 s^{m-2} 的构造, 利用 p^{m-2} 以及 $\mathrm{Im}d_X^{m-3}$ 是投射对象便可构造态射 $s^{m-3}: X^{m-3} \to X^{m-2}$ 满足 $d_X^{m-3} = d_X^{m-3}s^{m-3}d_X^{m-3}$. 递归地, 我们便能够构造出一族态射序列 $s^n: X^{n+1} \to X^n (n \leq m)$ 满足 $d_X^n = d_X^n s^n d_X^n$. □

Remark 1.66. 对偶地, 利用任何短正合列如果中间项左边是内射对象蕴含可裂, 可类似可验证 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上任何下有界正合复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 如果每个 X^n 是内射对象, 那么该复形可裂.

可裂正合复形在任何加性函子 (不需要是正合函子) 的作用下能够保持正合性.

Proposition 1.67. 设 $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的加性函子, 并有可裂正合复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet) \in \mathscr{C}(\mathcal{A})$. 那么 $(FX^\bullet, Fd_X^\bullet)$ 是范畴 $\mathcal{B}$ 上的可裂正合复形.

Proof. 由条件, 存在态射序列 $\{s^n: X^{n+1} \to X^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 使得 $d_X^n s^n d_X^n = d_X^n, \forall n \in \mathbb{Z}$. 对每个 d_X^n, 考虑标准分解

$$\begin{tikzcd} X^n \arrow[rr, "d_X^n"] \arrow[dr, "\pi_X^n"'] & & X^{n+1} \\ & \mathrm{Im}d_X^n \arrow[ur, "\iota_X^{n+1}"'] & \end{tikzcd}$$

其中 π_X^n 是 epic 态且 ι_X^{n+1} 是 monic 态. 于是由 $d_X^n s^n d_X^n = d_X^n$ 得到 $\iota_X^{n+1}\pi_X^n s^n \iota_X^{n+1}\pi_X^n = \iota_X^{n+1}\pi_X^n$, 由及 ι_X^{n+1} 是 monic 态可得 $\pi_X^n s^n \iota_X^{n+1}\pi_X^n = \pi_X^n$, 再利用 π_X^n 是 monic 态得到 $\pi_X^n s^n \iota_X^{n+1} = 1_{\mathrm{Im}d_X^n}$, 即短正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}d_X^{n-1} \xrightarrow{\iota_X^n} X^n \xrightarrow{\pi_X^n} \mathrm{Im}d_X^n \longrightarrow 0$$

是可裂的, 回忆 [命题1.36]. 根据 [注记1.37], 加性函子作用可裂短正合列得到的序列依然是可裂短正合列, 所以得到可裂短正合列

$$0 \longrightarrow F(\mathrm{Im}d_X^{n-1}) \xrightarrow{F(\iota_X^n)} FX^n \xrightarrow{F(\pi_X^n)} F(\mathrm{Im}d_X^n) \longrightarrow 0,$$

下面的证明与 [命题1.32] 的证明完全相同. 考察下述交换图

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \cdots \arrow[r] & F(X^{n-1}) \arrow[rr, "F(d_X^{n-1})"] \arrow[dr, "F(\pi_X^{n-1})"'] & & FX^n \arrow[rr, "F(d_X^n)"] \arrow[dr, "F(\pi_X^n)"] & & FX^{n+1} \arrow[rr, "F(d_X^{n+1})"] \arrow[dr, "F(\pi_X^{n+1})"] & & FX^{n+2} \arrow[r] & \cdots \\ & & F(\mathrm{Im}d_X^{n-1}) \arrow[ur, "F(\iota_X^n)"'] \arrow[dr] & & F(\mathrm{Im}d_X^n) \arrow[ur, "F(\iota_X^{n+1})"] \arrow[dr] & & F(\mathrm{Im}d_X^{n+1}) \arrow[ur, "F(\iota_X^{n+2})"'] \arrow[dr] & & \\ & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & \end{tikzcd}$$

利用每个 $F(\iota_X^n)$ 是 monic 态, 每个 $F(\pi_X^n)$ 是 epic 态, 见 [命题1.36], 我们得到 $F(\iota_X^n)$ 同时是 $F(\pi_X^n)$ 以及 $F(d_X^n)$ 的核; $F(\pi_X^n)$ 同时是 $F(\iota_X^n)$ 和 $F(d_X^{n-1})$ 的余核. 于是由 $F(\iota_X^n)$ 是其余核 $F(\pi_X^n)$ 的核得到 $F(d_X^{n-1})$ 的像和 $F(d_X^n)$ 的核一致, 即 $F(d_X^{n-1})$ 和 $F(d_X^n)$ 在 FX^n 处正合. □

从 [命题1.67] 的证明过程看到对 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的可裂正合复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$, 对任何整数 n, 标准短正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}d_X^{n-1} \xrightarrow{\iota_X^n} X^n \xrightarrow{\pi_X^n} \mathrm{Im}d_X^n \longrightarrow 0 \tag{1.3}$$

都是可裂的. 下面我们说明存在态射序列 $\{t^n : X^n \to X^{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 使得 $t^{n+1}d_X^n + d_X^{n-1}t^n = 1_{X^n}$. 因为 (1.3) 是可裂短正合列, 所以存在态射 $u^n : X^n \to \mathrm{Im}d_X^{n-1}$ 和 $v^n : \mathrm{Im}d_X^n \to X^n$ 使得 (回忆 [命题1.36])

$$u^n\iota_X^n = 1_{\mathrm{Im}d_X^{n-1}}, \pi_X^n v^n = 1_{\mathrm{Im}d_X^n}, \iota_X^n u^n + v^n\pi_X^n = 1_{X^n}.$$

于是通过定义 $t^n = v^{n-1}u^n$, 有 $d_X^{n-1}t^n = \iota_X^n\pi_X^{n-1}v^{n-1}u^n = \iota_X^n u^n$. 类似地, 易验证 $t^{n+1}d_X^n = v^n\pi_X^n$.

$$\begin{tikzcd}
 & X^{n-1} \arrow[d, "\pi_X^{n-1}"'] \arrow[dr, "d_X^{n-1}"] & & X^{n+1} & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}d_X^{n-1} \arrow[r, "\iota_X^n"] & X^n \arrow[ur, "d_X^n"] \arrow[r, "\pi_X^n"] \arrow[l, dashed, bend left, "u^n"] & \mathrm{Im}d_X^n \arrow[u, "\iota_X^{n+1}"'] \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend left, "v^n"] & 0
\end{tikzcd}$$

所以我们得到 $t^{n+1}d_X^n + d_X^{n-1}t^n = \iota_X^n u^n + v^n\pi_X^n = 1_{X^n}$. 我们把前面的讨论记录为

Proposition 1.68. Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 如果是可裂正合的, 那么存在态射序列 $\{t^n : X^n \to X^{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 使得 $t^{n+1}d_X^n + d_X^{n-1}t^n = 1_{X^n}, \forall n \in \mathbb{Z}$.

最后在 Abel 范畴中回顾模范畴场景投射分解, 内射分解的构造与基本性质结束本节.

Definition 1.69 ([ZW18]). 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$. 如果正合复形

$$\cdots \longrightarrow P^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{\varepsilon} X \longrightarrow 0$$

满足对每个整数 $n \le 0$ 有 P^n 是投射对象, 则称上述复形是 X 的**投射分解**, 记作 $(P^\bullet, d^\bullet, \varepsilon)$. 如果正合复形

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\eta} I^0 \xrightarrow{\delta^0} I^1 \xrightarrow{\delta^1} \cdots$$

满足对每个自然数 n, I^n 是内射对象, 则称称上述复形是 X 的**内射分解**, 记作 $(I^\bullet, d^\bullet, \eta)$.

Remark 1.70. 类似于模范畴场景, 我们会考虑 X 的投射分解和内射分解删去项 X 得到的复形:

$$\cdots \longrightarrow P^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \longrightarrow 0, \qquad 0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{\delta^0} I^1 \xrightarrow{\delta^1} \cdots,$$

分别简记为 $(P^\bullet, d^\bullet)$ 和 $(I^\bullet, \delta^\bullet)$. 一般的 Abel 范畴中对象未必存在投射分解和内射分解.

虽然一般的 Abel 范畴未必存在投射分解和内射分解. 但在有足够多投射对象的 Abel 范畴中总存在投射分解, 在有足够多内射对象的 Abel 范畴中总存在内射分解.

现在设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴, $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$. 那么总存在投射对象 P^0 和 epic 态 $\varepsilon : P^0 \to X$. 对核 $k^0 : \mathrm{Ker}\varepsilon \to P^0$, 有投射对象 P^{-1} 和 epic 态 $\tilde{d}^{-1} : P^{-1} \to \mathrm{Ker}\varepsilon$. 命 $d^{-1} = k^0\tilde{d}^{-1} : P^{-1} \to P^0$. 注意到 d^{-1}

和 k^0 有相同的余核, 因此 $\mathrm{Ker}\varepsilon$ 也是 d^{-1} 的像, 这说明 d^{-1} 和 ε 在 P^0 处正合. 再对 $k^{-1}:\mathrm{Ker}d^{-1}\to P^{-1}$, 由 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象, 可选取投射对象 P^{-2} 和 epic 态 $\tilde{d}^{-2}:P^{-2}\to\mathrm{Ker}d^{-1}$, 再命 $d^{-2}=k^{-1}\tilde{d}^{-2}$, 类似易验证 d^{-2} 和 d^{-1} 在 P^{-1} 处正合. 递归地便得到 X 的投射分解 $(P^\bullet,d^\bullet,\varepsilon)$. 如果 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的 Abel 范畴, 那么对偶投射分解的构造容易得到任何对象都有内射分解.

Definition 1.71 (双复形, [Wei94]). 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, 并有 $\mathcal{A}$ 中对象族 $\{C^{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ 以及下图中的态射族 $\{d_v^{p,q}:C^{p,q}\to C^{p,q+1}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ 以及 $\{d_h^{p,q}:C^{p,q}\to C^{p+1,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & C^{p-1,q+1} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{p-1,q+1}"] & C^{p,q+1} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{p,q+1}"] & C^{p+1,q+1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{p-1,q} \arrow[u, "d_v^{p-1,q}"] \arrow[r, "d_h^{p-1,q}"] & C^{p,q} \arrow[u, "d_v^{p,q}"] \arrow[r, "d_h^{p,q}"] & C^{p+1,q} \arrow[u, "d_v^{p+1,q}"] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{p-1,q-1} \arrow[u, "d_v^{p-1,q-1}"] \arrow[r, "d_h^{p-1,q-1}"] & C^{p,q-1} \arrow[u, "d_v^{p,q-1}"] \arrow[r, "d_h^{p,q-1}"] & C^{p+1,q-1} \arrow[u, "d_v^{p+1,q-1}"] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

如果对任何指标 $p,q\in\mathbb{Z}$ 有 $d_h^{p,q+1}d_v^{p,q}+d_v^{p+1,q}d_h^{p,q}=0$ 以及 $d_v^{p,q+1}d_v^{p,q}=0,d_h^{p+1,q}d_h^{p,q}=0$, 那么称 $(C^{\bullet\bullet},d_v^{\bullet\bullet},d_h^{\bullet\bullet})$ 是 $\mathcal{A}$ 上的一个**双复形**. 如果双复形 $(C^{\bullet\bullet},d_v^{\bullet\bullet},d_h^{\bullet\bullet})$ 满足对每个整数 n, 满足 $p+q=n$ 的项 $C^{p,q}$ 只有有限多项非零, 则称该双复形是**有界的**. 如果双复形 $(C^{\bullet\bullet},d_v^{\bullet\bullet},d_h^{\bullet\bullet})$ 满足对任何项 $C^{p,q}$, 只要 $p<0$ 或 $q<0$, 就有 $C^{p,q}=0$, 那么称该双复形**集中在第一象限**或称为**第一象限双复形**. 类似可定义第二/三/四象限的情形.

Remark 1.72. 对双复形 $(C^{\bullet\bullet},d_v^{\bullet\bullet},d_h^{\bullet\bullet})$, 如果固定行 (即取定纵坐标 q), 那么 $(C^{\bullet,q},d_h^{\bullet,q})$ 是复形; 如果固定列 (即取定横坐标 p), 那么 $(C^{p,\bullet},d_v^{p,\bullet})$ 是复形. 条件 $d_h^{p,q+1}d_v^{p,q}+d_v^{p+1,q}d_h^{p,q}=0,\forall p,q\in\mathbb{Z}$ 可理解为双复形每个方块是反交换的. 给定双复形 $(C^{\bullet\bullet},d_v^\bullet,d_h^\bullet)$. 对固定的指标 p, $d_h^{p,\bullet}$ 无法直接视作复形 $(C^{p,\bullet},d_v^{p,\bullet})$ 到 $(C^{p+1,\bullet},d_v^{p+1,\bullet})$ 的链映射. 但 $(-1)^pd_h^{p,\bullet}:(C^{p,\bullet},d_v^{p,\bullet})\to(C^{p+1,\bullet},d_v^{p+1,\bullet})$ 是链映射. 类似地, 对固定的指标 q, $(-1)^qd_v^{\bullet,q}:C^{\bullet,q}\to C^{\bullet,q+1}$ 是链映射.

Example 1.73 (全复形, [Wei94]). 设 $\mathcal{A}$ 是余完备 Abel 范畴, $(C^{\bullet\bullet},d_v^{\bullet\bullet},d_h^{\bullet\bullet})$ 是 $\mathcal{A}$ 上双复形. 对每个整数 n, 定义

$$\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^n=\bigoplus_{p+q=n}C^{p,q}.$$

记 $\iota^{p,q}:C^{p,q}\to\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{p+q}$ 是标准态射. 对 $p,q\in\mathbb{Z}$, 命 $d^{p,q}=\iota^{p+1,q}d_h^{p,q}+\iota^{p,q+1}d_v^{p,q}$(在模范畴情形, 如果将上述直和视作内直和, 那么 $d^{p,q}$ 的定义可简写为 $d^{p,q}=d_h^{p,q}+d_v^{p,q}$).

进而态射族 $\{d^{p,q}:C^{p,q}\to\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{p+q+1}\}_{p+q=n}$ 导出唯一的态射 $d^n:\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^n\to\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{n+1}$ 使得对任何满足 $p+q=n$ 的指标 p,q, 有 $d^n\iota^{p,q}=d^{p,q}$. 现在对满足 $p+q=n$ 的指标 n,

$$\begin{aligned}d^{n+1}d^n\iota^{p,q}=&d^{n+1}(\iota^{p+1,q}d_h^{p,q}+\iota^{p,q+1}d_v^{p,q})\\=&(\iota^{p+2,q}d_h^{p+1,q}+\iota^{p+1,q+1}d_v^{p+1,q})d_h^{p,q}+(\iota^{p+1,q+1}d_h^{p,q+1}+\iota^{p,q+2}d_v^{p,q+1})d_v^{p,q}\end{aligned}$$

$=0.$

所以 $d^{n+1}d^n=0,\forall n\in\mathbb{Z}$. 因此我们得到复形 $(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{\bullet},d^{\bullet})$, 称为给定双复形的**全复形**.

Remark 1.74. 以模范畴为例. 给定含幺环 R 上的左 R-模范畴中的双复形 $(C^{\bullet\bullet},d_v^{\bullet\bullet},d_h^{\bullet\bullet})$. 如果左 R-模复形 $(X^{\bullet},d_X^{\bullet})$ 有子复形链 $\cdots\subseteq F^{p+1}X^{\bullet}\subseteq F^pX^{\bullet}\subseteq F^{p-1}X^{\bullet}\subseteq\cdots\subseteq X^{\bullet}$, 则称该子复形族 $F=\{F^pX^{\bullet}\}_{p\in\mathbb{Z}}$ 是 $(X^{\bullet},d_X^{\bullet})$ 的**滤**, 带上滤的复形称为**滤复形**. 下面说明给定双复形的全复形 $(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{\bullet},d^{\bullet})$ 有两个自然的滤.

对固定的整数 m, 考虑 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^n$ 的子模 ${}^{\mathrm{I}}F^m(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^n)=\oplus_{p+q=n,p\geq m}C^{p,q}$, 那么 ${}^{\mathrm{I}}F^m(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet}))^{\bullet}$ 明显是全复形 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{\bullet}$ 的子复形, 于是得到全复形的滤:

$$\cdots\subseteq{}^{\mathrm{I}}F^{m+1}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{\bullet})\subseteq{}^{\mathrm{I}}F^{m}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{\bullet})\subseteq{}^{\mathrm{I}}F^{m-1}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{\bullet})\subseteq{}^{\mathrm{I}}F^{m-2}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{\bullet})\subseteq\cdots.$$

上述滤称为 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{\bullet}$ 的**列滤**. 类似地, 对每个整数 m, $\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^n$ 有子模 ${}^{\mathrm{II}}F^m(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^n)=\oplus_{p+q=n,q\geq m}C^{p,q}$, 这给出 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{\bullet}$ 的子复形 ${}^{\mathrm{II}}F^m(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{\bullet})$. 进而有 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{\bullet}$ 的滤:

$$\cdots\subseteq{}^{\mathrm{II}}F^{m+1}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{\bullet})\subseteq{}^{\mathrm{II}}F^{m}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{\bullet})\subseteq{}^{\mathrm{II}}F^{m-1}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{\bullet})\subseteq{}^{\mathrm{II}}F^{m-2}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{\bullet})\subseteq\cdots.$$

上述滤称为 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{\bullet}$ 的**行滤**. 一般地, 如果滤复形 $(X^{\bullet},d_X^{\bullet})$ 的滤 $F=\{F^pX^{\bullet}\}_{p\in\mathbb{Z}}$ 满足对每个整数 n, F^pX^n 对充分小的整数 p 都是零, 则称该滤是**下有界的**. 如果滤 $F=\{F^pX^{\bullet}\}_{p\in\mathbb{Z}}$ 满足对每个整数 n, 对充分大的整数 p 都有 $F^pC^n=C^n$, 则称该滤是**上有界的**. 滤复形的既有上界又有下界的滤被称为**有界滤**. 当给定的双复形集中在第一象限或第三象限时, 全复形上的行滤和列滤都是有界的. 如果双复形在第四象限中的项都是零, 那么全复形的列滤下有界. 如果给定的双复形在第二象限中的项都是零, 那么全复形的行滤下有界.

Example 1.75 (复形的张量积, [Wei94]). 设 R 是含幺环, 有右 R-模复形 $(X^{\bullet},d_X^{\bullet})$ 和左 R-模复形 $(Y^{\bullet},d_Y^{\bullet})$. 那么我们能够自然地得到双复形

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & X^{p-1}\otimes_R Y^{q+1} \arrow[u] \arrow[r, "d_X^{p-1}\otimes(-1)^{q+1}"] & X^{p}\otimes_R Y^{q+1} \arrow[u] \arrow[r, "d_X^{p}\otimes(-1)^{q+1}"] & X^{p+1}\otimes_R Y^{q+1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{p-1}\otimes_R Y^{q} \arrow[u, "1\otimes d_Y^q"] \arrow[r, "d_X^{p-1}\otimes(-1)^{q}"] & X^{p}\otimes_R Y^{q} \arrow[u, "1\otimes d_Y^q"] \arrow[r, "d_X^{p}\otimes(-1)^{q}"] & X^{p+1}\otimes_R Y^{q} \arrow[u, "1\otimes d_Y^q"'] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{p-1}\otimes_R Y^{q-1} \arrow[u, "1\otimes d_Y^{q-1}"] \arrow[r, "d_X^{p-1}\otimes(-1)^{q-1}"] & X^{p}\otimes_R Y^{q-1} \arrow[u, "1\otimes d_Y^{q-1}"] \arrow[r, "d_X^{p}\otimes(-1)^{q-1}"] & X^{p+1}\otimes_R Y^{q-1} \arrow[u, "1\otimes d_Y^{q-1}"'] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

称上述双复形为 $(X^{\bullet},d_X^{\bullet})$ 和 $(Y^{\bullet},d_Y^{\bullet})$ 的**张量积双复形**, 记作 $X^{\bullet}\otimes_R Y^{\bullet}$. 将该双复形的全复形 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X^{\bullet}\otimes_R Y^{\bullet})^{\bullet}$ 称为 $(X^{\bullet},d_X^{\bullet})$ 和 $(Y^{\bullet},d_Y^{\bullet})$ 的 **(全) 张量积上链复形**. 我们将在 [例1.214] 应用双复形谱序列证明任何右模 M 的投射分解和左模 N 的投射分解的全张量积上链复形的上同调能够计算 M 和 N 的 Tor 群.

Remark 1.76. 设 A,B,C 是含幺环, 如果 $(X^{\bullet},d_X^{\bullet})$ 是 A-B 双模复形, $(Y^{\bullet},d_Y^{\bullet})$ 是 B-C 双模复形, 那么张量积双复形 $X^{\bullet}\otimes_A Y^{\bullet}$ 中每项都是 A-C 双模. 进而这时全张量积复形 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X^{\bullet}\otimes_A Y^{\bullet})^{\bullet}$ 是 A-C 双模复形.

Remark 1.77. 这里定义复形张量积的双复形将符号添加在行上, 也可以将符号添加在列上定义. 之后利用双复形谱序列 (见 [例1.214]) 可以看到这两种定义方式得到的张量积复形的各次上同调相同. 当符号添加到列上时, 对右 A-模复形 $X^\bullet$ 和左 A-模复形 $Y^\bullet$, n 次微分 $d^n : \mathrm{Tot}^{\oplus}(X^\bullet \otimes_A Y^\bullet)^n \to \mathrm{Tot}^{\oplus}(X^\bullet \otimes_A Y^\bullet)^{n+1}$ 满足把对 $p+q=n$ 的指标 p,q, $x^p \otimes y^q$ 被映至 $d_X^p(x^p)\otimes y^q + (-1)^p x^p \otimes d_Y^q(y^q)$. 这时如果 X 是右 A-模, 视作集中在 0 次部分的复形, 那么 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X \otimes_A Y^\bullet)^\bullet \cong X \otimes_A Y^\bullet$. 在此微分下, 易验证对任何右 R-模复形 $X^\bullet$, R-S 双模复形 $Y^\bullet$ 和左 S-模复形 $Z^\bullet$, 有不用添加符号的标准链同构 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(X^\bullet \otimes_R Y^\bullet)^\bullet \otimes_S Z^\bullet)^\bullet \cong \mathrm{Tot}^{\oplus}(X^\bullet \otimes_R \mathrm{Tot}^{\oplus}(Y^\bullet \otimes_S Z^\bullet))$.

设 A,B,C 是含幺环, $X^\bullet$ 是 A-B 双模复形, $Y^\bullet$ 和 $Z^\bullet$ 都是 B-C 双模复形, 并设有作为 B-C 双模复形间的链映射 $f^\bullet : Y^\bullet \to Z^\bullet$, 下面说明这可诱导 A-C 双模复形间的链映射 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X^\bullet \otimes_B f^\bullet) : \mathrm{Tot}^{\oplus}(X^\bullet \otimes_B Y^\bullet)^\bullet \to \mathrm{Tot}^{\oplus}(X^\bullet \otimes_B Z^\bullet)^\bullet$. 事实上, 对每个指标 p,q, 有 A-C 双模同态 $1 \otimes f^q : X^p \otimes_B Y^q \to X^p \otimes_B Z^q$. 于是由

$$\begin{tikzcd}
X^p \otimes_B Z^{q+1} \arrow[rrr, "d_X^p \otimes (-1)^{q+1}"] & & & X^{p+1} \otimes_B Z^{q+1} \\
& X^p \otimes_B Y^{q+1} \arrow[ul, dashed, "1\otimes f^{q+1}"'] \arrow[r, dashed, "d_X^p \otimes (-1)^{q+1}"] & X^{p+1} \otimes_B Y^{q+1} \arrow[ur, dashed, "1\otimes f^{q+1}"] & \\
& X^p \otimes_B Y^q \arrow[u, dashed, "1\otimes d_Y^q"] \arrow[r, dashed, "d_X^p \otimes (-1)^q"'] \arrow[dl, dashed, "1\otimes f^q"] & X^{p+1} \otimes_B Y^q \arrow[u, dashed, "1\otimes d_Y^q"'] \arrow[dr, dashed, "1\otimes f^q"'] & \\
X^p \otimes_B Z^q \arrow[uuu, "1\otimes d_Z^q"] \arrow[rrr, "d_X^p \otimes (-1)^q"'] & & & X^{p+1} \otimes_B Z^q \arrow[uuu, "1\otimes d_Z^q"']
\end{tikzcd}$$

的交换性不难看到 $1 \otimes f^\bullet$ 可诱导链映射 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X^\bullet \otimes_B f^\bullet) : \mathrm{Tot}^{\oplus}(X^\bullet \otimes_B Y^\bullet)^\bullet \to \mathrm{Tot}^{\oplus}(X^\bullet \otimes_B Z^\bullet)^\bullet$. 由此得到共变加性函子 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X^\bullet \otimes_B -) : \mathscr{C}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C) \to \mathscr{C}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$, 进而也诱导同伦范畴层面的加性函子 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X^\bullet \otimes_B -) : \mathscr{K}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C) \to \mathscr{K}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$. 类似地, 如果按照 [注记1.77] 通过对双复形的列微分添加符号, 同样可定义相应加性函子 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X^\bullet \otimes_B -) : \mathscr{K}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C) \to \mathscr{K}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$.

Example 1.78. 设 n 是整数, A,B,C 是含幺环, U 是 A-B 双模且 V 是 B-C 双模. 考虑 $U[-n]^\bullet$ 是集中在 $-n$ 次位置的复形以及集中在 n 次位置的复形 $V[n]^\bullet$, 那么全张量积复形 $U[-n]^\bullet \otimes_B V[n]^\bullet$ 集中在 0 次位置, 这时有 A-C 双模同构 $H^0(U[-n] \otimes_B V[n]) \cong U \otimes_B V$. 以及 $H^k(U[-n] \otimes_B V[n]) = 0, \forall k \neq 0$.

Example 1.79 (直积意义下的全复形, [Wei94]). 设 $\mathcal{A}$ 是完备 Abel 范畴, $(C^{\bullet\bullet}, d_v^{\bullet\bullet}, d_h^{\bullet\bullet})$ 是 $\mathcal{A}$ 上双复形.对每个整数 n, 定义

$$\mathrm{Tot}^{\prod}(C^{\bullet\bullet})^n = \prod_{p+q=n} C^{p,q}.$$

对 $p+q=n$, 记 $\pi^{p,q} : \mathrm{Tot}^{\prod}(C^{\bullet\bullet})^n \to C^{p,q}$ 是标准态射. 固定整数 n, 则对每个满足 $p+q=n$ 的指标 p,q 有微分 $d_h^{p-1,q} : C^{p-1,q} \to C^{pq}$ 以及 $d_v^{p,q-1} : C^{p,q-1} \to C^{pq}$. 于是得到态射

$$d_h^{p-1,q}\pi^{p-1,q} + d_v^{p,q-1}\pi^{p,q-1} : \mathrm{Tot}^{\prod}(C^{\bullet\bullet})^{n-1} \to C^{pq},$$

于是对这族态射 $\{d_h^{p-1,q}\pi^{p-1,q} + d_v^{p,q-1}\pi^{p,q-1}\}_{p+q=n}$, 由积的定义, 诱导态射 $d^{n-1} : \mathrm{Tot}^{\prod}(C^{\bullet\bullet})^{n-1} \to \mathrm{Tot}^{\prod}(C^{\bullet\bullet})^n$ 满足对任何 $p+q=n$ 的指标 p,q, 有 $\pi^{p,q}d^{n-1} = d_h^{p-1,q}\pi^{p-1,q} + d_v^{p,q-1}\pi^{p,q-1}$. 例如当 $\mathcal{A} = R\text{-}\mathbf{Mod}$ 时, 对任何 $(c^{ij})_{i+j=n-1} \in \mathrm{Tot}^{\prod}(C^{\bullet\bullet})^{n-1}$, 有 $d^n(c^{ij})_{i+j=n-1}$ 的 (p,q) 次分量 (这里 $p+q=n$) 为 $d_h(c^{p-1,q}) + d_v(c^{p,q-1})$.

那么对完备 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, 类似 [例1.73] 容易验证 $d^n d^{n-1}=0, \forall n\in\mathbb{Z}$, 所以我们得到复形 $(\mathrm{Tot}^{\prod}(C^{\bullet\bullet})^\bullet, d^\bullet)$, 也称为双复形 $(C^{\bullet\bullet}, d_v^{\bullet\bullet}, d_h^{\bullet\bullet})$ 的**全复形**. 与 [例1.73] 的不同之处在于这里在完备场景使用积定义全复形.

有了 [例1.79] 中对完备 Abel 范畴场景下双复形的构造, 我们能够重新得到 [例1.47] 的构造. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴且有 $\mathcal{A}$ 上复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 和 $(Y^\bullet, d_Y^\bullet)$. 对每个整数 p,q, 记 $C^{pq}=\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-p},Y^q)$. 那么 $C^{pq}\in\mathrm{ob}\mathbf{Ab}$(如果 $X^\bullet$ 是 A-C 双模复形且 Y 是 A-B 双模复形, 那么 C^{pq} 是 C-B 双模). 对固定的指标 p, $d_Y^q: Y^q\to Y^{q+1}$ 诱导同态 $(d_Y^q)_*: C^{pq}\to C^{p,q+1}$; 对固定的指标 q, $d_X^{-p-1}: X^{-p-1}\to X^{-p}$ 诱导同态 $(d_X^{-p-1})^*: C^{pq}\to C^{p+1,q}$. 则

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-p+1},Y^{q+1}) \arrow[u] \arrow[r, "(-1)^{q+p+1}(d_X^{-p})^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-p},Y^{q+1}) \arrow[u] \arrow[r, "(-1)^{q+p+2}(d_X^{-p-1})^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-p-1},Y^{q+1}) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-p+1},Y^{q}) \arrow[u, "(d_Y^q)_*"] \arrow[r, "(-1)^{q+p}(d_X^{-p})^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-p},Y^{q}) \arrow[u, "(d_Y^q)_*"] \arrow[r, "(-1)^{q+p+1}(d_X^{-p-1})^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-p-1},Y^{q}) \arrow[u, "(d_Y^q)_*"'] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-p+1},Y^{q-1}) \arrow[u, "(d_Y^{q-1})_*"] \arrow[r, "(-1)^{q+p-1}(d_X^{-p})^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-p},Y^{q-1}) \arrow[u, "(d_Y^{q-1})_*"] \arrow[r, "(-1)^{q+p}(d_X^{-p-1})^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-p-1},Y^{q-1}) \arrow[u, "(d_Y^{q-1})_*"'] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}
\tag{1.4}
$$

是双复形, 这里 (p,q) 位置的对象是 $C^{p,q}$. 考虑上述双复形 (1.4) 在直积下的全复形 $\mathrm{Tot}^{\prod}(C^{\bullet\bullet})^\bullet$, 那么该全复形的 n 次部分是

$$\mathrm{Tot}^{\prod}(C^{\bullet\bullet})^n=\prod_{p+q=n}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-p},Y^q)=\prod_{p\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-p},Y^{-p+n})=\prod_{p\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{p},Y^{p+n}).$$

那么全复形的微分 $d^n:\mathrm{Tot}^{\prod}(C^{\bullet\bullet})^n\to\mathrm{Tot}^{\prod}(C^{\bullet\bullet})^{n+1}$ 满足对每个 $(f^p:X^p\to Y^{p+n})_{p\in\mathbb{Z}}$, d^nf 表示为

$$\mathrm{Tot}^{\prod}(C^{\bullet\bullet})^{n+1}=\prod_{p\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^p,Y^{p+n+1})$$

中元素在指标 p 处的分量为 $d_Y^{n+p}f^p+(-1)^{n+1}f^{p+1}d_X^p$, 这就是 [例1.47] 中定义的 Hom 复形.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{p+1},Y^{p+n+1}) \arrow[r, "(-1)^{n+1}(d_X^p)^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{p},Y^{p+n+1}) \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{p},Y^{p+n}) \arrow[u, "(d_Y^{p+n})_*"']
\end{tikzcd}
$$

Hom 双复形也可以用其他方式定义, 固定 $\mathcal{A}$ 上复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 和 $(Y^\bullet, d_Y^\bullet)$. 对每个整数 p,q, 记 $D^{pq}=\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-q},Y^p)$. 那么对固定的整数 p,q 有 $D^{pq}=C^{qp}$. 微分 $d_X^{-q-1}: X^{-q-1}\to X^{-q}$ 诱导同态 $(d_X^{-q-1})^*:\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-q},Y^p)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-q-1},Y^p)$; 微分 $d_Y^p: Y^p\to Y^{p+1}$ 诱导同态 $(d_Y^p)_*:\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-q},Y^p)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-q},Y^{p+1})$.

于是得到双复形:

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-q-1}, Y^{p-1}) \arrow[u] \arrow[r, "(-1)^{p+q+1}(d_Y^{p-1})_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-q-1}, Y^{p}) \arrow[u] \arrow[r, "(-1)^{p+q+2}(d_Y^{p})_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-q-1}, Y^{p+1}) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-q}, Y^{p-1}) \arrow[u, "(d_X^{-q-1})^*"] \arrow[r, "(-1)^{p+q}(d_Y^{p-1})_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-q}, Y^{p}) \arrow[u, "(d_X^{-q-1})^*"] \arrow[r, "(-1)^{p+q+1}(d_Y^{p})_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-q}, Y^{p+1}) \arrow[u, "(d_X^{-q-1})^*"] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-q+1}, Y^{p-1}) \arrow[u, "(d_X^{-q})^*"] \arrow[r, "(-1)^{p+q-1}(d_Y^{p-1})_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-q+1}, Y^{p}) \arrow[u, "(d_X^{-q})^*"] \arrow[r, "(-1)^{p+q}(d_Y^{p})_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-q+1}, Y^{p+1}) \arrow[u, "(d_X^{-q})^*"] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}
\tag{1.5}
$$

双复形 (1.5) 的全复形的 n 次部分为

$$
\mathrm{Tot}^{\prod}(D^{\bullet\bullet})^n = \prod_{p+q=n} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{-q}, Y^p) = \prod_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{p-n}, Y^p) \cong \prod_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{p}, Y^{p+n})
$$

这说明双复形 (1.5) 和双复形 (1.4) 的全复形的 n 次部分相同. 但这里的微分 $d^n : \mathrm{Tot}^{\prod}(D^{\bullet\bullet})^n \to \mathrm{Tot}^{\prod}(D^{\bullet\bullet})^{n+1}$ 满足每个 $(f^p : X^p \to Y^{p+n})_{p\in\mathbb{Z}}$, $d^n f$ 表示为

$$
\mathrm{Tot}^{\prod}(D^{\bullet\bullet})^{n+1} = \prod_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{p}, Y^{p+n+1})
$$

中元素在指标 p 处的分量为 $(-1)^{n+1}d_Y^{n+p}f^p + f^{p+1}d_X^{p-1}$, 这与 [Ye92, Wei94] 中 Hom 复形的微分定义一致.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{p-1}, Y^{p+n-1}) \arrow[r, "(-1)^{n+1}(d_Y^{p+n-1})_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{p-1}, Y^{p+n}) \arrow[r, "(-1)^{n+2}(d_Y^{p+n})_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{p-1}, Y^{p+n+1}) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{p}, Y^{p+n-1}) \arrow[u, "(d_X^{p-1})^*"] \arrow[r, "(-1)^{n}(d_Y^{p+n-1})_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{p}, Y^{p+n}) \arrow[u, "(d_X^{p-1})^*"] \arrow[r, "(-1)^{n+1}(d_Y^{p+n})_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{p}, Y^{p+n+1}) \arrow[u, "(d_X^{p-1})^*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{p+1}, Y^{p+n-1}) \arrow[u, "(d_X^{p})^*"] \arrow[r, "(-1)^{n-1}(d_Y^{p+n-1})_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{p+1}, Y^{p+n}) \arrow[u, "(d_X^{p})^*"] \arrow[r, "(-1)^{n}(d_Y^{p+n})_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{p+1}, Y^{p+n+1}) \arrow[u, "(d_X^{p})^*"]
\end{tikzcd}
$$

记双复形 (1.4) 定义的全复形为 $({}^{\mathrm{row}}\mathrm{Tot}^{\prod}(C^{\bullet\bullet})^{\bullet}, {}^{\mathrm{row}}d^{\bullet})$, 双复形 (1.5) 定义的全复形为 $({}^{\mathrm{col}}\mathrm{Tot}^{\prod}(C^{\bullet\bullet})^{\bullet}, {}^{\mathrm{col}}d^{\bullet})$, 那么对每个整数 n 有 ${}^{\mathrm{row}}d^n(-1)^{n+1} = {}^{\mathrm{col}}d^n$. 于是我们能够显式地写出不同习惯定义出 Hom 复形间的链同构:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & {}^{\mathrm{row}}\mathrm{Tot}^{\prod}(C^{\bullet\bullet})^{n-1} \arrow[r, "{}^{\mathrm{row}}d^{n-1}"] \arrow[d, "(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}"'] & {}^{\mathrm{row}}\mathrm{Tot}^{\prod}(C^{\bullet\bullet})^{n} \arrow[r, "{}^{\mathrm{row}}d^{n}"] \arrow[d, "(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}"'] & {}^{\mathrm{row}}\mathrm{Tot}^{\prod}(C^{\bullet\bullet})^{n+1} \arrow[r, "{}^{\mathrm{row}}d^{n+1}"] \arrow[d, "(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & {}^{\mathrm{col}}\mathrm{Tot}^{\prod}(C^{\bullet\bullet})^{n-1} \arrow[r, "{}^{\mathrm{col}}d^{n-1}"] & {}^{\mathrm{col}}\mathrm{Tot}^{\prod}(C^{\bullet\bullet})^{n} \arrow[r, "{}^{\mathrm{col}}d^{n}"] & {}^{\mathrm{col}}\mathrm{Tot}^{\prod}(C^{\bullet\bullet})^{n+1} \arrow[r, "{}^{\mathrm{col}}d^{n+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}
\tag{1.6}
$$

如无特别说明我们之后考虑的 Hom 复形都是 [例1.47] 意义下的, 全张量积复形是 [注记1.77] 意义下的. 在本节后面的部分主要记录一些关于 Hom 复形和复形张量积的基本链映射构造, 初次阅读可跳过.

Example 1.80 ([Ye92]). 设 A 是含幺环, $(X^\bullet, d_X^\bullet), (Y^\bullet, d_Y^\bullet)$ 和 $(Z^\bullet, d_Z^\bullet)$ 都是 A-A 双模复形. 那么对每个整数 n, 可定义 $\tau^n : \mathrm{Tot}^{\oplus}(X^\bullet \otimes_A \mathrm{Hom}_A^\bullet(Y^\bullet, Z^\bullet))^n \to \mathrm{Hom}_A^n(\mathrm{Hom}_{A^{op}}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet), Z^\bullet)$ 为

$$\begin{aligned}\bigoplus_{p+q=n} X^p \otimes_A \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A^q(Y^k, Z^{k+q}) &\to \prod_{t\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A(\prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{A^{op}}(X^k, Y^{k+t}), Z^{t+n}) \\ (x^p \otimes (f^k : Y^k \to Z^{k+q})_{k\in\mathbb{Z}})_{p+q=n} &\mapsto ((g^k : X^k \to Y^{k+t})_{k\in\mathbb{Z}} \mapsto (-1)^{p(t+n)+p} f^{p+t} g^p(x^p))_{t\in\mathbb{Z}}.\end{aligned}$$

可直接验证上述映射定义合理并且 τ^n 是 A-A 双模同态. 下面验证 $\tau = \{\tau^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是链映射, 固定指标 p, q 满足 $p+q=n$ 取定 $x^p \in X^p$ 和 $(f^k : Y^k \to Z^{k+q})_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}^q(Y^\bullet, Z^\bullet)$, 那么 $x^p \otimes (f^k : Y^k \to Z^{k+q})_{k\in\mathbb{Z}}$ 在 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X^\bullet \otimes_A \mathrm{Hom}_A^\bullet(Y^\bullet, Z^\bullet))^\bullet$ 的 n 次微分 (这里采用 [注记1.77] 意义下, 把张量积双复形的符号添加在列上定义的张量积复形) 下的像是 $d_X^p(x^p) \otimes (f^k)_{k\in\mathbb{Z}} + (-1)^p x^p \otimes (d_Z^{k+p} f^k + (-1)^{q+1} f^{k+1} d_Y^k)_{k\in\mathbb{Z}}$. 而

$$\tau^n(x^p \otimes (f^k : Y^k \to Z^{k+q})_{k\in\mathbb{Z}})_{p+q=n} \in \mathrm{Hom}^n(\mathrm{Hom}_{A^{op}}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet), Z^\bullet)$$

在 $\mathrm{Hom}^\bullet(\mathrm{Hom}_{A^{op}}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet), Z^\bullet)$ 的 n 次微分下的像在指标 t 处的分量作用 $(g^k : X^k \to Y^{k+t})_{k\in\mathbb{Z}}$ 后为

$$(-1)^{p(t+n)+p} d_Z^{n+t} f^{p+t} g^p(x^p) + (-1)^{n+1+p(n+t+1)+p} f^{p+t+1} d_Y^{p+t} g^p(x^p) + (-1)^{n+t+p(n+t+1)+p} f^{p+t+1} g^{p+1} d_X^p(x^p).$$

同样可直接计算验证 $d_X^p(x^p)\otimes(f^k)_{k\in\mathbb{Z}}+(-1)^p x^p\otimes(d_Z^{k+p} f^k+(-1)^{q+1} f^{k+1} d_Y^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 在 τ^{n+1} 下的像在指标 t 处的分量作用 $(g^k : X^k \to Y^{k+t})_{k\in\mathbb{Z}}$ 也为上式. 因此 τ 定义了 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X^\bullet\otimes_A \mathrm{Hom}_A^\bullet(Y^\bullet, Z^\bullet))^\bullet$ 到 $\mathrm{Hom}_A^\bullet(\mathrm{Hom}_{A^{op}}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet), Z^\bullet)$ 的链映射. 并且 τ 在下述意义下是自然的, 记对复形 X 定义出的链映射为 τ_X, 那么对任何 A-A 双模复形 $X_1^\bullet$ 和 $X_2^\bullet$, 设 $\alpha : X_1^\bullet \to X_2^\bullet$ 是 A-A 双模复形间的链映射. 那么有下述复形链映射的交换图:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Tot}^{\oplus}(X_1^\bullet \otimes_A \mathrm{Hom}_A^\bullet(Y^\bullet, Z^\bullet))^\bullet \arrow[r, "\tau_{X_1}"] \arrow[d, "\mathrm{Tot}^{\oplus}(\alpha\otimes\mathrm{Hom}_A^\bullet(Y^\bullet,Z^\bullet))"'] & \mathrm{Hom}_A^\bullet(\mathrm{Hom}_{A^{op}}^\bullet(X_1^\bullet, Y^\bullet), Z^\bullet) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_A^\bullet(\mathrm{Hom}_{A^{op}}^\bullet(\alpha,Y^\bullet),Z^\bullet)"] \\ \mathrm{Tot}^{\oplus}(X_2^\bullet \otimes_A \mathrm{Hom}_A^\bullet(Y^\bullet, Z^\bullet))^\bullet \arrow[r, "\tau_{X_2}"] & \mathrm{Hom}_A^\bullet(\mathrm{Hom}_{A^{op}}^\bullet(X_2^\bullet, Y^\bullet), Z^\bullet) \end{tikzcd}$$

如果 X 是 A-A 双模, 把 X 视作集中在 0 次部分的 A-A 双模复形, 那么 τ^n 变为

$$\begin{aligned}\tau^n : X \otimes_A \mathrm{Hom}_A^n(Y^\bullet, Z^\bullet) &\to \prod_{t\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_{A^{op}}(X, Y^t), Z^{t+n}) \\ x \otimes (f^k : Y^k \to Y^{k+n})_{n\in\mathbb{Z}} &\mapsto ((g : X \to Y^t) \mapsto f^t g(x))_{t\in\mathbb{Z}}.\end{aligned}$$

特别地, 如果 ${}_AX_A = {}_AA_A$, 那么 τ^n 是 A-A 双模同构, 进而知当 $X^\bullet = A$(视作集中在 0 次位置的复形) 时, τ_A 给出 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(A \otimes_A \mathrm{Hom}_A^\bullet(Y^\bullet, Z^\bullet))^\bullet$ 到 $\mathrm{Hom}_A^\bullet(\mathrm{Hom}_{A^{op}}^\bullet(A, Y^\bullet), Z^\bullet)$ 的链同构.

对 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上复形, $(X^\bullet, d_X^\bullet)$, 任给整数 k, 定义 $X[k]^\bullet$ 为 $X[k]^n = X^{k+n}$ 且 $d_{X[k]}^n = (-1)^k d_X^{k+n}$ 给出的复形. 称之为复形 X 的 k **次平移** (也见 [命题2.1]).

Example 1.81. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $(X^\bullet, d_X^\bullet), (Y^\bullet, d_Y^\bullet)$ 都是 $\mathcal{A}$ 上复形, 那么可直接验证 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^\bullet(X[1]^\bullet, Y^\bullet)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^\bullet, Y^\bullet)[-1]^\bullet$ 的微分仅差一个负号. 同样地, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^\bullet(X[-1]^\bullet, Y^\bullet)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^\bullet, Y^\bullet)[1]^\bullet$ 的微分也仅差一

个负号. 因此 $\varepsilon^n=(-1)^n:\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}}(X[1]^\bullet,Y^\bullet)\to\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}}(X^\bullet,Y^\bullet)[-1]^n$ 可定义出链同构 $\varepsilon:\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}}(X[1]^\bullet,Y^\bullet)\cong\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}}(X^\bullet,Y^\bullet)[-1]^\bullet$. 类似地, 也有链同构 $\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}}(X[-1]^\bullet,Y^\bullet)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^\bullet,Y^\bullet)[1]^\bullet$. 特别地, 对任何 $\mathcal{A}$ 上有 A-A 双模复形 $(X^\bullet,d_X^\bullet),(Y^\bullet,d_Y^\bullet),(Z^\bullet,d_Z^\bullet)$, 如果对每个整数 n, 置 $\mu^n:\mathrm{Hom}^n_A(\mathrm{Hom}_A(X[1]^\bullet,Y^\bullet),Z^\bullet)\to\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(X^\bullet,Y^\bullet),Z^\bullet)[1]^n$ 为 $\mu^n(g^t:\mathrm{Hom}^t(X[1]^\bullet,Y^\bullet)\to Z^{t+n})_{t\in\mathbb{Z}}=((-1)^{t+n}g^t)_{t\in\mathbb{Z}}$, 那么这给出链同构 $\mathrm{Hom}^\bullet_A(\mathrm{Hom}_A(X[1]^\bullet,Y^\bullet),Z^\bullet)\cong\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(X^\bullet,Y^\bullet),Z^\bullet)[1]^\bullet$.

Remark 1.82. 任给 A-A 双模复形 $X^\bullet,Y^\bullet,Z^\bullet$, 记 $\tau:\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet\otimes_A\mathrm{Hom}^\bullet_A(Y^\bullet,Z^\bullet))^\bullet\to\mathrm{Hom}^\bullet_A(\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(X^\bullet,Y^\bullet),Z^\bullet)$ 是 [例1.80] 中的链同构. $\iota:\mathrm{Tot}^\oplus(X[1]^\bullet\otimes_A\mathrm{Hom}^\bullet_A(Y^\bullet,Z^\bullet))^\bullet\to\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet\otimes_A\mathrm{Hom}^\bullet_A(Y^\bullet,Z^\bullet))[1]^\bullet$ 是不用添加任何符号的标准链同构. $\mu:\mathrm{Hom}^\bullet_A(\mathrm{Hom}_A(X[1]^\bullet,Y^\bullet),Z^\bullet)\to\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(X^\bullet,Y^\bullet),Z^\bullet)[1]^\bullet$ 是 [例1.81] 给出的链同构. 那么可直接验证我们有下述复形链同构的交换图:

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet\otimes_A\mathrm{Hom}^\bullet_A(Y^\bullet,Z^\bullet))[1]^\bullet & \xrightarrow{\tau_X[1]} & \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(X^\bullet,Y^\bullet),Z^\bullet)[1]^\bullet\\ {\scriptstyle\iota}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\mu}\\ \mathrm{Tot}^\oplus(X[1]^\bullet\otimes_A\mathrm{Hom}^\bullet_A(Y^\bullet,Z^\bullet))^\bullet & \xrightarrow{\tau_{X[1]}} & \mathrm{Hom}^\bullet_A(\mathrm{Hom}_A(X[1]^\bullet,Y^\bullet),Z^\bullet)\end{array}$$

Remark 1.83. 一般地, 对含幺环 R 上右 R-模复形 $X^\bullet$ 和左 R-模复形 $Y^\bullet$, 不用添加任何符号的标准映射族给出复形链同构 $\mathrm{Tot}^\oplus(X[1]^\bullet\otimes_R Y^\bullet)\cong\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet\otimes_R Y^\bullet)[1]$. 但如果要给出 $\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet\otimes_R Y[1]^\bullet)$ 和 $\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet\otimes_R Y^\bullet)[1]$ 作为复形的链同构, 我们需要对自然映射族添加符号: 任给整数 n. 定义

$$\theta^n:\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet\otimes_R Y[1]^\bullet)^n=\bigoplus_{p+q=n}(X[1]^p\otimes_R Y^q)\to\bigoplus_{i+j=n+1}X^i\otimes_R Y^j, x^p\otimes y^{q+1}\mapsto(-1)^p x^p\otimes y^{q+1}.$$

可直接验证同态族 $\theta=\{\theta^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 给出复形链同构 $\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet\otimes_R Y[1]^\bullet)\cong\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet\otimes_R Y^\bullet)[1]$.

设 A 是 K-代数, 并记 $A^e=A\otimes_K A^{op}$ 是 A 的包络代数 (那么 $(A^{op})^e=(A^e)^{op}$). 那么任何 A-A 双模 M 和 A-A 双模 N, $M\otimes_K N$ 有自然的 A^e-A^e 双模结构: $(a\otimes b)(x\otimes y)(c\otimes d)=axc\otimes dyb,\forall x\in M,y\in N,a,b,c,d\in A$. 特别地, 对任何 A-A 双模复形 $X^\bullet$ 和 A-A 双模复形 $Y^\bullet$, $\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet\otimes_K Y^\bullet)$ 是 A^e-A^e 双模复形.

Proposition 1.84. 设 A 是 K-代数, $(X^\bullet,d_X^\bullet),(Y^\bullet,d_Y^\bullet)$ 都是 A-A 双模复形. 那么作为 K-模复形, 有链同构 $\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet\otimes_K Y^\bullet)^\bullet\cong\mathrm{Tot}^\oplus(Y^\bullet\otimes_K X^\bullet)^\bullet$. 具体地, 对任何整数 n, 命

$$\nu^n:\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet\otimes_K Y^\bullet)^n\to\mathrm{Tot}^\oplus(Y^\bullet\otimes_K X^\bullet)^n, x^p\otimes y^q\mapsto(-1)^{pq}y^q\otimes x^p,$$

这里指标 p,q 满足 $p+q=n$, 那么 $\nu=\{\nu^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 给出 K-模复形的链同构 $\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet\otimes_K Y^\bullet)^\bullet\cong\mathrm{Tot}^\oplus(Y^\bullet\otimes_K X^\bullet)^\bullet$. 如果对 $Y^i\otimes_K X^j$ 赋予左 A^e-模结构为 $(a\otimes b)(y\otimes x)=yb\otimes ax$, 赋予右 A^e-模结构为 $(y\otimes x)(c\otimes d)=dy\otimes xc$ 来视 $\mathrm{Tot}^\oplus(Y^\bullet\otimes_K X^\bullet)$ 作 A^e-A^e 双模复形 (记作 $\mathrm{Tot}^\oplus(\tilde{Y}^\bullet\otimes_K\tilde{X}^\bullet)$), 那么 ν 给出 A^e-A^e 双模复形同构 $\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet\otimes_K Y^\bullet)^\bullet\cong\mathrm{Tot}^\oplus(\tilde{Y}^\bullet\otimes_K\tilde{X}^\bullet)$.

Proof. 固定指标 p,q 满足 $p+q=n$. 那么 $x^p\otimes y^q\in\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet\otimes_K Y^\bullet)^n$ 在 n 次微分下的像是 $d_X^p(x^p)\otimes y^q+(-1)^p x^p\otimes d_Y^q(y^q)$. 该元素在 ν^{n+1} 下的像是 $(-1)^{(p+1)q}y^q\otimes d_X^p(x^p)+(-1)^{p+p(q+1)}d_Y^q(y^q)\otimes x^p$. 由此可知 ν 定义了 $\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet\otimes_K Y^\bullet)^\bullet$ 到 $\mathrm{Tot}^\oplus(Y^\bullet\otimes_K X^\bullet)^\bullet$ 作为 K-模复形的链映射. 当把 K-模复形 $\mathrm{Tot}^\oplus(Y^\bullet\otimes_K X^\bullet)$ 赋予如条件所述新的 A^e-A^e 双模复形结构后, 容易验证 ν 这时也是 A^e-A^e 双模复形间的链同构. $\square$

Remark 1.85. 这里 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X^{\bullet}\otimes_K Y^{\bullet})^{\bullet}\cong\mathrm{Tot}^{\oplus}(Y^{\bullet}\otimes_K X^{\bullet})^{\bullet}$ 想视作 A^e-A^e 双模复形同构需要修改右边复形的 A^e-A^e 双模复形结构. 当 $X^{\bullet}=Y^{\bullet}$ 时, $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X^{\bullet}\otimes_K X^{\bullet})^{\bullet}\cong\mathrm{Tot}^{\oplus}(\tilde{X}^{\bullet}\otimes_K\tilde{X}^{\bullet})$.

Remark 1.86. 设 R 是含幺环, X,Y 是 R-R 双模复形, 那么 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X^{\bullet}\otimes_R Y^{\bullet})$ 有自然的 R-R 双模结构. 把 X,Y 视作 R^{op}-R^{op} 双模复形后, $\mathrm{Tot}^{\oplus}(Y^{\bullet}\otimes_{R^{op}} X^{\bullet})$ 也成为 R^{op}-R^{op} 双模复形. 于是 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(Y^{\bullet}\otimes_{R^{op}} X^{\bullet})$ 依然可视作 R-R 双模复形. 和 [命题1.84] 一样可直接构造形式相同的 Abel 群复形间的链同构 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X^{\bullet}\otimes_R Y^{\bullet})\cong\mathrm{Tot}^{\oplus}(Y^{\bullet}\otimes_{R^{op}} X^{\bullet})$, 容易验证该链同构也是 R-R 双模复形间链同构.

Example 1.87. 设 A 是 K-代数, X_1,X_2,Y_1,Y_2 都是 A-A 双模, 那么 $X_1\otimes_A Y_1$ 和 $Y_2\otimes_A X_2$ 有自然的 A-A 双模结构. 于是可通过前面的方式把 $(X_1\otimes_A Y_1)\otimes_K(Y_2\otimes_A X_2)$ 视作 A^e-A^e 双模: $(a\otimes b)(x_1\otimes y_1\otimes y_2\otimes x_2)=ax_1\otimes y_1\otimes y_2\otimes x_2 b$, $(x_1\otimes y_1\otimes y_2\otimes x_2)(c\otimes d)=x_1\otimes y_1 c\otimes dy_2\otimes x_2$. 这里 $a,b,c,d\in A$. 而 $Y_2\otimes_A(X_1\otimes_K X_2)\otimes_A Y_1$ 有自然的 A-A 双模结构. 现在考虑 $(X_1\otimes_A Y_1)\otimes_K(Y_2\otimes_A X_2)$ 上的右 A^e-模结构给出的其上 A-A 双模结构. 那么映射

$$\chi:(X_1\otimes_A Y_1)\otimes_K(Y_2\otimes_A X_2)\to Y_2\otimes_A(X_1\otimes_K X_2)\otimes_A Y_1, x_1\otimes y_1\otimes y_2\otimes x_2\mapsto y_2\otimes x_1\otimes x_2\otimes y_1$$

是定义合理的且为 A-A 双模同构. 其逆映射 $\chi^{-1}:Y_2\otimes_A(X_1\otimes_K X_2)\otimes_A Y_1\to(X_1\otimes_A Y_1)\otimes_K(Y_2\otimes_A X_2)$ 把形如 $y_2\otimes x_1\otimes x_2\otimes y_1$ 的元素映至 $x_1\otimes y_1\otimes y_2\otimes x_2$.

Proof. 标准 K-模同构 $(X_1\otimes_A Y_1)\otimes_K(Y_2\otimes_A X_2)\cong(Y_2\otimes_A X_2)\otimes_K(X_1\otimes_A Y_1)\cong Y_2\otimes_A(X_2\otimes_K X_1)\otimes_A Y_1$ 与标准 K-模同构 $\tau:X_2\otimes_K X_1\to X_1\otimes_K X_2, x_2\otimes x_1\mapsto x_1\otimes x_2$ 决定的 K-模同构 $1_{Y_2}\otimes\tau\otimes 1_{Y_1}:Y_2\otimes_A(X_2\otimes_K X_1)\otimes_A Y_1\to Y_2\otimes_A(X_1\otimes_K X_2)\otimes_A Y_1$ 的合成给出的映射就是 χ, 因此 χ 是定义合理的并且是 K-模同构. 现在需要验证 χ 是 A-A 双模同构. 设 $a,b\in A$, 那么对任给 $x_1\otimes y_1\otimes y_2\otimes x_2\in(X_1\otimes_A Y_1)\otimes_K(Y_2\otimes_A X_2)$ 有

$$a(x_1\otimes y_1\otimes y_2\otimes x_2)=(x_1\otimes y_1\otimes y_2\otimes x_2)(1\otimes a)=(x_1\otimes y_1)\otimes a(y_2\otimes x_2)=x_1\otimes y_1\otimes ay_2\otimes x_2.$$

所以 $\chi(a(x_1\otimes y_1\otimes y_2\otimes x_2))=ay_2\otimes x_1\otimes x_2\otimes y_1=a\chi(x_1\otimes y_1\otimes y_2\otimes x_2)$, 这说明 χ 是左 A-模.

同样地, 有 $(x_1\otimes y_1\otimes y_2\otimes x_2)b=(x_1\otimes y_1\otimes y_2\otimes x_2)(b\otimes 1)=x_1\otimes y_1 b\otimes y_2\otimes x_2$. 所以

$$\chi((x_1\otimes y_1\otimes y_2\otimes x_2)b)=y_2\otimes x_1\otimes x_2\otimes y_1 b=\chi(x_1\otimes y_1\otimes y_2\otimes x_2)b.$$

这说明 χ 也是右 A-模同态. 至此我们说明了 χ 是 A-A 双模同构. □

Proposition 1.88. 设 A 是 K-代数, M 是 A-A 双模, 将 M 视作集中在 0 次位置的复形. 再设 $X_1^{\bullet},X_2^{\bullet},Y_1^{\bullet},Y_2^{\bullet}$ 都是 A-A 双模复形. 利用 M 的左 A^e-模结构以及 $(X_1^i\otimes_A Y_1^p)\otimes_K(Y_2^q\otimes_K X_2^j)$ 上标准 A^e-A^e 双模结构中的左 A^e-模结构 (来自外作用), 可定义出 Hom 复形 $\mathrm{Hom}_{A^e}^{\bullet}(M,(X_1^{\bullet}\otimes_A Y_1^{\bullet})\otimes_K(Y_2^{\bullet}\otimes_A X_2^{\bullet}))$, 这里简化了张量积复形的记号. 那么 $(X_1^{\bullet}\otimes_A Y_1^{\bullet})\otimes_K(Y_2^{\bullet}\otimes_A X_2^{\bullet})$ 上的右 A^e-模复形结构使我们能够把 $\mathrm{Hom}_{A^e}^{\bullet}(M,(X_1^{\bullet}\otimes_A Y_1^{\bullet})\otimes_K(Y_2^{\bullet}\otimes_A X_2^{\bullet}))$ 视作右 A^e-模复形. 进而 $\mathrm{Hom}_{A^e}^{\bullet}(M,(X_1^{\bullet}\otimes_A Y_1^{\bullet})\otimes_K(Y_2^{\bullet}\otimes_A X_2^{\bullet}))$ 也是 A-A 双模复形. 同样地, $X_1^{\bullet}\otimes_K X_2^{\bullet}$ 可自然视作 A^e-A^e 双模复形, 利用其左 A^e-模复形结构 (来自外作用) 定义出复形 $\mathrm{Hom}_{A^e}^{\bullet}(M,X_1^{\bullet}\otimes_K X_2^{\bullet})$. 同样地, $X_1^{\bullet}\otimes_K X_2^{\bullet}$ 上的右 A^e-模复形结构 (来自内作用) 使 $\mathrm{Hom}_{A^e}^{\bullet}(M,X_1^{\bullet}\otimes_K X_2^{\bullet})$ 成为 A-A 双模复形.

那么对固定的整数 n, 有定义合理的映射 $\sigma^n:(Y_2^{\bullet}\otimes_A\mathrm{Hom}_{A^e}^{\bullet}(M,X_1^{\bullet}\otimes_K X_2^{\bullet})\otimes_A Y_1^{\bullet})^n\to\mathrm{Hom}_{A^e}^n(M,(X_1^{\bullet}\otimes_A Y_1^{\bullet})\otimes_K(Y_2^{\bullet}\otimes_A X_2^{\bullet}))$ 满足对任何满足 $p+t+q=n$ 的整数指标 p,t,q, σ^n 将 $(Y_2^{\bullet}\otimes_A\mathrm{Hom}_{A^e}^{\bullet}(M,X_1^{\bullet}\otimes_K X_2^{\bullet})\otimes_A Y_1^{\bullet})^n$ 中形如 $y_2^p\otimes f^t\otimes y_1^q$ 的元素 (这里 $f^t:M\to(X_1^{\bullet}\otimes_K X_2^{\bullet})^t$ 为左 A^e-模同态) 映至如下 $\mathrm{Hom}_{A^e}^n(M,(X_1^{\bullet}\otimes_A Y_1^{\bullet})\otimes_K(Y_2^{\bullet}\otimes_A X_2^{\bullet}))$ 中元素: 在每个 $m\in M$ 上的作用为 $y_2^p\otimes f^t(m)\otimes y_1^q$ 在 [例1.87] 给出的 A-A 双模同构

$Y_2^p \otimes_A X_1^i \otimes_K X_2^j \otimes_A Y_1^q \cong X_1^i \otimes_A Y_1^q \otimes_K Y_2^p \otimes_A X_2^j$ 下的像. 并且 σ^n 是 A-A 双模同态. 此外, σ^n 能够调整为新的 A-A 双模同态 $\tilde{\sigma}^n : (Y_2^\bullet \otimes_A \mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M, X_1^\bullet \otimes_K X_2^\bullet) \otimes_A Y_1^\bullet)^n \to \mathrm{Hom}^n_{A^e}(M, (X_1^\bullet \otimes_A Y_1^\bullet) \otimes_K (Y_2^\bullet \otimes_A X_2^\bullet))$ 满足将 $y_2^p \otimes f^t \otimes y_1^q$ 的元素映至如下 $\mathrm{Hom}^n_{A^e}(M, (X_1^\bullet \otimes_A Y_1^\bullet) \otimes_K (Y_2^\bullet \otimes_A X_2^\bullet))$ 中元素: 在每个 $m \in M$ 上的作用为: 如果设 $f^t(m) = \sum x_1^i \otimes x_2^j$(需要指出这里对固定的指标 i, j, $f^t(m)$ 在 $X_1^i \otimes_K X_2^j$ 中的分量未必只有一项), 那么 $\tilde{\sigma}^n(y_2^p \otimes f^t \otimes y_1^q)$ 在 m 上的取值为 $\sum (-1)^{pi+qj+pq} x_1^i \otimes y_1^q \otimes y_2^p \otimes x_2^j$. 这时 $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 给出 A-A 双模复形链映射 $(Y_2^\bullet \otimes_A \mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M, X_1^\bullet \otimes_K X_2^\bullet) \otimes_A Y_1^\bullet)^\bullet \to \mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M, (X_1^\bullet \otimes_A Y_1^\bullet) \otimes_K (Y_2^\bullet \otimes_A X_2^\bullet))$.

Proof. 先证映射 σ^n 的定义合理性. 设指标 p, q, t 满足 $p+q+t = n$. 对固定的 $m \in M$, 设 $f^t(m) = \sum x_1^i \otimes x_2^j$, 这里 $x_1^i \in X_1^i$ 且 $x_2^j \in X_2^j$ 满足 $i+j = t$. 进而 $\sigma^n(y_2^p \otimes f^t \otimes y_1^q)(m) = \sum x_1^i \otimes y_1^q \otimes y_2^p \otimes x_2^j$ 这是 $(X_1^\bullet \otimes_A Y_1^\bullet) \otimes_K (Y_2^\bullet \otimes_A X_2^\bullet)$ 的 n 次部分中的元素. 于是由 f^t 是左 A^e-模同态容易验证 $\sigma^n(y_2^p \otimes f^t \otimes y_1^q)$ 是 M 到 $(X_1^\bullet \otimes_A Y_1^\bullet) \otimes_K (Y_2^\bullet \otimes_A X_2^\bullet)$ 的 n 次部分的左 A^e-模同态. 所以如果我们能够证明对任何 $a \in A$, 有 $\sigma^n(y_2^p a \otimes f^t \otimes y_1^q) = \sigma^n(y_2^p \otimes a f^t \otimes y_1^q)$ 以及 $\sigma^n(y_2^p \otimes f^t a \otimes y_1^q) = \sigma^n(y_2^p \otimes f^t \otimes a y_1^q)$, 那么我们便可看到可定义合理地定义出映射 σ^n.

沿用前面对 $f^t(m)$ 引用的记号. 那么 $af^t(m) = f^t(m)(1 \otimes a) = (\sum x_1^i \otimes x_2^j)(1 \otimes a) = \sum x_1^i \otimes a x_2^j$. 所以

$$\sigma^n(y_2^p \otimes a f^t \otimes y_1^q)(m) = \sum x_1^i \otimes y_1^q \otimes y_2^p \otimes a x_2^j = \sum x_1^i \otimes y_1^q \otimes y_2^p a \otimes x_2^j = \sigma^n(y_2^p a \otimes f^t \otimes y_1^q)(m).$$

通过上式我们看到 $\sigma^n(y_2^p a \otimes f^t \otimes y_1^q) = \sigma^n(y_2^p \otimes a f^t \otimes y_1^q)$. 类似地, 可直接计算验证 $\sigma^n(y_2^p \otimes f^t a \otimes y_1^q) = \sigma^n(y_2^p \otimes f^t \otimes a y_1^q)$. 故我们能够合理地定义出映射 σ^n. 注意到

$$\sum x_1^i \otimes y_1^q \otimes a y_2^p \otimes x_2^j = (\sum x_1^i \otimes y_1^q \otimes y_2^p \otimes x_2^j)(1 \otimes a),$$

所以 σ^n 是左 A-模同态. 对称地, 也有

$$\sum x_1^i \otimes y_1^q a \otimes y_2^p \otimes x_2^j = (\sum x_1^i \otimes y_1^q \otimes y_2^p \otimes x_2^j)(a \otimes 1),$$

这说明 σ^n 也是右 A-模同态. 重复前面的讨论便能得到 $\tilde{\sigma}^n$ 也是定义合理的 A-A 双模同态. 可直接计算得到 A-A 双模同态族 $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 给出 A-A 双模复形间的链映射 $(Y_2^\bullet \otimes_A \mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M, X_1^\bullet \otimes_K X_2^\bullet) \otimes_A Y_1^\bullet)^\bullet \to \mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M, (X_1^\bullet \otimes_A Y_1^\bullet) \otimes_K (Y_2^\bullet \otimes_A X_2^\bullet))$. □

Remark 1.89. 如果 $Y_1^\bullet = A$, 那么 $\tilde{\sigma}^n$ 可表达为 $(Y_2^\bullet \otimes_A \mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M, X_1^\bullet \otimes_K X_2^\bullet))^n \to \mathrm{Hom}^n_{A^e}(M, X_1^\bullet \otimes_K Y_2^\bullet \otimes_A X_2^\bullet)$, 如果设 $f^t(m) = \sum x_1^i \otimes x_2^j$, 那么 $\tilde{\sigma}^n(y_2^p \otimes f^t)$ 在 m 上的取值为 $\sum (-1)^{pi} x_1^i \otimes y_2^p \otimes x_2^j$. 如果 $Y_2^\bullet = A$, 那么 $\tilde{\sigma}^n$ 可表达为 $(\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M, X_1^\bullet \otimes_K X_2^\bullet) \otimes_A Y_1^\bullet)^n \to \mathrm{Hom}^n_{A^e}(M, X_1^\bullet \otimes_K Y_1^\bullet \otimes_A X_2^\bullet)$, 如果设 $f^t(m) = \sum x_1^i \otimes x_2^j$, 那么 $\tilde{\sigma}^n(f^t \otimes y_1^q)$ 在 m 上的取值为 $\sum (-1)^{qj} x_1^i \otimes y_1^q \otimes x_2^j$.

Remark 1.90. 当 [命题1.88] 中的复形 $X_1^\bullet, X_2^\bullet, Y_1^\bullet, Y_2^\bullet$ 全部是有界复形并且 $Y_1^\bullet$ 每项都是有限生成自由左 A-模, $Y_2^\bullet$ 每项都是有限生成自由右 A-模时, 链映射 $\tilde{\sigma}$ 是复形层面的链同构: 如果 $Y_1^\bullet = Y_2^\bullet = A$(集中在 0 次部分), 结论明显成立. 由此可知当 $Y_1^\bullet$ 和 $Y_2^\bullet$ 集中在 0 次且 0 次项是有限生成自由 A-模时结论成立. 利用给定复形的有界性便可直接验证 $Y_1^\bullet, Y_2^\bullet$ 都是有界且每项为有限生成自由 A-模的复形时 $\tilde{\sigma}$ 是链同构.

Remark 1.91. 也可以考虑比 [命题1.88] 更一般的场景. 设 A 是 K-代数, $M^\bullet$ 是 A-A 双模复形, $X_1^\bullet, X_2^\bullet, Y_1^\bullet, Y_2^\bullet$ 也是 A-A 双模复形. 那么可以类似定义 $(Y_2^\bullet \otimes_A \mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M^\bullet, X_1^\bullet \otimes_K X_2^\bullet) \otimes_A Y_1^\bullet)^\bullet$ 到 $\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M^\bullet, (X_1^\bullet \otimes_A Y_1^\bullet) \otimes_K (Y_2^\bullet \otimes_A X_2^\bullet))$ 的链映射. 具体地, 对固定的整数 n, 可以定义出定义合理的 A-A 双模同态 $\tau^n : (Y_2^\bullet \otimes_A \mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M^\bullet, X_1^\bullet \otimes_K X_2^\bullet) \otimes_A Y_1^\bullet)^n \to \mathrm{Hom}^n_{A^e}(M^\bullet, (X_1^\bullet \otimes_A Y_1^\bullet) \otimes_K (Y_2^\bullet \otimes_A X_2^\bullet))$ 满足对任何

$$y_2^p \otimes (g^k : M^k \to (X_1^\bullet \otimes_K X_2^\bullet)^{k+t})_{k\in\mathbb{Z}} \otimes y_1^q \in (Y_2^\bullet \otimes_A \mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M^\bullet, X_1^\bullet \otimes_K X_2^\bullet) \otimes_A Y_1^\bullet)^n,$$

这里 $p+t+q=n$, τ^n 作用上述元素后在指标 $\ell\in\mathbb{Z}$ 处的分量 (为 M^ℓ 到 $(X_1^\bullet\otimes_A Y_1^\bullet)\otimes_K(Y_2^\bullet\otimes_A X_2^\bullet)^{\ell+n}$ 的左 A^e-模同态) 在每个 $m^\ell\in M^\ell$ 上的取值满足: 如果记 $f^\ell(m^\ell)=\sum x_1^i\otimes x_2^j\in(X_1^\bullet\otimes_A Y_1^\bullet)^{\ell+t}$, 则在 m 上取值为 $\sum x_1^i\otimes y_1^q\otimes y_2^p\otimes x_2^j\in(X_1^\bullet\otimes_A Y_1^\bullet)\otimes_K(Y_2^\bullet\otimes_A X_2^\bullet)^{\ell+n}$.

$y_2^p\otimes(g^k:M^k\to(X_1^\bullet\otimes_K X_2^\bullet)^{k+t})_{k\in\mathbb{Z}}\otimes y_1^q\in(Y_2^\bullet\otimes_A\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M^\bullet,X_1^\bullet\otimes_K X_2^\bullet)\otimes_A Y_1^\bullet)^n$ 在 $(Y_2^\bullet\otimes_A\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M^\bullet,X_1^\bullet\otimes_K X_2^\bullet)\otimes_A Y_1^\bullet)^\bullet$ 的 n 次微分下的像为

$$d^p_{Y_2}(y_2^p)\otimes(g^k:M^k\to(X_1^\bullet\otimes_K X_2^\bullet)^{k+t})_{k\in\mathbb{Z}}\otimes y_1^q+(-1)^p y_2^p\otimes d^t_{\mathrm{Hom}(M,X_1\otimes X_2)}(g^k:M^k\to(X_1^\bullet\otimes_K X_2^\bullet)^{k+t})_{k\in\mathbb{Z}}\otimes y_1^q$$
$$+(-1)^{p+t}y_2^p\otimes(g^k:M^k\to(X_1^\bullet\otimes_K X_2^\bullet)^{k+t})_{k\in\mathbb{Z}}\otimes d^\bullet_{Y_1}y_1^q.$$

下面化简 $(-1)^p y_2^p\otimes d^t_{\mathrm{Hom}(M,X_1\otimes X_2)}(g^k:M^k\to(X_1^\bullet\otimes_K X_2^\bullet)^{k+t})_{k\in\mathbb{Z}}\otimes y_1^q$. 首先

$$d^t_{\mathrm{Hom}(M,X_1\otimes X_2)}(g^k:M^k\to(X_1^\bullet\otimes_K X_2^\bullet)^{k+t})_{k\in\mathbb{Z}}=(d^{k+t}_{X_1\otimes X_2}g^k+(-1)^{t+1}g^{k+1}d^k_M:M^k\to(X_1^\bullet\otimes_K X_2^\bullet)^{k+t+1})_{k\in\mathbb{Z}},$$

因此

$$(-1)^p y_2^p\otimes d^t_{\mathrm{Hom}(M,X_1\otimes X_2)}(g^k:M^k\to(X_1^\bullet\otimes_K X_2^\bullet)^{k+t})_{k\in\mathbb{Z}}\otimes y_1^q=(-1)^p y_2^p\otimes(d^{k+t}_{X_1\otimes X_2}g^k)_{k\in\mathbb{Z}}\otimes y_1^q$$
$$+(-1)^{p+t+1}y_2^p\otimes(g^{k+1}d^k_M)_{k\in\mathbb{Z}}\otimes y_1^q.$$

于是我们能计算 $y_2^p\otimes(g^k:M^k\to(X_1^\bullet\otimes_K X_2^\bullet)^{k+t})_{k\in\mathbb{Z}}\otimes y_1^q$ 先被 $(Y_2^\bullet\otimes_A\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M^\bullet,X_1^\bullet\otimes_K X_2^\bullet)\otimes_A Y_1^\bullet)^\bullet$ 的 n 次微分作用, 再被 τ^{n+1} 作用下的像: 对任何 $m^\ell\in M^\ell$, 记 $g^\ell(m^\ell)=\sum x_1^i\otimes x_2^j$, 这里 $i+j=\ell+t$. 以及 $g^{\ell+1}d^\ell_M(m^\ell)=\sum x_1^{k_1}\otimes x_2^{k_2}$, 这里 $k_1+k_2=\ell+t+1$. 那么

$$\tau^{n+1}d^n_{(Y_2^\bullet\otimes_A\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M^\bullet,X_1^\bullet\otimes_K X_2^\bullet)\otimes_A Y_1^\bullet)^\bullet}(y_2^p\otimes(g^k:M^k\to(X_1^\bullet\otimes_K X_2^\bullet)^{k+t})_{k\in\mathbb{Z}}\otimes y_1^q)$$

的 ℓ 次分量在 $m^\ell\in M^\ell$ 上的取值为

$$\sum x_1^i\otimes y_1^q\otimes d^p_{Y_2}(y_2)\otimes x_2^j+(-1)^p d^i_{X_1}(x_1^i)\otimes y_1^q\otimes y_2^p\otimes x_2^j+$$
$$(-1)^{p+i}x_1^i\otimes y_1^q\otimes y_2^p\otimes d^j_{X_2}(x_2^j)+(-1)^{p+t+1}x_1^{k_1}\otimes y_1^q\otimes y_2^p\otimes x_2^{k_2}+\sum(-1)^{p+t}x_1^i\otimes d^q_{Y_1}(y_1)\otimes y_2^p\otimes x_2^j.$$

下面计算 $\tau^n(y_2^p\otimes(g^k:M^k\to(X_1^\bullet\otimes_K X_2^\bullet)^{k+t})_{k\in\mathbb{Z}}\otimes y_1^q)$ 在 $\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M^\bullet,(X_1^\bullet\otimes_A Y_1^\bullet)\otimes_K(Y_2^\bullet\otimes_A X_2^\bullet))$ 的 n 次微分下的像在 $m^\ell\in M^\ell$ 处的取值. 首先对任何

$$(h^\ell:M^\ell\to(X_1^\bullet\otimes_A Y_1^\bullet)\otimes_K(Y_2^\bullet\otimes_A X_2^\bullet)^{\ell+n})_{\ell\in\mathbb{Z}}\in\mathrm{Hom}^n_{A^e}(M^\bullet,(X_1^\bullet\otimes_A Y_1^\bullet)\otimes_K(Y_2^\bullet\otimes_A X_2^\bullet))$$

在 $d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M^\bullet,(X_1^\bullet\otimes_A Y_1^\bullet)\otimes_K(Y_2^\bullet\otimes_A X_2^\bullet))}$ 下的像为 $(d^{n+\ell}_{X_1\otimes Y_1\otimes Y_2\otimes X_2}h^\ell+(-1)^{n+1}h^{\ell+1}d^\ell_M)_{\ell\in\mathbb{Z}}$.

因此 $\tau^n(y_2^p\otimes(g^k:M^k\to(X_1^\bullet\otimes_K X_2^\bullet)^{k+t})_{k\in\mathbb{Z}}\otimes y_1^q)$ 在 n 次微分下的像在 m^ℓ 处的取值为

$$\sum d^i_{X_1}(x_1^i)\otimes y_1^q\otimes y_2^p\otimes x_2^j+\sum(-1)^i x_1^i\otimes d^q_{Y_1}(y_1)\otimes y_2^p\otimes x_2^j$$
$$+\sum(-1)^{i+q}x_1^i\otimes y_1^q\otimes d^p_{Y_2}(y_2^p)\otimes x_2^j+\sum(-1)^{i+q+p}x_1^i\otimes y_1^q\otimes y_2^p\otimes d^j_{X_2}(x_2)+\sum(-1)^{n+1}x_1^{k_1}\otimes y_1^q\otimes y_2^p\otimes x_2^{k_2}.$$

类似 [命题1.88], 通过把 τ^n 调整为满足如下条件的 $\tilde{\tau}^n$: 在每个 $m^\ell\in M^\ell$ 上的取值满足: 如果记 $f^\ell(m^\ell)=\sum x_1^i\otimes x_2^j\in(X_1^\bullet\otimes_A Y_1^\bullet)^{\ell+t}$, 则在 m 上取值为 $\sum(-1)^{qi+pi+qp+qt}x_1^i\otimes y_1^q\otimes y_2^p\otimes x_2^j\in(X_1^\bullet\otimes_A Y_1^\bullet)\otimes_K(Y_2^\bullet\otimes_A X_2^\bullet)^{\ell+n}$. 那么可直接验证得到的映射族 $\tilde{\tau}=\{\tilde{\tau}^n\}$ 定义了 $(Y_2^\bullet\otimes_A\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M^\bullet,X_1^\bullet\otimes_K X_2^\bullet)\otimes_A Y_1^\bullet)^\bullet$ 到 $\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M^\bullet,(X_1^\bullet\otimes_A$

$Y_1^\bullet)\otimes_K(Y_2^\bullet\otimes_A X_2^\bullet))$ 的链映射. 可直接验证当 $X_1^\bullet,X_2^\bullet$ 都是有界复形且 $Y_1^\bullet,Y_2^\bullet$ 满足 $Y_1^\bullet$ 每项是有限生成自由左 A-模, $Y_2^\bullet$ 每项是有限生成自由右 A-模时, $\tilde{\tau}$ 给出复形链同构

$$(Y_2^\bullet\otimes_A \mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M^\bullet,X_1^\bullet\otimes_K X_2^\bullet)\otimes_A Y_1^\bullet)^\bullet\cong \mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(M^\bullet,(X_1^\bullet\otimes_A Y_1^\bullet)\otimes_K(Y_2^\bullet\otimes_A X_2^\bullet)).$$

Remark 1.92. 设 R,S 是含幺环, $X^\bullet$ 是有界的左 R-模复形满足每个 X^i 是有限生成投射左 R-模, $Y^\bullet$ 是 R-S 双模复形. 对固定的整数 n,p, 有标准右 S-模同构 $\xi^p:\mathrm{Hom}_R(X^{-p},R)\otimes_R Y^{n-p}\to\mathrm{Hom}_R(X^{-p},Y^{n-p}),f\otimes y^{n-p}\mapsto(x^{-p}\mapsto f(x^{-p})y^{n-p})$. 于是对每个整数 n 和 p, 可如下定义 $\eta^n:(\mathrm{Hom}^\bullet_R(X^\bullet,R)\otimes_R Y^\bullet)^n\to\mathrm{Hom}^n_R(X^\bullet,Y^\bullet)$: 将每个 $(f^p:X^{-p}\to R)\otimes y^{n-p}\in(\mathrm{Hom}^\bullet_R(X^\bullet,R)\otimes_R Y^\bullet)^n$ 映至 $\xi^p(f^p\otimes y^{n-p})\in\mathrm{Hom}^n_R(X^\bullet,Y^\bullet)$. 那么由 $\mathrm{Hom}_R(X^{-p},R)$ 和 $\mathrm{Hom}_R(X^p,Y^{p+n})$ 仅对有限多个指标 p 非零可知 η^n 是右 S-模同构. 如果定义 $\tilde{\eta}^n:\mathrm{Hom}^\bullet_R(X^\bullet,R)\otimes_R Y^\bullet\to\mathrm{Hom}^\bullet_R(X^\bullet,Y^\bullet)$ 满足将每个 $(f^p:X^{-p}\to R)\otimes y^{n-p}\in(\mathrm{Hom}^\bullet_R(X^\bullet,R)\otimes_R Y^\bullet)^n$ 映至 $(-1)^{p(n-p)}\xi^p(f^p\otimes y^{n-p})\in\mathrm{Hom}^n_R(X^\bullet,Y^\bullet)$. 那么可直接验证 $\tilde{\eta}=\{\tilde{\eta}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 定义了 $\mathrm{Hom}^\bullet_R(X^\bullet,R)\otimes_R Y^\bullet$ 到 $\mathrm{Hom}^\bullet_R(X^\bullet,Y^\bullet)$ 作为右 S-模复形的链同构.

现在设 A 是 K-代数, $X^\bullet,Y^\bullet$ 和 $Z^\bullet$ 都是 A-A 双模复形. 记 $\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet\otimes_K Y^\bullet)$ 为 $X^\bullet\otimes_K Y^\bullet$. 下面构造 A-A 双模复形 $\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(X^\bullet\otimes_K Y^\bullet,Z^\bullet)$ 到 $\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(Y^\bullet,\mathrm{Hom}^\bullet_A(X^\bullet,Z^\bullet))$ 的链同构. 固定整数 n, 命

$$\psi^n:\mathrm{Hom}^n_{A^e}(X^\bullet\otimes_K Y^\bullet,Z^\bullet)\to\mathrm{Hom}^n_{A^{op}}(Y^\bullet,\mathrm{Hom}^\bullet_A(X^\bullet,Z^\bullet))$$

满足将任何 $(f^\ell:(X^\bullet\otimes_K Y^\bullet)^\ell\to Z^{\ell+n})_{\ell\in\mathbb{Z}}\in\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(X^\bullet\otimes_K Y^\bullet,Z^\bullet)$ 映至的 $\mathrm{Hom}^n_{A^{op}}(Y^\bullet,\mathrm{Hom}^\bullet_A(X^\bullet,Z^\bullet))$ 中元素在指标 t 处的分量为 $Y^t\to\mathrm{Hom}^{t+n}_A(X,Z),y^t\mapsto(x^p\mapsto(-1)^{pt}f^{p+t}(x^p\otimes y^t))_{p\in\mathbb{Z}}$, 可直接验证 $\psi=\{\psi^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是定义合理的 A-A 双模复形间的链映射. 类似于模范畴场景的 Hom 函子与张量函子伴随同构的证明, 对每个整数 n 可直接构造 ψ^n 的逆映射 (类似 ψ^n 的定义调整符号) 来得到 ψ^n 是链同构.

对称地, 也可以如下定义出 $\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(X^\bullet\otimes_K Y^\bullet,Z^\bullet)$ 到 $\mathrm{Hom}^\bullet_A(X^\bullet,\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(Y^\bullet,Z^\bullet))$ 的链同构: 对每个整数 n, 定义 $\varphi^n:\mathrm{Hom}^n_{A^e}(X^\bullet\otimes_K Y^\bullet,Z^\bullet)\to\mathrm{Hom}^n_A(X^\bullet,\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(Y^\bullet,Z^\bullet))$ 满足将任何 $(f^\ell:(X^\bullet\otimes_K Y^\bullet)^\ell\to Z^{\ell+n})_{\ell\in\mathbb{Z}}\in\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(X^\bullet\otimes_K Y^\bullet,Z^\bullet)$ 映至的 $\mathrm{Hom}^n_A(X^\bullet,\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(Y^\bullet,Z^\bullet))$ 中元素在指标 t 处的分量为 $X^t\to\mathrm{Hom}^{t+n}_{A^{op}}(Y^\bullet,Z^\bullet)),x^t\mapsto(y^q\mapsto f^{q+t}(x^t\otimes y^q))$(这里不用添加符号). 可直接验证 $\varphi=\{\varphi^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是定义合理的 A-A 双模复形间的链同构. 我们把前面的讨论记录为

Proposition 1.93. 设 A 是 K-代数, $X^\bullet,Y^\bullet$ 和 $Z^\bullet$ 都是 A-A 双模复形. 那么
(1) 存在复形链同构 $\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(X^\bullet\otimes_K Y^\bullet,Z^\bullet)\cong\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(Y^\bullet,\mathrm{Hom}^\bullet_A(X^\bullet,Z^\bullet))$.
(2) 存在复形链同构 $\mathrm{Hom}^\bullet_{A^e}(X^\bullet\otimes_K Y^\bullet,Z^\bullet)\cong\mathrm{Hom}^\bullet_A(X^\bullet,\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(Y^\bullet,Z^\bullet))$.
(3) 存在复形链同构 $\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(Y^\bullet,\mathrm{Hom}^\bullet_A(X^\bullet,Z^\bullet))\cong\mathrm{Hom}^\bullet_A(X^\bullet,\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(Y^\bullet,Z^\bullet))$.

Remark 1.94. 这里再指出 [命题1.93] 中的链同构对每个复形变量自然.

1.3 同伦范畴回顾

在加性范畴场景同样可以像模范畴一样引入复形间链映射的链同伦的概念.

Definition 1.95 (链同伦, [Wei94]). 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, $(X^\bullet,d_X^\bullet),(Y^\bullet,d_Y^\bullet)\in\mathscr{C}(\mathcal{A})$, 如果链映射 $f^\bullet,g^\bullet:X^\bullet\to Y^\bullet$ 满足存在态射族 $\{s^n:X^n\to Y^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 使得 $d_Y^{n-1}s^n+s^{n+1}d_X^n=f^n-g^n,\forall n\in\mathbb{Z}$, 则称链映射 $f^\bullet$ 和 $g^\bullet$ **同伦**, 称

$s^\bullet$ 是 $f^\bullet$ 到 $g^\bullet$ 的一个**链同伦**, 简记作 $f \overset{s}{\sim} g$.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"'] \arrow[dl, "s^n"'] & X^{n+1} \arrow[r, "d_X^{n+1}"] \arrow[d, "f^{n+1}"] \arrow[dl, "s^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \arrow[r, "d_Y^{n+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

如果链映射 $f^\bullet$ 和零链映射是同伦的, 也称 $f^\bullet$ 是**零伦的**.

如果 $(X^\bullet, d_X^\bullet), (Y^\bullet, d_Y^\bullet) \in \mathscr{C}(\mathcal{A})$ 间有链映射 $f^\bullet, g^\bullet$, 那么 $f^\bullet$ 和 $g^\bullet$ 是链同伦的当且仅当 $(f-g)^\bullet$ 是零伦的. 任何链映射 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ 明显与自身链同伦; 如果链映射 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ 到 $g^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ 有链同伦 $s^\bullet$, 那么 $-s^\bullet$ 给出 $g^\bullet$ 到 $f^\bullet$ 的链同伦. 现在设链映射 $f^\bullet, g^\bullet, h^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ 满足 $f \overset{s}{\sim} g, g \overset{t}{\sim} h$, 那么 $f \overset{s+t}{\sim} h$. 因此对固定的 $(X^\bullet, d_X^\bullet), (Y^\bullet, d_Y^\bullet) \in \mathscr{C}(\mathcal{A})$, 链同伦给出加法群 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ 上等价关系. 命

$$\mathrm{Htp}(X^\bullet, Y^\bullet) = \{f^\bullet \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) | f^\bullet \text{是零伦的}\},$$

那么 $\mathrm{Htp}(X^\bullet, Y^\bullet)$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ 的加法子群并且商群 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)/\mathrm{Htp}(X^\bullet, Y^\bullet)$ 就是所有 $X^\bullet$ 到 $Y^\bullet$ 的链同伦等价类构成的集合, 记作 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$. 特别地, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ 上有自然的加群结构.

如果加性范畴 $\mathcal{A}$ 上复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet), (Y^\bullet, d_Y^\bullet), (Z^\bullet, d_Z^\bullet)$ 间有链同伦的链映射 $f_1^\bullet, f_2^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ 以及链同伦的链映射 $g_1^\bullet, g_2^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$, 那么容易验证 $(g_1 f_1)^\bullet$ 和 $(g_2 f_2)^\bullet$ 同伦. 这一观察说明我们可以定义链映射同伦等价类间的合成. 即链映射 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ 的同伦等价类和 $g^\bullet : Y^\bullet \to Z^\bullet$ 的同伦等价类如果定义为 $(gf)^\bullet : X^\bullet \to Z^\bullet$ 所在的同伦等价类, 那么定义合理. 于是从给定的加性范畴 $\mathcal{A}$ 出发, 我们能够定义一个新的范畴 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$:

- 范畴 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 的对象类定义为 $\mathrm{ob}\mathscr{C}(\mathcal{A})$.
- 任何 $(X^\bullet, d_X^\bullet), (Y^\bullet, d_Y^\bullet) \in \mathrm{ob}\mathscr{K}(\mathcal{A}) = \mathrm{ob}\mathscr{C}(\mathcal{A})$, 定义 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ 为 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)/\mathrm{Htp}(X^\bullet, Y^\bullet)$.
- 任何 $(X^\bullet, d_X^\bullet), (Y^\bullet, d_Y^\bullet), (Z^\bullet, d_Z^\bullet) \in \mathrm{ob}\mathscr{K}(\mathcal{A})$, 定义合成

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(Y^\bullet, Z^\bullet) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Z^\bullet), ([g^\bullet], [f^\bullet]) \mapsto [(gf)^\bullet].$$

易见我们定义的 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 构成范畴, 称为加性范畴 $\mathcal{A}$ 的**同伦范畴**. 同伦范畴明显有零复形作为零对象, 任何复形在同伦范畴中的态射集上有自然的加法群结构, 并且态射的合成与加法具有分配律. 对任何 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中任意有限多个复形对象, 考虑这些复形对象在 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 中满足的 (AC4), 再将 (AC4) 中相应的标准态射所在的同伦等价类对应到同伦范畴中, 便可知 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 是加性范畴. 但无法得到 Abel 范畴上同伦范畴是 Abel 范畴.

设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴. 如果记 $P : \mathscr{C}(A) \to \mathscr{K}(A)$ 是标准函子, 即将每个复形对应到自身, 复形间的链映射对应到其所在的同伦等价类, 那么 P 明显是加性函子.

下面说明 Abel 范畴上复形间同伦的链映射诱导的上同调对象间的态射相同, 这反映链同伦的重要性.

Proposition 1.96. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $(X^\bullet, d_X^\bullet), (Y^\bullet, d_Y^\bullet) \in \mathrm{ob}\mathscr{C}(\mathcal{A})$, 如果 $f^\bullet, g^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ 是同伦的链映射, 那么对任何整数 n 有 $H^n(f) = H^n(g) : H^n(X) \to H^n(Y)$.

Proof. 沿用定义上同调函子的记号, 现在有标准 monic 态 $a_X^n: \mathrm{Im}d_X^n \to \mathrm{Ker}d_X^n$, $a_Y^n: \mathrm{Im}d_Y^n \to \mathrm{Ker}d_Y^n$ 以及链映射 $f^\bullet$ 给出态射 $c^n(f): \mathrm{Ker}d_X^n \to \mathrm{Ker}d_Y^n$ 和 $b^n(f): \mathrm{Im}d_X^{n-1} \to \mathrm{Im}d_Y^{n-1}$ 使得有交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}d_X^n \arrow[r, "a_X^n"] \arrow[d, "b^n(f)"] & \mathrm{Ker}d_X^n \arrow[r, "e_X^n"] \arrow[d, "c^n(f)"] & H^n(X) \arrow[r] \arrow[d, "H^n(f)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}d_Y^n \arrow[r, "a_Y^n"] & \mathrm{Ker}d_Y^n \arrow[r, "e_Y^n"] & H^n(Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

并且 $c^n(f-g) = c^n(f) - c^n(g)$ 成立. 并且对核 $k_X^n: \mathrm{Ker}d_X^n \to X^n$ 以及 $k_Y^n: \mathrm{Ker}d_Y^n \to Y^n$, 有 $k_Y^n c^n(f) = f^n k_X^n$. 再考虑微分 $d_Y^{n-1}: X^{n-1} \to X^n$ 有标准分解 $d_Y^{n-1} = \iota_Y^{n-1}\tilde{d}_Y^{n-1}$, 其中 $\tilde{d}_Y^{n-1}: Y^{n-1} \to \mathrm{Im}d_Y^{n-1}$ 是 epic 态且 $\iota_Y^{n-1}: \mathrm{Im}d_Y^{n-1} \to Y^n$ 是 monic 态. 现在设 $s^\bullet$ 是 $f^\bullet$ 到 $g^\bullet$ 的链同伦, 则有 $d_Y^{n-1}s^n + s^{n+1}d_X^n = f^n - g^n$. 故

$$k_Y^n c^n(f-g) = k_Y^n c^n(f) - k_Y^n c^n(g) = f^n k_X^n - g^n k_X^n = (d_Y^{n-1}s^n + s^{n+1}d_X^n)k_X^n = d_Y^{n-1}s^n k_X^n.$$

于是 $k_Y^n c^n(f-g) = d_Y^{n-1}s^n k_X^n = \iota_Y^{n-1}\tilde{d}_Y^{n-1}s^n k_X^n = k_Y^n a_Y^n \tilde{d}_Y^{n-1}s^n k_X^n$. 结合 k_Y^n 是 monic 态可知

$$c^n(f-g) = a_Y^n \tilde{d}_Y^{n-1} s^n k_X^n.$$

于是由 $H^n(f-g)e_X^n = e_Y^n c^n(f-g) = e_Y^n a_Y^n \tilde{d}_Y^{n-1} s^n k_X^n = 0$ 便知 $H^n(f-g) = H^n(f) - H^n(g) = 0$. □

Remark 1.97. 复形间的两个链映射如果诱导上同调对象间的态射相同, 未必有同伦关系. 考虑 $\mathbb{Z}$-模复形

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \cdots,$$

其中 $\pi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 是标准投射. 由于上述复形是正合的, 所以恒等链映射与零链映射诱导的各次上同调对象间的态射都是零. 但恒等链映射和零链映射明显不是同伦的: 不存在同态 $s: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 和 $t: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 使得

$$1_{\mathbb{Z}} = 2s + t\pi,$$

事实上, 这里的同态 t 如果存在, 只能是零映射, 由此导出矛盾.

通过 [命题1.96], 我们能够把复形范畴 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 上的上同调函子诱导到同伦范畴 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 上. 固定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, 沿用 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 上的上同调函子的记号: 对整数 n 和每个 $(X^\bullet, d_X^\bullet) \in \mathrm{ob}\mathscr{K}(\mathcal{A})$, 定义 $H^n(X)$ 是该复形的 n 次上同调对象, 对任何链映射 $f^\bullet: X^\bullet \to Y^\bullet$ 所在的同伦等价类, 将该链映射等价类对应到 $\mathcal{A}$ 中态射 $H^n(f): H^n(X) \to H^n(Y)$, 那么 [命题1.96] 保证了该对应定义合理. 进而我们得到函子 $H^n: \mathscr{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$.

Definition 1.98 (同伦等价, [Wei94]). 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, 如果 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 中链映射 $f^\bullet: X^\bullet \to Y^\bullet$ 满足存在链映射 $g^\bullet: Y^\bullet \to X^\bullet$ 满足 $(gf)^\bullet$ 和 $(fg)^\bullet$ 都链同伦于恒等链映射, 则称 $f^\bullet$ 是**同伦等价**.

Remark 1.99. 易见 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 中链映射 $f^\bullet: X^\bullet \to Y^\bullet$ 是同伦等价当且仅当它的同伦等价类是 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中同构.

Remark 1.100. 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, 如果 $(X^\bullet, d_X^\bullet) \in \mathrm{ob}\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 满足其上恒等链映射与零链映射同伦, 那么 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 和零复形间有自然的同伦等价, 即在 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 和零复形同构. 反之, 如果在 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 和零复形同构, 易见该复形的恒等链映射与零链映射同伦. 因此在 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中同构于零复形的那些复形就是满足恒等链映射和零链映射同伦的复形. 这样的复形也被称为**可缩复形**.

同伦范畴的引入使复形范畴中链同伦的链映射成为相同的态射, 也使同伦等价成为同构. 特别地, 由前面指出的上同调函子可视作同伦范畴上函子 $H^n:\mathscr{K}(\mathcal{A})\to\mathcal{A}$, 立即得到

Proposition 1.101. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 那么复形范畴 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 中的同伦等价都是拟同构 (回忆 [定义1.63]).

Remark 1.102. 复形范畴中的拟同构未必是同伦等价. 例如考虑模范畴 R-**Mod** 中的短正合列

$$0\longrightarrow M'\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M''\longrightarrow 0$$

要求 g 不是同构. 现在有复形间拟同构:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

则由 g 自身不是同构不难看到 g 不是同伦等价. 故链同构是特殊的同伦等价, 而同伦等价是特殊的拟同构.

Remark 1.103. 当 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴时, $\mathcal{A}$ 上任何可缩复形 (回忆 [注记1.100]) 和零复形同伦等价, 所以是正合复形. 而可缩复形的定义说明当 $(X^\bullet,d_X^\bullet)$ 可缩时, 存在一族态射 $\{s^n:X^n\to X^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足 $1_X^n=d_X^{n-1}s^n+s^{n+1}d_X^n$. 两边右乘上 d_X^{n-1} 便知 $(X^\bullet,d_X^\bullet)$ 是可裂复形 (并注意这里链同伦的指标和可裂复形定义中态射指标不同). 因此 Abel 范畴上的可缩复形总是可裂正合复形. 反之, [命题1.68] 说明可裂正合复形总是可缩的, 所以

Abel 范畴上的复形是可裂正合的等价于该复形是可缩的.

Example 1.104 ([ZW18]). 在 [例1.51] 中对加性范畴 $\mathcal{A}$ 上任何复形 $(X^\bullet,d_X^\bullet)$, 能产生加性函子 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,-):\mathscr{C}(\mathcal{A})\to\mathscr{C}(\mathbf{Ab})$. 任给 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 中链映射 $g^\bullet:Y^\bullet\to Z^\bullet$, 诱导 $\mathscr{C}(\mathbf{Ab})$ 中链映射 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,g):\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)\to\mathrm{Hom}^\bullet(X,Z)$. 可直接计算验证如果 $g^\bullet$ 是零伦的, 那么 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,g)$ 也是零伦的. 所以 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,-)$ 可视作同伦范畴间的函子 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,-):\mathscr{K}(\mathcal{A})\to\mathscr{K}(\mathbf{Ab})$. 类似地, 也有逆变加性函子 $\mathrm{Hom}^\bullet(-,X):\mathscr{K}(\mathcal{A})\to\mathscr{K}(\mathbf{Ab})$.

类似于对复形范畴 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 能够考虑全子范畴 $\mathscr{C}^b(\mathcal{A}),\mathscr{C}^-(\mathcal{A}),\mathscr{C}^+(\mathcal{A})$, 也可以考虑 $\mathscr{K}^b(\mathcal{A}),\mathscr{K}^-(\mathcal{A}),\mathscr{K}^+(\mathcal{A})$.

回忆模范畴场景固定模的投射分解和内射分解在同伦意义下唯一. 在有足够多投射/内射对象的 Abel 范畴依然有投射/内射分解存在, 也有相应结论成立, 其本质是下面的比较引理.

Proposition 1.105 (投射版本比较引理, [ZW18]). 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴, $X,Y\in\mathrm{ob}\mathcal{A}$ 并有态射 $f:X\to Y$. 如果 X 有投射分解 $(P^\bullet,d^\bullet,\varepsilon)$, 那么对任何正合复形 (并记 $(Q^\bullet,\delta^\bullet)$ 是删去 Y 后的复形)

$$\cdots\longrightarrow Q^{-n}\xrightarrow{\delta^{-n}}Q^{-n+1}\xrightarrow{\delta^{-n+1}}\cdots\longrightarrow Q^{-1}\xrightarrow{\delta^{-1}}Q^0\xrightarrow{\varepsilon'}Y\longrightarrow 0,$$

存在链映射 $\alpha^\bullet:P^\bullet\to Q^\bullet$ 使得 $f\varepsilon=\varepsilon'\alpha^0$, 即有下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-n} \arrow[r, "d^{-n}"] \arrow[d, "\alpha^{-n}"] & P^{-n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{-n+1}"] & \cdots \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"] & P^0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha^0"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q^{-n} \arrow[r, "\delta^{-n}"] & Q^{-n+1} \arrow[r, "\delta^{-n+1}"] & \cdots \arrow[r] & Q^{-1} \arrow[r, "\delta^{-1}"] & Q^0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

如果还有链映射 $\beta^\bullet:P^\bullet\to Q^\bullet$ 也满足 $\varepsilon'\beta^0=f\varepsilon$, 那么 $\alpha^\bullet$ 和 $\beta^\bullet$ 同伦.

Proof. 因为 ε' 是 epic 态并且 P^0 是投射对象, 所以存在态射 $\alpha^0 : P^0 \to Q^0$ 使得 $f\varepsilon = \varepsilon'\alpha^0$. 现在设 δ^{-1} 有标准分解 $\delta^{-1} = j^0\tilde{\delta}^{-1}$, 这里 $j^0 : \mathrm{Im}\delta^{-1} \to Q^0$ 是 monic 态且 $\tilde{\delta}^{-1} : Q^{-1} \to \mathrm{Im}\delta^{-1}$ 是 epic 态.

$$\begin{tikzcd}
P^{-1} \arrow[rr, "d^{-1}"] & & P^0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha^0"] & X \arrow[d, "f"] \\
Q^{-1} \arrow[rr, "\delta^{-1}"] \arrow[dr, "\tilde{\delta}^{-1}"'] & & Q^0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & Y \\
& \mathrm{Im}\delta^{-1} \arrow[ur, "j^0"'] & &
\end{tikzcd}$$

因为 j^0 是 ε' 的核, 所以由 $\varepsilon'\alpha^0 d^{-1} = 0$ 可知存在态射 $\tilde{\alpha}^{-1} : P^{-1} \to \mathrm{Im}\delta^{-1}$ 使得 $j^0\tilde{\alpha}^{-1} = \alpha^0 d^{-1}$. 再利用 $\tilde{\delta}^{-1}$ 是 epic 态知存在态射 $\alpha^{-1} : P^{-1} \to Q^{-1}$ 满足 $\tilde{\delta}^{-1}\alpha^{-1} = \tilde{\alpha}^{-1}$. 于是由 $\delta^{-1} = j^0\tilde{\delta}^{-1}$ 立即得到 $\delta^{-1}\alpha^{-1} = \alpha^0 d^{-1}$. 如果已经对整数 $0, -1, ..., n$ 构造好了态射 $\alpha^i, n \le i \le 0$ 满足对负整数 $n \le i$ 有 $\delta^i\alpha^i = \alpha^{i+1}d^i$. 下面构造态射 $\alpha^{n-1} : P^{n-1} \to Q^{n-1}$ 使得 $\delta^{n-1}\alpha^{n-1} = \alpha^n d^{n-1}$. 考虑 δ^{n-1} 的标准分解 $\delta^{n-1} = j^n\tilde{\delta}^{n-1}$.

$$\begin{tikzcd}
P^{n-1} \arrow[rr, "d^{n-1}"] \arrow[d, dashed, "\alpha^{n-1}"'] \arrow[dr, "\tilde{\alpha}^{n-1}"] & & P^n \arrow[r, "d^{n+1}"] \arrow[d, "\alpha^n"] & P^{n-1} \arrow[d, "\alpha^{n-1}"] \\
Q^{n-1} \arrow[rr, dashed, "\delta^{n-1}"] \arrow[dr, "\tilde{\delta}^{n-1}"'] & & Q^n \arrow[r, "\delta^n"] & Q^{n+1} \\
& \mathrm{Im}\delta^{n-1} \arrow[ur, "j^n"'] & &
\end{tikzcd}$$

注意到 $\delta^n\alpha^n d^{n-1} = 0$ 并且 j^n 是 δ^n 的核, 存在唯一的态射 $\tilde{\alpha}^{n-1} : P^{n-1} \to \mathrm{Im}\delta^{n-1}$ 使得 $j^n\tilde{\alpha}^{n-1} = \alpha^n d^{n-1}$. 因为 P^{n-1} 是投射对象, 所以由 $\tilde{\delta}^{n-1}$ 是 epic 态得到存在态射 $\alpha^{n-1} : P^{n-1} \to Q^{n-1}$ 使得 $\tilde{\delta}^{n-1}\alpha^{n-1} = \tilde{\alpha}^{n-1}$. 因此 $\delta^{n-1}\alpha^{n-1} = \alpha^n d^{n-1}$. 递归地, 我们得到满足 $f\varepsilon = \varepsilon'\alpha^0$ 的链映射 $\alpha^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$.

如果还有链映射 $\beta^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$ 满足 $\varepsilon'\beta^0 = f\varepsilon$. 下面构造 $\alpha^\bullet$ 到 $\beta^\bullet$ 的链同伦. 首先有交换图:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-n} \arrow[r, "d^{-n}"] \arrow[d, "\alpha^{-n}-\beta^{-n}"'] & P^{-n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{-n+1}-\beta^{-n+1}"] & \cdots \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, "\alpha^{-1}-\beta^{-1}"] & P^0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^0-\beta^0"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q^{-n} \arrow[r, "\delta^{-n}"] & Q^{-n+1} \arrow[r, "\delta^{-n+1}"] & \cdots \arrow[r] & Q^{-1} \arrow[r, "\delta^{-1}"] & Q^0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

并注意到 $\varepsilon'(\alpha^0 - \beta^0) = 0$. 类似前面对 $\alpha^\bullet$ 的构造, 借助 δ^{-1} 的标准分解以及 $\mathrm{Ker}\varepsilon' = \mathrm{Im}\delta^{-1}$, 易构造态射 $s^0 : P^0 \to Q^1$ 满足 $\delta^{-1}s^0 = \alpha^0 - \beta^0$. 注意到 $\delta^{-1}(\alpha^{-1} - \beta^{-1} - s^0 d^{-1}) = 0$, 所以类似 $\alpha^\bullet$ 的构造借助 δ^{-2} 的标准分解可构造态射 $s^{-1} : P^{-1} \to Q^{-2}$ 满足 $\delta^{-2}s^{-1} = \alpha^{-1} - \beta^{-1} - s^0 d^{-1}$, 即

$$\alpha^{-1} - \beta^{-1} = s^0 d^{-1} + \delta^{-2}s^{-1}.$$

如果现在已经构造了态射 $s^0, s^{-1}, ..., s^n$ 满足对任何 $n \le i \le -1$ 有 $\alpha^i - \beta^i = s^{i+1}d^i + \delta^{i-1}s^i$. 下面需要构造态射 $s^{n-1} : P^{n-1} \to Q^{n-2}$ 使得 $\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} = s^n d^{n-1} + \delta^{n-2}s^{n-1}$. 利用 $\alpha^n - \beta^n = s^{n+1}d^n + \delta^{n-1}s^n$ 知

$$\delta^n(\alpha^n - \beta^n - s^{n+1}d^n) = 0,$$

所以使用 $\alpha^\bullet$ 的构造方法便得到满足 $\delta^{n-2}s^{n-1} = \alpha^n - \beta^n - s^{n+1}d^n$ 的态射 $s^{n-1} : P^{n-1} \to Q^{n-2}$. $\square$

Remark 1.106. 这里没有要求 Q^n 是投射对象. 对 Abel 范畴要求有足够多投射对象是为保证投射分解存在性.

与投射版本的比较引理完全对偶地, 我们有内射版本的比较引理, 其证明也是 [命题1.105] 证明的对偶.

Proposition 1.107 (内射版本比较引理, [ZW18])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的 Abel 范畴, $X, Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 并有态射 $f : Y \to X$. 如果 X 有内射分解 $(I^\bullet, \delta^\bullet, \eta)$, 那么对任何正合复形 (并记 $(J^\bullet, \partial^\bullet)$ 是删去 Y 后的复形)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "f"] & J^0 \arrow[r, "\partial^0"] \arrow[d, "\alpha^0"] & J^1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^1"] & \cdots \arrow[r] & J^n \arrow[r, "\partial^n"] \arrow[d, "\alpha^n"] & J^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{n+1}"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\eta"] & I^0 \arrow[r, "\delta^0"] & I^1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & I^n \arrow[r, "\delta^n"] & I^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

存在链映射 $\alpha^\bullet : J^\bullet \to I^\bullet$ 使得 $\eta f = \alpha^0 \eta'$. 并且满足该条件的 $J^\bullet$ 到 $I^\bullet$ 的链映射在同伦意义下唯一.

[命题1.105] 和 [命题1.107] 说明对有足够多投射/内射对象的 Abel 范畴, 给定对象的投射/内射分解的删去复形在同伦范畴中是同构的 (即复形间存在同伦等价).

1.4 导出函子回顾

本节我们回顾具有足够多投射对象或足够多内射对象的 Abel 范畴上共变/逆变加性函子的导出函子构造以及导出函子的长正合列性质. 以下固定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, 我们分 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象和足够多内射对象讨论.

先考虑 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象的情形. 这时 $\mathcal{A}$ 中任何对象的投射分解存在. **现在我们对 $\mathcal{A}$ 中所有对象都取定一个投射分解**. 如果 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的加性函子, n 是自然数, 那么对任何 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 有取定的投射分解 $\cdots \longrightarrow P^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{\varepsilon} X \longrightarrow 0$, 用加性函子 F 作用之, 可得复形

$$\cdots \longrightarrow FP^{-2} \xrightarrow{Fd^{-2}} FP^{-1} \xrightarrow{Fd^{-1}} FP^0 \longrightarrow 0,$$

注意这里删去了项 FX. 对 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 设 $(Q^\bullet, \delta^\bullet, \varepsilon')$ 是 Y 被取定的投射分解, 根据 [命题1.105], 对任何态射 $f : X \to Y$, 存在同伦意义下唯一的链映射 $\alpha^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$ 使得 $f\varepsilon = \varepsilon'\alpha^0$. 于是导出 $\mathcal{B}$ 上复形 $(FP^\bullet, Fd^\bullet)$ 到 $(FQ^\bullet, F\delta^\bullet)$ 的链映射 $F\alpha^\bullet$, 具体地, 有下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & FP^{-n} \arrow[r] \arrow[d, "F\alpha^{-n}"] & \cdots \arrow[r] & FP^{-2} \arrow[r, "Fd^{-2}"] \arrow[d, "F\alpha^{-2}"] & FP^{-1} \arrow[r, "Fd^{-1}"] \arrow[d, "F\alpha^{-1}"] & FP^0 \arrow[r] \arrow[d, "F\alpha^0"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & FQ^{-n} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & FQ^{-2} \arrow[r, "F\delta^{-2}"] & FQ^{-1} \arrow[r, "F\delta^{-1}"] & FQ^0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

虽然 $\alpha^\bullet$ 在同伦意义下唯一, 但根据 [命题1.96], $F\alpha^\bullet$ 所诱导处 $H^{-n}(FP)$ 到 $H^{-n}(FQ)$ 的态射是被 f 唯一决定的. 因此如果定义 $L_nFX = H^{-n}(FP)$ 以及 $L_nF(f) : L_nFX \to L_nFY$ 定义为 $H^{-n}(F\alpha)$, 那么 $L_nF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是定义合理的加性函子 (因为 F 也是加性的), 称为 F 的 n **次左导出函子**.

如果 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的逆变加性函子, 那么对任何态射 X 的投射分解产生 $\mathcal{B}$ 中复形

$$0 \longrightarrow FP^0 \xrightarrow{Fd^{-1}} FP^{-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow FP^{-n} \xrightarrow{Fd^{-n-1}} \cdots.$$

并且任何态射 $f : X \to Y$ 能够诱导同伦意义下唯一的链映射 $\alpha^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$ 使得 $f\varepsilon = \varepsilon'\alpha^0$. 进而有交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & FP^0 \arrow[r, "Fd^{-1}"] & FP^{-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & FP^{-n} \arrow[r, "Fd^{-n-1}"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & FQ^0 \arrow[r, "F\delta^{-1}"] \arrow[u, "F\alpha^0"] & FQ^{-1} \arrow[r] \arrow[u, "F\alpha^{-1}"] & \cdots \arrow[r] & FQ^{-n} \arrow[r, "F\delta^{-n-1}"] \arrow[u, "F\alpha^{-n}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

同样我们能够诱导逆变加性函子 $R^nF:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 满足 $R^nFX=H^n(FP)$ 以及 $R^nF(f)=H^n(F\alpha):R^nFY\to R^nFX$. 称逆变加性函子 R^nF 是逆变加性函子 F 的 n **次右导出函子**.

Lemma 1.108 ([Jac89])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴, $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的加性函子. 那么当 F 是右正合函子时, 有自然同构 $L_0F\cong F$. 类似地, 如果 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的逆变加性函子, 则当 F 是左正合函子时, 有自然同构 $R^0F\cong F$(回忆 [注记1.29]).

Proof. 这时 [注记1.29] 表明对任何对象 X 取定的投射分解 $(P^\bullet,d^\bullet,\varepsilon)$ 诱导 $\mathcal{B}$ 中正合列

$$FP^{-1}\xrightarrow{Fd^{-1}}FP^0\xrightarrow{F\varepsilon}FX\longrightarrow 0.$$

考虑 $\mathcal{B}$ 中态射 Fd^{-1} 的标准分解, 下图中 $\overline{Fd^{-1}}$ 是 epic 态, ι^0_{FP} 是 monic 态. 易见零态的核 k^0_{FP} 是同构.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & & & \\
FP^{-1} \arrow[rr, "Fd^{-1}"] \arrow[dr, "\overline{Fd^{-1}}"'] & & FP^0 \arrow[ul] \arrow[r, "F\varepsilon"] & FX \arrow[r] & 0 \\
 & \mathrm{Im}Fd^{-1} \arrow[ur, "\iota^0_{FP}"] \arrow[rr, "a^0_{FP}"] & & \mathrm{Ker}0 \arrow[ul, "k^0_{FP}"'] &
\end{tikzcd}$$

根据 $\mathcal{B}$ 中上同调函子的定义, 现在有固定的 a^0_{FP} 的余核态射 $e^0_{FP}:\mathrm{Ker}0\to L_0FX$. 因为 $F\varepsilon$ 是 Fd^{-1} 也是 ι^0_{FP} 的余核, 所以结合 k^0_{FP} 是同构立即得到 $F\varepsilon k^0_{FP}$ 是 a^0_{FP} 的余核. 所以存在唯一的态射 $\xi_X:L_0FX\to FX$ 使

$$\begin{tikzcd}
FP^{-1} \arrow[rr, "Fd^{-1}"] \arrow[dr, "\overline{Fd^{-1}}"'] & & FP^0 \arrow[r, "F\varepsilon"] & FX \arrow[r] & 0 & \\
 & \mathrm{Im}Fd^{-1} \arrow[ur, "\iota^0_{FP}"] \arrow[rr, "a^0_{FP}"] & & \mathrm{Ker}0 \arrow[ul, "k^0_{FP}"'] \arrow[r, "e^0_{FP}"] & L_0FX \arrow[ul, dashed, "\xi_X"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

交换. 并且这里的态射 ξ_X 是同构. 如果现在有态射 $f:X\to Y$, Y 被选定的投射分解是 $(Q^\bullet,\delta^\bullet,\varepsilon')$, 设 $\alpha^\bullet:P^\bullet\to Q^\bullet$ 是定义 $L_0F(f)$ 的链映射, 那么可直接验证下述交换图来看到 ξ 给出 L_0F 到 F 的自然同构.

$$\begin{tikzcd}
FQ^{-1} \arrow[rr, "F\delta^{-1}"] \arrow[dr] & & FQ^0 \arrow[rr, "F\varepsilon'"] & & FY & \\
 & \mathrm{Im}F\delta^{-1} \arrow[ur, "\iota^0_{FQ}"] \arrow[rr, "a^0_{FQ}"] & & \mathrm{Ker}0 \arrow[ul, "k^0_{FQ}"'] \arrow[rr, "Ff"] & & L_0FY \arrow[ul, "\xi_Y"'] \\
FP^{-1} \arrow[uu, "F\alpha^{-1}"] \arrow[rr, dashed, "b^0(\alpha)"] \arrow[dr, "\overline{Fd^{-1}}"'] & & FP^0 \arrow[uu, dashed] \arrow[rr, dashed] & & FX \arrow[uu, dashed] & \\
 & \mathrm{Im}Fd^{-1} \arrow[uu] \arrow[ur, dashed, "\iota^0_{FP}"] \arrow[rr, "a^0_{FP}"] & & \mathrm{Ker}0 \arrow[uu] \arrow[ul, dashed, "k^0_{FP}"'] \arrow[rr, "e^0_{FP}"] & & L_0FX \arrow[uu, "L_0F(f)"'] \arrow[ul, dashed, "\xi_X"']
\end{tikzcd}$$

□

在具有足够多投射对象的 Abel 范畴场景, 我们对加性函子 F 定义出的左导出函子 L_nF 或是逆变加性函子 F 定义出的右导出函子 R^nF 建立在对 Abel 范畴中每个对象事先取定投射分解的前提下. 下面我们说明对于不同的投射分解选取, 定义出的导出函子是自然同构的. 以共变加性函子的左导出函子为例, 逆变情形类似可证. 现在设 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的加性函子. 对每个 $X\in\mathrm{ob}\mathcal{A}$, 设 $(\overline{P}^\bullet,\overline{d}^\bullet,\overline{\varepsilon})$ 也是 X 的投射分解.

根据 [命题1.105], 有同伦等价 $\beta_X^\bullet : P^\bullet \to \overline{P}^\bullet$. 对任何态射 $f : X \to Y$, 有链映射 $\alpha^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$ 和 $\overline{\alpha}^\bullet : \overline{P}^\bullet \to \overline{Q}^\bullet$ 满足 $\varepsilon'\alpha^0 = f\varepsilon$ 以及 $\overline{\varepsilon}'\overline{\alpha}^0 = f\overline{\varepsilon}$, 于是 $(\overline{\alpha}\beta_X)^\bullet$ 和 $(\beta_Y\alpha)^\bullet$ 是复形 $(P^\bullet, d^\bullet)$ 到 $(\overline{Q}^\bullet, \overline{\delta}^\bullet)$ 的链映射并且都和 $\varepsilon, \overline{\varepsilon}'$ 相容, 即满足 [命题1.105] 条件, 所以 $(\overline{\alpha}\beta_X)^\bullet$ 和 $(\beta_Y\alpha)^\bullet$ 同伦, 用 F 作用后的链映射依然同伦, 进而根据导出函子的定义以及 [命题1.96] 知用第二种投射分解选取定义出的左导出函子 $\overline{L}_nF$ 满足 $\overline{L}_nF(f)H^{-n}(F\beta_X) = H^{-n}(F\beta_Y)L_nF(f)$, 这里 $F\beta_X^\bullet$ 和 $F\beta_Y^\bullet$ 是 $\mathcal{B}$ 上复形间的同伦等价, 因此诱导的上同调对象间的态射是同构. 于是知 $H^n(F\beta)$ 给出左导出函子 L_nF 到 $\overline{L}_nF$ 的自然同构.

对于有足够多内射对象的 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, 我们能够对 $\mathcal{A}$ 中所有对象 X 选定内射分解 $(I^\bullet, \delta^\bullet, \eta)$. 于是可类似前面的情形定义导出函子: 当 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间加性函子时, 通过将 F 作用 X 的内射分解的删去复形以及 [命题1.107], 我们能够对任何自然数 n 定义 F 的右导出函子 $R^nF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 这也是加性函子. 当 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是逆变加性函子时, 利用 [命题1.107] 以及将 F 作用于内射分解的删去复形, 我们能够对任何自然数 n, 定义 F 的 n 次左导出函子 $L_nF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 这是逆变加性函子. 对偶 [引理1.108] 的证明过程可得

Lemma 1.109 ([Jac89])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的 Abel 范畴. 如果 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的左正合加性函子, 那么 $R^0F \cong F$; 如果 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是逆变右正合加性函子, 那么 $L_0F \cong F$.

与具有足够多投射对象的 Abel 范畴场景一样, 当 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的 Abel 范畴时, 定义的导出函子在自然同构意义下不依赖于 $\mathcal{A}$ 中对象内射分解的选取. 下面回顾导出函子的长正合列性质, 首先我们需要

Proposition 1.110 (投射版本马蹄引理, [ZW18])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是具有足够多投射对象的 Abel 范畴, 并有 $\mathcal{A}$ 中短正合列

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0.$$

并取定 X' 的投射分解 $((P')^\bullet, (d')^\bullet, \varepsilon')$ 和 X'' 的投射分解 $((P'')^\bullet, (d'')^\bullet, \varepsilon'')$. 对每个自然数 n, 记 $(P')^{-n}$ 和 $(P'')^{-n}$ 的积以及余积对象是 $(P')^{-n} \oplus (P'')^{-n}$, 相应的标准态射是 $i_1^{-n} : (P')^{-n} \to (P')^{-n} \oplus (P'')^{-n}, i_2^{-n} : (P'')^{-n} \to (P')^{-n} \oplus (P'')^{-n}$ 以及 $p_1 : (P')^{-n} \oplus (P'')^{-n} \to (P')^{-n}$ 和 $p_2 : (P')^{-n} \oplus (P'')^{-n} \to (P'')^{-n}$. 那么对每个正整数 n, 存在态射 $d^{-n} : (P')^{-n} \oplus (P'')^{-n} \to (P')^{-n+1} \oplus (P'')^{-n+1}$ 以及态射 $\varepsilon : (P')^0 \oplus (P'')^0 \to X$ 使得下图是行与列均正合的交换图 (所以下图中间列给出 X 的投射分解):

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & (P')^{-1} \arrow[r, "i_1^{-1}"] \arrow[d, "(d')^{-1}"'] & P^{-1} \arrow[r, "p_2^{-1}"] \arrow[d, "d^{-1}"'] & (P'')^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "(d'')^{-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (P')^{0} \arrow[r, "i_1^{0}"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & P^{0} \arrow[r, "p_2^{0}"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & (P'')^{0} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d] & X'' \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

其中 $P^{-n} = (P')^{-n} \oplus (P'')^{-n}$.

Proof. 对每个自然数 n, 引入记号 $P^{-n} = (P')^{-n} \oplus (P'')^{-n}$. 因为 g 是 epic 态并且 $(P'')^0$ 是投射对象, 所以有态射 $\varepsilon^* : (P'')^0 \to X$ 使得 $g\varepsilon^* = \varepsilon'' p_2^0$. 于是存在唯一的态射 $\varepsilon : P^0 \to X$ 使得 $\varepsilon^* = \varepsilon i_2^0$ 以及 $f\varepsilon' = \varepsilon i_1^0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\varepsilon' \arrow[r, "\overline{i_1^0}"] \arrow[d, "(k')^0"'] & \mathrm{Ker}\varepsilon \arrow[r, "\overline{p_2^0}"] \arrow[d, "k^0"'] & \mathrm{Ker}\varepsilon'' \arrow[r] \arrow[d, "(k'')^0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (P')^0 \arrow[r, "i_1^0"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & P^0 \arrow[r, "p_2^0"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon"'] & (P'')^0 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] \arrow[dl, dashed, "\varepsilon^*"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d] & X'' \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

易见 $g\varepsilon i_2^0 = \varepsilon''$, 于是 $g\varepsilon i_2^0 p_2^0 = \varepsilon'' p_2^0$. 结合 $g\varepsilon i_1^0 p_1^0 = 0$ 便知 $g\varepsilon = \varepsilon'' p_2^0$. 对上图的下面两行正合列应用蛇形引理, 见 [推论1.46], 由 ε' 和 ε'' 的余核对象是零对象得到 ε 是 epic 态, 以及 $\mathrm{Coker}\varepsilon' = 0$ 得到下述序列是短正合列:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\varepsilon' \xrightarrow{\overline{i_1^0}} \mathrm{Ker}\varepsilon \xrightarrow{\overline{p_2^0}} \mathrm{Ker}\varepsilon'' \longrightarrow 0.$$

现在由 $((P')^\bullet, (d')^\bullet, \varepsilon')$ 是 X' 的投射分解以及 $((P'')^\bullet, (d'')^\bullet, \varepsilon'')$ 是 X'' 的投射分解可将 $(d')^{-1} : (P')^{-1} \to (P')^0$ 和 $(d'')^{-1} : (P'')^{-1} \to (P'')^0$ 分别经标准 monic 态 $(k')^0$ 和 $(k'')^0$ 分解, 设有标准分解 $(d')^{-1} = (k')^0\overline{(d')^{-1}}$ 以及 $(d'')^{-1} = (k'')^0\overline{(d'')^{-1}}$. 那么我们得到下图, 再递归地使用前面 ε 构造方法便完成证明:

$$\begin{tikzcd}
 & (P')^{-1} \arrow[d, "\overline{(d')^{-1}}"'] & & (P'')^{-1} \arrow[d, "\overline{(d'')^{-1}}"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\varepsilon' \arrow[r, "\overline{i_1^0}"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\varepsilon \arrow[r, "\overline{p_2^0}"] & \mathrm{Ker}\varepsilon'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

□

对有足够多内射对象的 Abel 范畴, 对偶 [命题1.110] 的证明过程便可得到

Proposition 1.111 (内射版本马蹄引理, [ZW18]). 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的 Abel 范畴, 其中有正合列

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0.$$

取定 X' 的内射分解 $((I')^\bullet, (\delta')^0, \eta')$ 和 X'' 的内射分解 $((I'')^\bullet, (\delta'')^0, \eta'')$, 对每个自然数 n, 并记 $I^n = (I')^n \oplus (I'')^n$, 并记 $i_1^n : (I')^n \to I^n$ 和 $p_2^n : I^n \to (I'')^n$ 是标准态射. 那么存在态射 $\eta : X \to I^0$ 和一族态射 $\delta^n : I^n \to$

I^{n+1} 使得下图交换并且行和列都正合 (所以下图中间列给出 X 的内射分解):

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{g} & X'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \eta'} & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow{\scriptstyle \eta''} & & \\ 0 & \longrightarrow & (I')^1 & \xrightarrow{i_1^1} & I^1 & \xrightarrow{p_2^1} & (I'')^1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle (\delta')^1} & & \downarrow{\scriptstyle \delta^1} & & \downarrow{\scriptstyle (\delta'')^1} & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴, 固定 $\mathcal{A}$ 中正合列 $0 \longrightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0$.

如果 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间加性函子, 固定 $\mathcal{A}$ 中所有对象的投射分解选取下, 定义出的 n 次左导出函子记作 L_nF. 将定义 L_nF 的投射分解选取中, 对象 X 的投射分解修改为 [命题1.110] 给出的投射分解, 在此选取下定义出的左导出函子记作 $\overline{L}_nF$. 则有自然同构 $L_nF \cong \overline{L}_nF, \forall n \in \mathbb{N}$. 因为马蹄引理中复形短正合列每项是可裂的, 所以作用加性函子 F 后依然是短正合列, 回忆 [注记1.37]. 因此应用同调代数基本定理, 回忆 [定理1.62], 得到长正合列

$$\cdots \xrightarrow{\overline{\Delta}_{n+1}} \overline{L}_nFX' \xrightarrow{\overline{L}_nF(f)} \overline{L}_nFX \xrightarrow{\overline{L}_nF(g)} \overline{L}_nFX'' \xrightarrow{\overline{\Delta}_n} \overline{L}_{n-1}FX' \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\overline{\Delta}_1} \overline{L}_0FX' \xrightarrow{\overline{L}_0F(f)} \overline{L}_0FX \xrightarrow{\overline{L}_0F(g)} \overline{L}_0FX'' \longrightarrow 0.$$

因此利用自然同构 $L_nF \cong \overline{L}_nF, \forall n \in \mathbb{N}$ 立即得到关于导出函子 L_nF 有下述形式的长正合列

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{n+1}} L_nFX' \xrightarrow{L_nF(f)} L_nFX \xrightarrow{L_nF(g)} L_nFX'' \xrightarrow{\Delta_n} L_{n-1}FX' \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_1} L_0FX' \xrightarrow{L_0F(f)} L_0FX \xrightarrow{L_0F(g)} L_0FX'' \longrightarrow 0.$$

如果进一步 F 是右正合函子, 那么 [引理1.108] 说明我们能把上述长正合列调整为具有下述形式

$$\cdots \longrightarrow L_nFX' \xrightarrow{L_nF(f)} L_nFX \xrightarrow{L_nF(g)} L_nFX'' \longrightarrow L_{n-1}FX' \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow FX' \xrightarrow{F(f)} FX \xrightarrow{F(g)} FX'' \longrightarrow 0.$$

依然保持 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴的假设, 现在设 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是逆变加性函子. 同样先修正投射分解的选定, 使用投射版本的马蹄引理, 对 [命题1.110] 中图作用逆变函子 F, 再应用同调代数基本定理, 最后调整为原先投射分解选取定义出的 F 的右导出函子, 便得到下述形式的长正合列

$$0 \longrightarrow R^0FX'' \xrightarrow{R^0F(g)} R^0FX \xrightarrow{R^0F(f)} R^0FX' \xrightarrow{\Delta^0} \cdots \longrightarrow R^{n-1}FX' \xrightarrow{\Delta^{n-1}}$$

$$R^nFX'' \xrightarrow{R^nF(g)} R^nFX \xrightarrow{R^nF(f)} R^nFX' \xrightarrow{\Delta^n} R^{n+1}FX'' \longrightarrow \cdots.$$

如果进一步 F 是左正合的逆变加性函子, 从 [引理1.108] 知上述长正合列还可以调整为

$$0 \longrightarrow FX'' \xrightarrow{F(g)} FX \xrightarrow{F(f)} FX' \longrightarrow \cdots \longrightarrow R^{n-1}FX' \longrightarrow$$

$$R^nFX'' \xrightarrow{R^nF(g)} R^nFX \xrightarrow{R^nF(f)} R^nFX' \longrightarrow R^{n+1}FX'' \xrightarrow{R^{n+1}F(g)} \cdots .$$

现在我们将前面在具有足够多投射对象的 Abel 范畴场景导出函子长正合列性质的讨论总结为

Theorem 1.112 ([ZW18]). 设 $\mathcal{A}$ 是具有足够多投射对象的 Abel 范畴并给定 $\mathcal{A}$ 中的短正合列

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0.$$

(1) 如果 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的加性函子, 那么有左导出函子的长正合列

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{n+1}} L_nFX' \xrightarrow{L_nF(f)} L_nFX \xrightarrow{L_nF(g)} L_nFX'' \xrightarrow{\Delta_n} L_{n-1}FX' \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_1} L_0FX' \xrightarrow{L_0F(f)} L_0FX \xrightarrow{L_0F(g)} L_0FX'' \longrightarrow 0.$$

如果 F 进一步是右正合函子, 那么有长正合列

$$\cdots \longrightarrow L_nFX' \xrightarrow{L_nF(f)} L_nFX \xrightarrow{L_nF(g)} L_nFX'' \longrightarrow L_{n-1}FX' \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow FX' \xrightarrow{F(f)} FX \xrightarrow{F(g)} FX'' \longrightarrow 0.$$

(2) 如果 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间逆变加性函子, 那么有右导出函子的长正合列

$$0 \longrightarrow R^0FX'' \xrightarrow{R^0F(g)} R^0FX \xrightarrow{R^0F(f)} R^0FX' \xrightarrow{\Delta^0} \cdots \longrightarrow R^{n-1}FX' \xrightarrow{\Delta^{n-1}}$$

$$R^nFX'' \xrightarrow{R^nF(g)} R^nFX \xrightarrow{R^nF(f)} R^nFX' \xrightarrow{\Delta^n} R^{n+1}FX'' \longrightarrow \cdots .$$

如果 F 进一步是 (逆变) 左正合函子, 那么有长正合列

$$0 \longrightarrow FX'' \xrightarrow{F(g)} FX \xrightarrow{F(f)} FX' \longrightarrow \cdots \longrightarrow R^{n-1}FX' \xrightarrow{\Delta^{n-1}}$$

$$R^nFX'' \xrightarrow{R^nF(g)} R^nFX \xrightarrow{R^nF(f)} R^nFX' \longrightarrow R^{n+1}FX'' \xrightarrow{R^{n+1}F(g)} \cdots .$$

与 [定理1.112] 对偶地, 在有足够多内射对象的 Abel 范畴场景, 利用 [命题1.111] 容易类似证明

Theorem 1.113 ([ZW18]). 设 $\mathcal{A}$ 是具有足够多内射对象的 Abel 范畴并给定 $\mathcal{A}$ 中的短正合列

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0.$$

(1) 如果 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的加性函子, 那么有右导出函子的长正合列

$$0 \longrightarrow R^0FX' \xrightarrow{R^0F(f)} R^0FX \xrightarrow{R^0F(g)} R^0FX'' \xrightarrow{\Delta^0} \cdots \longrightarrow R^{n-1}FX'' \xrightarrow{\Delta^{n-1}}$$

$$R^nFX' \xrightarrow{R^nF(f)} R^nFX \xrightarrow{R^nF(g)} R^nFX'' \xrightarrow{\Delta^n} R^{n+1}FX' \longrightarrow \cdots .$$

如果进一步 F 是左正合函子, 可以调整为具有下述形式的长正合列

$$0 \longrightarrow FX' \xrightarrow{F(f)} FX \xrightarrow{F(g)} FX'' \longrightarrow \cdots \longrightarrow R^{n-1}FX'' \xrightarrow{\Delta^{n-1}}$$

$$R^nFX' \xrightarrow{R^nF(f)} R^nFX \xrightarrow{R^nF(g)} R^nFX'' \xrightarrow{\Delta^n} R^{n+1}FX' \longrightarrow \cdots.$$

(2) 如果 $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的逆变加性函子, 那么有左导出函子的长正合列

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{n+1}} L_nFX'' \xrightarrow{L_nF(g)} L_nFX \xrightarrow{L_nF(f)} L_nFX' \xrightarrow{\Delta_n} L_{n-1}FX'' \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_1} L_0FX'' \xrightarrow{L_0F(g)} L_0FX \xrightarrow{L_0F(f)} L_0FX' \longrightarrow 0.$$

如果进一步 F 是 (逆变) 右正合函子, 那么可调整为下述形式的长正合列

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{n+1}} L_nFX'' \xrightarrow{L_nF(g)} L_nFX \xrightarrow{L_nF(f)} L_nFX' \xrightarrow{\Delta_n} L_{n-1}FX'' \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow FX'' \xrightarrow{F(g)} FX \xrightarrow{F(f)} FX' \longrightarrow 0.$$

Example 1.114 (Ext 函子, [ZW18])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴. 并固定对象 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$. 根据 [例1.27], $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,Y): \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ 是左正合的逆变加性函子. 对任何自然数 n, 记 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,Y)$ 的 n 次右导出函子为 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(-,Y)$. 那么 [定理1.112(2)] 表明 $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{A}}(-,Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,Y)$. 当 $\mathcal{A} = R$-$\mathbf{Mod}$ 是模范畴时, 习惯上把 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(-,Y)$ 记作 $\mathrm{Ext}^n_R(-,Y)$. 如果给定 $\mathcal{A}$ 中短正合列 $0 \longrightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0$, 那么根据 [定理1.112(2)], 有长正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X'',Y) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X',Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X'',Y) \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}_{\mathcal{A}}(X'',Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}_{\mathcal{A}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}_{\mathcal{A}}(X',Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X'',Y) \longrightarrow \cdots.$$

利用 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(-,Y)$ 也可以对 $\mathcal{A}$ 中任何对象 W 定义共变加性函子 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(Y,-)$: 具体地, 对任何 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 定义 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(Y,-)(X) = \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(Y,X)$, 即对 Y 已经选定的投射分解 $(Q^\bullet, \delta^\bullet, \varepsilon')$, 作用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,X)$ 得到复形

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q^0,X) \xrightarrow{(d^{-1})^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q^{-1},X) \xrightarrow{(d^{-2})^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q^{-2},X) \longrightarrow \cdots.$$

而 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(Y,X)$ 就是上述复形的 n 次上同调群. 对任何态射 $g: X \to X'$, 诱导链映射

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q^0,X) \arrow[r, "(d^{-1})^*"] \arrow[d, "(g_*)^0"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q^{-1},X) \arrow[r, "(d^{-2})^*"] \arrow[d, "(g_*)^1"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q^{-2},X) \arrow[r] \arrow[d, "(g_*)^2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q^0,X') \arrow[r, "(d^{-1})^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q^{-1},X') \arrow[r, "(d^{-2})^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q^{-2},X') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

定义 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(Y,-)(g)$ 为上图链映射所诱导的 n 次上同调群之间的同态, 记作 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(Y,g)$. 于是我们得到共变加性函子 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(Y,-): \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$(前面的右导出函子 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(-,Y)$ 是逆变加性函子). 注意当 $n=0$ 时, 同样有自然同构 $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{A}}(Y,-) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,-)$: 首先有正合列 $Q^{-1} \xrightarrow{\delta^{-1}} Q^0 \xrightarrow{\varepsilon'} Y \longrightarrow 0$, 根据 [注记1.29], 有正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,X) \xrightarrow{(\varepsilon')^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q^0,X) \xrightarrow{(d^{-1})^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q^{-1},X).$$

所以利用 $(\varepsilon')^*$ 便可实现自然同构 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,-)\cong \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{A}}(Y,-)$. 因为每个 Q^i 是投射对象, 所以同样我们可利用同调代数基本定理导出 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(Y,-)$ 满足的长正合列性质. 具体地, 对 $\mathcal{A}$ 中短正合列

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0,$$

我们有长正合列:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{A}}(Y,X') \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{A}}(Y,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{A}}(Y,X'') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Y,X') \longrightarrow \cdots.$$

于是借助自然同构 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,-)\cong \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{A}}(Y,-)$ 我们能够将上述长正合列调整为

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,X') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,X) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,X'') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Y,X') \longrightarrow \cdots.$$

以下设 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的 Abel 范畴, $Y\in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 是固定的, 选定的内射分解设为 $(J^\bullet,\delta^\bullet,\eta')$. 由于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,-)$ 是左正合加性函子, 故可定义 $\overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(Y,-)$ 为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,-)$ 的 n 次右导出函子. 故对 $\mathcal{A}$ 中短正合列

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0,$$

我们有长正合列:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,X') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,X) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,X'') \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathcal{A}}(Y,X') \longrightarrow \cdots.$$

下面我们用加性函子 $\overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(Y,-)$ 定义逆变加性函子 $\overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(-,Y)$. 对任何对象 $X\in\mathrm{ob}\mathcal{A}$ 定义 $\overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(-,Y)(X)=\overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$. 现在 Y 选定的内射分解 $(J^\bullet,\delta^\bullet,\eta')$ 产生复形

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,J^0) \xrightarrow{(\delta^0)_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,J^1) \xrightarrow{(\delta^1)_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,J^2) \xrightarrow{(\delta^2)_*} \cdots.$$

而 $\overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$ 就是上述复形的 n 次上同调群. 对任何态射 $g:X\to X'$, 诱导下述链映射:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,J^0) \arrow[r, "(\delta^0)_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,J^1) \arrow[r, "(\delta^1)_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,J^2) \arrow[r, "(\delta^2)_*"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X',J^0) \arrow[r, "(\delta^0)_*"] \arrow[u, "(g^*)^0"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X',J^1) \arrow[r, "(\delta^1)_*"] \arrow[u, "(g^*)^1"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X',J^2) \arrow[r, "(\delta^2)_*"] \arrow[u, "(g^*)^2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

定义 $\overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(g,Y):\overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(X',Y)\to\overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$ 为上述链映射所诱导的 n 次上同调群间的同态. 那么我们得到逆变加性函子 $\overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(-,Y):\mathcal{A}\to\mathbf{Ab}$. 易验证自然同构 $\overline{\mathrm{Ext}}^0_{\mathcal{A}}(-,Y)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,Y)$, 并且任何 $\mathcal{A}$ 中短正合列

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0,$$

可导出长正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X'',Y) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X',Y) \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathcal{A}}(X'',Y) \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}_{\mathcal{A}}(X'',Y) \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}}^{n-1}_{\mathcal{A}}(X,Y) \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}}^{n-1}_{\mathcal{A}}(X',Y) \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(X'',Y) \longrightarrow \cdots.$$

Remark 1.115. 如果 R,S 是含幺环, X 是 R-S 双模, 那么 $\mathrm{Hom}_R(-,X): R\textbf{-Mod} \to \textbf{Mod-}S$ 是模范畴间的左正合函子, 这时右导出函子 $\mathrm{Ext}^n_R(-,X)$ 也是从 R-**Mod** 到 **Mod**-S 的逆变加性函子. 而 Ext 群的长正合列这时也是右 S-模范畴中的长正合列. 例如对含幺环 R 上任何左 R-模 M, $\mathrm{Ext}^n_R(M,R)$ 上有自然的右 R-模结构.

与模范畴情形一样, 我们能够用 [例1.114] 中的 Ext 函子刻画对象的投射性与内射性.

Proposition 1.116 ([ZW18]). 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴, $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 那么以下等价:
(1) X 是投射对象.
(2) 对任何 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 和正整数 n 有 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y)=0$.
(3) 对任何 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 有 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X,Y)=0$.

Proof. (1)⇒(2): 如果 X 是投射对象, 那么有投射分解 $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X \xrightarrow{1} X \longrightarrow 0$. 由 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(-,Y)$ 的定义立即得到对任何正整数 n 有 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y)=0$. (2)⇒(3) 是明显的. 最后验证 (3)⇒(1): 因为 $\mathcal{A}$ 有足够多的投射对象, 所以存在投射对象 P 以及下述形式的短正合列:

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0.$$

考察该短正合列诱导的 Ext 函子的长正合列以及 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X,Y)=0$ 得到正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K,Y) \longrightarrow 0.$$

现在取 $Y=K$, 那么我们得到存在态射 $p: P \to K$ 使得 $pf = 1_K$. 所以前面的短正合列可裂, 这说明 $P \cong K \oplus X$(回忆 [注记1.38]), 进而由 [注记1.56] 得到 X 是投射对象. □

Proposition 1.117 ([ZW18]). 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的 Abel 范畴, $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 那么以下等价:
(1) Y 是内射对象.
(2) 对任何 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 和正整数 n 有 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y)=0$.
(3) 对任何 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 有 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X,Y)=0$.

Proof. (1)⇒(2): 考察内射对象 Y 的恒等态给出的内射分解立即得到. (2)⇒(3) 是明显的. 最后验证 (3)⇒(1): 因为 $\mathcal{A}$ 有足够多的内射对象, 所以存在内射对象 I 以及下述形式的短正合列:

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{f} I \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0,$$

考察上述短正合列诱导的关于 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X,-)$ 的长正合列, 再取 $X=C$ 类似 [命题1.116] 的讨论易得上述短正合列可裂, 于是由 Y 是内射对象 I 的直和因子再应用 [注记1.56] 得到结论. □

下面我们说明在既有足够多的投射对象又有足够多的内射对象的 Abel 范畴, Ext 群的两种定义等价.

Corollary 1.118 ([ZW18]). 设 $\mathcal{A}$ 是既有足够多的投射对象又有足够多的内射对象的 Abel 范畴. 那么对任何自然数 n 和 $X,Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 有 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y) \cong \overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

Proof. 对自然数 n 作归纳, 当 $n=0$ 时由 [例1.114] 知 $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) \cong \overline{\mathrm{Ext}}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$. 假设结论对 $n-1$ 的情形成立 (这里 $n \geq 1$), 因为 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象, 可设有投射对象 P 以及有短正合列

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0.$$

考察 Ext 函子关于上述短正合列导出的长正合列以及应用 [命题1.116], 得到正合列 (第二行中 $n \geq 2$):

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K,Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X,Y) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}_{\mathcal{A}}(K,Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y) \longrightarrow 0.$$

根据 $\overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(P,-)$ 的定义, 当 P 是投射对象时对任何正整数 m 和对象 $W \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 有 $\overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(P,W)=0$. 所以考察函子 $\overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(-,Y)$ 关于前面的短正合列诱导的长正合列, 得到正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K,Y) \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathcal{A}}(X,Y) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}}^{n-1}_{\mathcal{A}}(K,Y) \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(X,Y) \longrightarrow 0.$$

现在 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X,Y)$ 和 $\overline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathcal{A}}(X,Y)$ 都是 f^* 的余核对象, 所以 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X,Y) \cong \overline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathcal{A}}(X,Y)$, 再应用归纳假设即可. □

在模范畴场景 (固定含幺环 R), 由于张量函子是共变右正合的, 所以我们可以讨论其左导出函子. 回忆 $\mathrm{Tor}^R_n(X,-) : R\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ 是张量函子 $X \otimes_R -$ 的 n 次左导出函子. 进而也能够对固定的左 R-模 Y 类似 Ext 函子情形定义 $\mathrm{Tor}^R_n(-,Y) : \mathbf{Mod}\text{-}R \to \mathbf{Ab}$. 对固定的左 R-模 Y, $- \otimes_R Y$ 的 n 次左导出函子记作 $\overline{\mathrm{Tor}}^R_n(-,Y) : \mathbf{Mod}\text{-}R \to \mathbf{Ab}$, Tor 函子当然也有短正合列诱导长正合列性质以及 [命题1.118] 的相应版本成立: 任何右 R-模 X 和左 R-模 Y 满足 $\mathrm{Tor}^R_n(X,Y) \cong \overline{\mathrm{Tor}}^R_n(X,Y)$. 这里再指出 Tor 群能够使用模的平坦分解计算.

1.5 同调维数

本节我们讨论有足够多投射对象的 Abel 范畴中对象的投射维数以及有足够多内射对象的 Abel 范畴中对象的内射维数. 以下固定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 和 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 记 $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$. 如果 $(X^\bullet, d^\bullet)$ 是 $\mathcal{A}$ 上复形, 命

$$s(X^\bullet) = \sup\{i \in \mathbb{Z} | X^i \neq 0\},\ b(X^\bullet) = \inf\{i \in \mathbb{Z} | X^i \neq 0\},$$

这里上确界和下确界都在 $\overline{\mathbb{Z}}$ 中取. 称 $s(X^\bullet) - b(X^\bullet)$ 为给定复形的**长度**, 记作 $\ell(X^\bullet)$.

先设 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象. 如果正合列 $0 \longrightarrow P^{-n} \longrightarrow P^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$ 是 X 的投射分解, 称 $0 \longrightarrow P^{-n} \longrightarrow P^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow 0$ 的长度为该投射分解的**长度**. 称 X 的所有投射分解的长度的下确界为 X 的**投射维数**, 记作 $\mathrm{p.dim}X$. 零对象的投射维数是 $-\infty$, 非零对象的投射维数不是自然数就是 $+\infty$. 对 $X \neq 0$, $\mathrm{p.dim}X = 0$ 当且仅当 X 是投射对象.

Proposition 1.119 ([ZW18]). 设 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象, $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 且 n 是自然数. 那么以下等价:
(1) $\mathrm{p.dim}X \leq n$;
(2) 对任何 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 有 $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{A}}(X,Y) = 0$;
(3) 如果 $0 \longrightarrow C^{-n} \longrightarrow C^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^{-1} \longrightarrow C^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$ 是正合列并且 $C^0, C^{-1}, ..., C^{-n+1}$ 是投射对象, 那么 C^{-n} 也投射.

Proof. (1)⇒(2) 和 (3)⇒(1) 均来自投射维数的定义. (2)⇒(3): 这时考察 C^{-n} 的投射分解立即得到

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(C^{-n},Y) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{A}}(X,Y), \forall Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}.$$

所以由 [命题1.116] 得到 C^{-n} 是投射对象. □

Remark 1.120. 在命题条件下, p.dim$X \geq n+1$ 的充要条件是存在 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 使得 $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{A}}(X,Y) \neq 0$.

Proposition 1.121. 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴且有正合列 $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$. 那么该短正合列中任意两个对象的投射维数有 (有限的) 上界能够蕴含第三个对象也有上界. 更进一步, 当三个对象的投射维数都有上界时, 有:
(1) 当 p.dim$X' <$ p.dim$X$ 时, p.dim$X'' =$ p.dim$X$.
(2) 当 p.dim$X <$ p.dimX' 时, p.dim$X'' =$ p.dim$X' + 1$.
(3) 当 p.dim$X =$ p.dimX' 时, p.dim$X'' \leq$ p.dim$X + 1$.

Proof. 仅证 (1), (2) 和 (3) 的证明完全类似. 对任给 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 上述短正合列导出 Abel 群范畴中的长正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}_{\mathcal{A}}(X'',Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}_{\mathcal{A}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}_{\mathcal{A}}(X',Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n}_{\mathcal{A}}(X'',Y) \longrightarrow \cdots$$

故由 [命题1.119] 易得只要 X, X', X'' 中有两个投射维数有上界, 那么第三个对象的投射维数也有上界.

下设 X, X', X'' 的投射维数均有上界. 先证明 (1) 的情形, 此时 X 的投射维数是非负整数, 设 p.dim$X = \ell$, 则 $\mathrm{Ext}^{\ell}_{\mathcal{A}}(X',Y)$ 与 $\mathrm{Ext}^{\ell+1}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ 均为平凡群, 从而 $\mathrm{Ext}^{\ell+1}_{\mathcal{A}}(X'',Y) = 0$, 故 p.dim$X'' \leq \ell$. 如果 p.dim$X'' < \ell$, 则 $\mathrm{Ext}^{\ell}_{\mathcal{A}}(X'',Y) = 0, \forall Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$. 因为 p.dim$X = \ell$, 所以存在某个对象 Y 使得 $\mathrm{Ext}^{\ell}_{\mathcal{A}}(X,Y) \neq 0$, 此时 $\mathrm{Ext}^{\ell}_{\mathcal{A}}(X',Y) = 0$, 这迫使 $\mathrm{Ext}^{\ell}_{\mathcal{A}}(X'',Y) \neq 0$, 矛盾. 所以这时有 p.dim$X'' = \ell$, 这就证明了 (1). □

Proposition 1.122. 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象且余完备的 Abel 范畴. $\{X_i\}_{i\in I} \subseteq \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 是对象集. 那么 p.dim$\oplus_{i\in I} X_i \geq \sup\{$p.dim$X_i | i \in I\}$. 当 I 是有限集或 $\mathcal{A}$ 是模范畴时等号成立.

Proof. 一般地, 如果 $X, X' \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 利用加性函子作用可裂短正合列依然可裂以及对任何 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 有 $\mathrm{Ext}^{i}_{\mathcal{A}}(-,Y)$ 是加性函子得到 $\mathrm{Ext}^{i}_{\mathcal{A}}(X \oplus X', Y) \cong \mathrm{Ext}^{i}_{\mathcal{A}}(X,Y) \oplus \mathrm{Ext}^{i}_{\mathcal{A}}(X',Y), \forall i \in \mathbb{N}$. 由此立即得到

$$\mathrm{p.dim}(X \oplus X') = \max\{\mathrm{p.dim}X, \mathrm{p.dim}X'\}.$$

由此立即得到 p.dim $\oplus_{i\in I} X_i \geq \sup\{$p.dim$X_i | i \in I\}$ 以及当 I 是有限集时该不等式的等号成立. 现在设 $\mathcal{A}$ 是 R-模范畴, 那么考虑 R-模族 $\{X_i\}_{i\in I}$ 的投射分解的直和可得 $\oplus_{i\in I} X_i$ 的投射分解, 进而 p.dim $\oplus_{i\in I} X_i \leq \sup\{$p.dim$X_i | i \in I\}$. 因此模范畴情形有 p.dim $\oplus_{i\in I} X_i = \sup\{$p.dim$X_i | i \in I\}$. □

如果 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的 Abel 范畴, 那么对每个对象 X, 可用所有内射分解长度的下确界定义 X 的内射维数, 记作 inj.dim$X$. 零对象的内射维数是 $-\infty$, 非零对象的内射维数不是自然数就是 $+\infty$. 非零对象的内射维数是零当且仅当该对象是内射的. 与 [命题1.119] 对偶地, 容易证明

Proposition 1.123. 设 $\mathcal{A}$ 有足够多内射对象, $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 且 n 是自然数. 那么以下等价:
(1) inj.dim$X \leq n$;
(2) 对任何 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 有 $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{A}}(Y,X) = 0$;
(3) 如果 $0 \longrightarrow X \longrightarrow D^0 \longrightarrow D^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow D^{n-1} \longrightarrow D^n \longrightarrow 0$ 是正合列并且 $D^0, D^1, ..., D^{n-1}$ 是内射对象, 那么 D^n 也内射.

Remark 1.124. 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的 Abel 范畴, 那么

$$\mathrm{inj.dim}X = \sup\{n \in \mathbb{N} | 存在 Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A} 使得 \mathrm{Ext}^{n}_{\mathcal{A}}(Y,X) \neq 0\}.$$

类似投射情形, 这时对任何 $X, X' \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 有 $\mathrm{inj.dim}X \oplus X' = \max\{\mathrm{inj.dim}X, \mathrm{inj.dim}X'\}$. 于是当 $\mathcal{A}$ 余完备时, 对任何对象集 $\{X_i\}_{i\in I} \subseteq \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 有 $\mathrm{inj.dim} \oplus_{i\in I} X_i \geq \sup\{\mathrm{inj.dim}X_i | i \in I\}$.

如果 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴, 将 $\mathcal{A}$ 中所有对象的投射维数在 $\overline{\mathbb{Z}}$ 中的上确界称为 $\mathcal{A}$ 的**整体维数**. 当 $\mathcal{A}$ 有足够多内射对象时, 将 $\mathcal{A}$ 中所有对象的内射维数在 $\overline{\mathbb{Z}}$ 中的上确界称为 $\mathcal{A}$ 的**整体维数**. 从 [命题1.119] 和 [命题1.123] 易知既有足够多投射对象又有足够多内射对象的 Abel 范畴整体维数的两种定义一致. 将 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的整体维数记作 $\mathrm{gl.dim}\mathcal{A}$. 对含幺环 R, $\mathrm{gl.dim}R$-**Mod** 就是 R 的**左整体维数**.

1.6 拉回和推出

本节我们固定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, 回顾 Abel 范畴中拉回和推出的构造以及基本性质.

Definition 1.125 (拉回, [Ste75]). 设 $f : X \to Z$ 和 $g : Y \to Z$ 是 $\mathcal{A}$ 中态射. 称对象 $P \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 态射 $\pi_1 : P \to X$ 和 $\pi_2 : P \to Y$ 构成的三元组 $(P; \pi_1, \pi_2)$ 为 f 和 g 的**拉回**, 如果 $f\pi_1 = g\pi_2$ 并且任何 $\mathcal{A}$ 中对象 W 和态射 $p_1 : W \to X, p_2 : W \to Y$ 只要满足 $fh_1 = gh_2$, 那么存在唯一的态射 $h : W \to P$ 使得 $\pi_1 h = h_1$ 且 $\pi_2 h = h_2$.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, bend left, "h_2"] \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}$$

Remark 1.126. 如果 $(P; \pi_1, \pi_2)$ 是 f 和 g 的拉回, 那么 $(P; \pi_2, \pi_1)$ 是 g 和 f 的拉回; $(P, -\pi_1, \pi_2)$ 是 $-f$ 和 g 的拉回也是 f 和 $-g$ 的拉回; $(P; \pi_1, -\pi_2)$ 是 $-f$ 和 g 的拉回也是 f 和 $-g$ 的拉回.

Definition 1.127 (推出, [Ste75]). 设 $f : X \to Y$ 和 $g : X \to Z$ 是 $\mathcal{A}$ 中态射. 称对象 $P \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 态射 $\iota_1 : Y \to P$ 和 $\iota_2 : Z \to P$ 构成的三元组 $(P; \iota_1, \iota_2)$ 为 f 和 g 的**推出**, 如果 $\iota_1 f = \iota_2 g$ 并且任何 $\mathcal{A}$ 中对象 W 和态射 $\alpha_1 : Y \to W, \alpha_2 : Z \to W$ 只要满足 $\alpha_1 f = \alpha_2 g$, 那么存在唯一的态射 $\alpha : P \to W$ 使得 $\alpha\iota_1 = \alpha_1$ 且 $\alpha\iota_2 = \alpha_2$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "\iota_2"] \arrow[ddr, bend left, "\alpha_2"] & \\
Y \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[drr, bend right, "\alpha_1"'] & P \arrow[dr, dashed, "\alpha"] & \\
& & W
\end{tikzcd}$$

Remark 1.128. 如果 $(P; \iota_1, \iota_2)$ 是 f 和 g 的推出, 那么 $(P; \iota_2, \iota_1)$ 是 g 和 f 的推出; $(P; -\iota_1, \iota_2)$ 是 $-f$ 和 g 的推出也是 f 和 $-g$ 的推出; $(P, \iota_1; -\iota_2)$ 是 $-f$ 和 g 的推出也是 f 和 $-g$ 的推出.

首先说明拉回的存在性. 设 $f : X \to Z$ 和 $g : Y \to Z$ 是 $\mathcal{A}$ 中态射, 下证 f 和 g 的拉回存在. 根据 (AC4), 现在有积对象 $X \times Y$, 并设 $p_1 : X \times Y \to X$ 和 $p_2 : X \times Y \to Y$ 是标准映射, 则有态射 $fp_1 - gp_2 : X \times Y \to Z$. 命 $P = \mathrm{Ker}(fp_1 - gp_2)$, 并设 $k : P \to X \times Y$ 是标准 monic 态. 命 $\pi_1 = p_1 k$ 以及 $\pi_2 = p_2 k$. 那么由 $(fp_1 - gp_2)k = 0$

得到 $f\pi_1 = g\pi_2$. 现在任给 $\mathcal{A}$ 中对象 W 和态射 $p_1 : W \to X, p_2 : W \to Y$ 要求满足 $fh_1 = gh_2$.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "\pi_2"] \arrow[dd, "\pi_1"'] \arrow[dr, "k"] & & Y \arrow[dd, "g"] \\
& X \times Y \arrow[ur, "p_2"'] \arrow[dl, "p_1"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Z
\end{tikzcd}$$

根据积的泛性质, 存在唯一的态射 $h' : W \to X \times Y$ 使得 $p_1h' = h_1, p_2h' = h_2$, 于是利用 $fh_1 = gh_2$ 得到 $(fp_1 - gp_2)h' = 0$, 根据核的定义, 存在唯一的态射 $h : W \to P$ 使得 $kh = h'$. 进而也有 $h_1 = \pi_1 h$ 和 $h_2 = \pi_2 h$. 如果还有态射 $\overline{h} : W \to P$ 也满足 $h_1 = \pi_1\overline{h}$ 以及 $h_2 = \pi_2\overline{h}$, 那么利用积的定义得到 $k\overline{h} = kh$, 结合 k 是 monic 态得到 $\overline{h} = h$. 因此上面构造的 $(P; \pi_1, \pi_2)$ 是 f 和 g 的拉回. 事实上, 我们证明了更强的存在性.

Proposition 1.129 ([Ste75])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, 只要 $\mathcal{A}$ 中任何态射存在核, 那么任何两个态射的拉回存在.

Remark 1.130. 根据拉回的泛性质定义, 只要得到存在性, 立即看到在同构意义下唯一.

对偶地, 我们处理推出的存在性. 固定 $\mathcal{A}$ 中态射 $f : X \to Y$ 和 $g : X \to Z$. 考虑 Y 和 Z 的余积 $Y \oplus Z$, 并设标准映射 $i_1 : Y \to Y \oplus Z$ 以及 $i_2 : Z \to Y \oplus Z$. 命 $P = \mathrm{Coker}(i_1 f - i_2 g)$, 并记 $c : Y \oplus Z \to P$ 是余核态射. 命 $\iota_1 = ci_1$ 以及 $\iota_2 = ci_2$. 于是 $c(i_1 f - i_2 g) = 0$ 说明 $\iota_1 f = \iota_2 g$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "g"] \arrow[dd, "f"'] & & Z \arrow[dl, "i_2"'] \arrow[dd, "\iota_2"] \\
& Y \oplus Z \arrow[dr, "c"] & \\
Y \arrow[ur, "i_1"] \arrow[rr, "\iota_1"] & & P
\end{tikzcd}$$

现在任给 $\mathcal{A}$ 中对象 W 和态射 $\alpha_1 : Y \to W, \alpha_2 : Z \to W$ 要求满足 $\alpha_1 f = \alpha_2 g$, 我们说明存在唯一的态射 $\alpha : P \to W$ 满足 $\alpha\iota_1 = \alpha_1$ 且 $\alpha\iota_2 = \alpha_2$. 现在由余积的定义, 存在唯一的态射 $\alpha' : Y \oplus Z \to P$ 使得 $\alpha' i_1 = \alpha_1$ 以及 $\alpha' i_2 = \alpha_2$. 进而由 $\alpha_1 f - \alpha_2 g = 0$ 得到 $\alpha'(i_1 f - i_2 g) = 0$. 于是根据余核的定义, 存在唯一的态射 $\alpha : P \to W$ 使得 $\alpha c = \alpha'$. 于是 $\alpha\iota_1 = \alpha_1, \alpha\iota_2 = \alpha_2$. 再说明满足该性质的态射 α 是唯一的. 如果还有态射 $\overline{\alpha} : P \to W$ 满足 $\overline{\alpha}\iota_1 = \alpha_1$ 以及 $\overline{\alpha}\iota_2 = \alpha_2$, 那么根据余积的定义知 $\overline{\alpha}c = \alpha c$, 进而由 c 是 epic 态便知 $\alpha = \overline{\alpha}$. 我们证明了

Proposition 1.131 ([Ste75])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, 只要 $\mathcal{A}$ 中任何态射存在余核, 那么任何两个态射的推出存在.

特别地, [命题1.129] 和 [命题1.131] 说明 Abel 范畴中任意两个态射的拉回和推出都存在. 并且容易看出

Example 1.132 (积视作拉回, [Ste75])**.** 设 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中有对象 X_1, X_2, 则有积 $(X_1 \times X_2; p_1, p_2)$. 那么

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times X_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X_2 \arrow[d] \\
X_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

给出零态 $X_1 \to 0$ 和 $X_2 \to 0$ 的拉回.

Example 1.133 (余积视作推出, [Ste75]). 设 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中有对象 X_1, X_2, 有余积 $(X_1 \oplus X_2; i_1, i_2)$, 那么

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & X_2 \arrow[d, "i_2"] \\ X_1 \arrow[r, "i_1"] & X_1 \oplus X_2 \end{tikzcd}$$

给出零态 $0 \to X_1$ 和 $0 \to X_2$ 的推出.

Example 1.134 (模范畴中的拉回和推出, [Ste75]). 设 R 是含幺环, 考虑模范畴 R-**Mod** 中的模同态 $f: X \to Z$ 和 $g: Y \to Z$. 根据 [命题1.129] 的证明过程, 取 $P = \{(x, y) \in X \times Y | f(x) = g(y)\}$ 以及标准投射 $\pi_1 : P \to X, (x, y) \mapsto x$ 以及 $\pi_2 : P \to Y, (x, y) \mapsto y$, 那么 $(P; \pi_1, \pi_2)$ 是 f 和 g 的拉回. 再设有模同态 $s : X \to Y$ 和 $t : X \to Z$, 命 $P = Y \oplus Z/\{(s(x), -t(x))|x \in X\}$ 以及标准映射 $\iota_1 : Y \to P, y \mapsto \overline{(y, 0)}$ 以及 $\iota_2 : Z \to P, z \mapsto \overline{(0, z)}$, 那么 $(P; s, t)$ 就是同态 s 和 t 的推出.

Remark 1.135. 特别地, 如果 R 是 Noether 环, $f: X \to Z$ 和 $g: Y \to Z$ 都是有限生成 R-模间的模同态, 那么 f 和 g 的拉回依然是有限生成模. 同理, Noether 环上有限生成模间两个模同态如果有相同始对象, 推出对象也是有限生成模.

下面我们说明 Abel 范畴中, 拉回方块的平行态射具有同构的核, 特别地, 平行的态射同时是 monic 态.

Proposition 1.136 ([Ste75]). 设 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中态射 $f: X \to Z$ 和 $g: Y \to Z$ 有拉回 $(P; \pi_1, \pi_2)$, 则有

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

(1) 态射 f 是 monic 态的充要条件是 π_2 是 monic 态; g 是 monic 态的充要条件是 π_1 是 monic 态.
(2) 如果 f 是 epic 态, 那么 π_2 也是 epic 态; 如果 g 是 epic 态, 那么 π_1 也是 epic 态.
(3) 如果 f 是态射 $h: Z \to W$ 的核, 那么 π_2 是 hg 的核; 如果 g 是 $h: Z \to W$ 的核, 那么 π_1 是 hf 的核.
(4) 设 f 有核 $k_1 : \mathrm{Ker} f \to Z$, π_2 有核 $k_2 : \mathrm{Ker}\pi_2 \to P$, 则由 $f\pi_1 k_2 = 0$ 得到存在唯一的态射 $h : \mathrm{Ker}\pi_2 \to \mathrm{Ker} f$ 使得 $k_1 h = \pi_1 k_2$. 那么 h 是同构. 类似地, 也有 $\mathrm{Ker} g \cong \mathrm{Ker}\pi_1$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\pi_2 \arrow[r, "k_2"] \arrow[d, dashed, "h"] & P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ \mathrm{Ker} f \arrow[r, "k_1"] & X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

Proof. (1) 根据 [注记1.126], 只需验证 f 是 monic 态的充要条件是 π_2 是 monic 态. 设 f 是 monic 态, 要证 π_2 是 monic 态. 现在设态射 $h: W \to P$ 满足 $\pi_2 h = 0$, 下证 $h = 0$. 事实上, 由 $\pi_2 h = 0$ 得到 $f\pi_1 h = 0$, 结合 f 是 monic 态得到 $\pi_1 h = 0$. 现在 $\pi_1 h = 0$ 以及 $\pi_2 h = 0$, 所以利用拉回的泛性质得到 $h = 0$. 现在设 π_2 是 monic 态, 需要证明 f 是 monic 态. 设态射 $\alpha : W \to X$ 满足 $f\alpha = 0$, 再考虑 $0 : W \to Y$, 那么根据拉回的定义, 存在唯一的态射 $\beta : W \to P$ 使得 $\pi_2\beta = 0$ 以及 $\pi_1\beta = \alpha$. 现在 π_2 是 monic 态说明 $\beta = 0$, 于是 $\alpha = 0$.

(2) 根据 [注记1.126], 只需验证 f 是 epic 态蕴含 π_2 是 epic 态. 现在设 $h: Y \to W$ 满足 $h\pi_2 = 0$, 需要证明 $h = 0$. 设 $i_1 : X \to X \times Y$ 是标准映射, 那么 $(fp_1 - gp_2)i_1 = f$ 以及 f 是 epic 态得到 $fp_1 - gp_2$ 也是 epic 态.

进而有短正合列

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{k} X \times Y \xrightarrow{fp_1 - gp_2} Z \longrightarrow 0 \square$$

因为 $h\pi_2 = hp_2 k = 0$, 所以存在唯一的态射 $\eta : Z \to W$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \arrow[r, "k"] & X \times Y \arrow[r, "fp_1 - gp_2"] \arrow[d, "hp_2"] & Z \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\eta"] & 0 \\
& & W & &
\end{tikzcd}$$

进而 $hp_2 = \eta(fp_1 - gp_2)$, 两边右乘 i_1 得到 $\eta f = 0$. 现在 f 是 epic 态说明 $\eta = 0$, 进而 $hp_2 = 0$, 故 $h = 0$.

(3) 同样只需验证如果 f 是态射 $h : Z \to W$ 的核, 那么 π_2 是 hg 的核. 根据 (1) 知当 f 是 monic 态时也有 π_2 是 monic 态. 易见 $hg\pi_2 = 0$. 如果有态射 $\alpha : H \to Y$ 满足 $hg\alpha = 0$. 那么由 f 是 h 的核得到存在态射 $\beta : H \to X$ 使得 $f\beta = g\alpha$. 于是对 α 和 β 应用拉回的定义, 存在唯一的态射 $\gamma : H \to P$ 使得 $\pi_2\gamma = \alpha, \pi_1\gamma = \beta$. 于是 $\pi_2\gamma = \alpha$ 表明 π_2 是 hg 的核.

(4) 因为 $fk_1 = 0$, 所以利用拉回的定义可得态射 $\alpha : \mathrm{Ker}f \to P$ 使得 $\pi_1\alpha = k_1$ 以及 $\pi_2\alpha = 0$. 于是也有态射 $h' : \mathrm{Ker}f \to \mathrm{Ker}\pi_2$ 使得 $\alpha = k_2 h'$. 特别地, $k_1 = \pi_1 k_2 h'$, 所以 h' 是 monic 态. 注意到 $h'h : \mathrm{Ker}\pi_2 \to \mathrm{Ker}\pi_2$ 满足 $\pi_1 k_2 h' h = k_1 h = \pi_1 k_2$ 以及 $\pi_2 k_2 = \pi_2 k_2 h' h = 0$, 所以由拉回的定义得到 $k_2 h' h = k_2$, 于是利用 k_2 是 monic 态可知 $h'h = 1$, 这说明 h' 也是 epic 态, 于是 h' 是同构, 这也说明 h 是同构. $\square$

Remark 1.137. 这里指出 π_2 是 epic 态无法得到 f 是 epic 态, 例如考虑 $\mathbb{Z}$-**Mod** 中下图:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[d, "0"] \\
0 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

易验证这是拉回方块, 上行是满射但下行并不是满射. 并且上行的余核与下行的余核不同构, 见 [推论1.144].

Proposition 1.138 ([Ste75]). 设 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中态射 $f : X \to Y$ 和 $g : X \to Z$ 有推出 $(P; \iota_1, \iota_2)$, 则有

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "\iota_2"] \\
Y \arrow[r, "\iota_1"] & P
\end{tikzcd}$$

(1) 态射 f 是 epic 态的充要条件是 ι_2 是 epic 态; g 是 epic 态的充要条件是 ι_1 是 epic 态.
(2) 如果 f 是 monic 态, 那么 ι_2 也是 monic 态; 如果 g 是 monic 态, 那么 ι_1 也是 monic 态.
(3) 如果 f 是态射 $h : W \to X$ 的余核, 那么 ι_2 是 gh 的余核; 如果 g 是 $h : W \to X$ 的核, 那么 ι_1 是 fh 的余核.
(4) 设 ι_1 有余核 $c_1 : P \to \mathrm{Coker}\iota_1$ 以及 g 有余核 $c_2 : Z \to \mathrm{Coker}g$, 那么由 $c_1\iota_2 g = 0$ 得到存在唯一的态射 $h : \mathrm{Coker}g \to \mathrm{Coker}\iota_1$ 使得 $c_1\iota_2 = hc_2$. 那么 h 是同构. 类似地, 也有 $\mathrm{Coker}f \cong \mathrm{Coker}\iota_2$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "c_2"] \arrow[d, "\iota_2"] & \mathrm{Coker}g \arrow[d, dashed, "h"] \\
Y \arrow[r, "\iota_1"] & P \arrow[r, "c_1"] & \mathrm{Coker}\iota_1
\end{tikzcd}$$

Proof. (1) 根据对称性, 只证 f 是 epic 态的充要条件是 ι_2 是 epic 态. 现在设 f 是 epic 态, 并设有态射 $h: P \to W$ 满足 $h\iota_2 = 0$. 取 $h_1 = h\iota_1$ 以及 $h_2 = h\iota_2$, 那么 $h_1 f = 0, h_2 g = 0$. 进而存在唯一的态射 h' 使得 $h'\iota_2 = h_2$ 以及 $h'\iota_1 = h_1$, 进而 $h = h'$. 对零态 $P \to W$ 利用推出的泛性质得到 $h = 0$. 现在设 ι_2 是 epic 态, 并设有态射 $t: Y \to T$ 满足 $tf = 0$, 下证 $t = 0$. 考虑零态 $0: Z \to Y$, 结合 $tf = 0$, 由推出的泛性质得到存在唯一的态射 $h: P \to T$ 使得 $h\iota_1 = t$ 且 $h\iota_2 = 0$. 应用 ι_2 是 epic 态得到 $h = 0$, 所以 $t = 0$.

(2) 根据对称性, 只验证 f 是 monic 态蕴含 ι_2 是 monic 态. 这时由 $p_1(i_1 f - i_2 g) = f$ 得到 $i_1 f - i_2 g$ 是 monic 态, 所以有短正合列 $0 \longrightarrow X \xrightarrow{i_1 f - i_2 g} Y \oplus Z \xrightarrow{c} P \longrightarrow 0$. 回忆 $\iota_2 = ci_2$, 所以这时任何满足 $\iota_2 h = 0$ 的态射 $h: H \to Z$ 满足 $ci_2 h = 0$. 于是存在唯一的态射 $h': H \to X$ 使得 $(i_1 f - i_2 g)h' = i_2 h$. 两边左乘 p_1 得到 $fh' = 0$. 而 f 是 monic 态, 因此 $h' = 0$, 于是 $i_2 h = 0$, 这导出 $h = 0$. 这说明 ι_2 是 monic 态.

(3) 设 f 是态射 $h: W \to X$ 的余核. 现在 (1) 说明 ι_2 也是 epic 态, 并且易见 $\iota_2 gh = 0$. 任取态射 $t: Z \to T$ 满足 $tgh = 0$, 那么存在唯一的态射 $\alpha_1: Y \to T$ 使得 $\alpha_1 f = tg$. 取 $\alpha_2 = t$, 则根据推出的定义存在唯一的态射 $\alpha: P \to T$ 使得 $\alpha\iota_1 = \alpha_1$ 以及 $\alpha\iota_2 = \alpha_2$. 进而有 $\alpha\iota_2 = t$, 这说明 ι_2 是态射 gh 的余核.

(4) 注意到 $c_2 g = 0$, 由推出的定义, 有唯一的态射 $t: P \to \mathrm{Coker} g$ 满足 $c_2 = t\iota_2$ 并且 $tc_1 = 0$. 于是存在唯一的态射 $h': \mathrm{Coker}\iota_1 \to \mathrm{Coker} g$ 使得 $t = h'c_1$. 进而 $h'c_1\iota_2 = t\iota_2 = c_2$ 是 epic 态, 这说明 h' 也是 epic 态. 最后证明 h' 是 monic 态来得到 h 是同构. 注意到 $hh'c_1\iota_2 = h(t\iota_2) = hc_2$ 以及 $hh'c_1\iota_1 = 0$, 所以根据推出的定义, 有 $hh'c_1 = c_1$. 现在利用 c_1 是 epic 态得到 $hh' = 1$, 这说明 h' 是 monic 态, 进而 h' 是同构. 故 h 也是同构. □

Remark 1.139. 这里指出 ι_1 是 monic 态无法得到 g 是 monic 态. 例如考虑 $\mathbb{Z}$-**Mod** 中下图:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] \arrow[d] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[d, "1"] \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

容易验证这是推出方块, 下行是单射但上行不是单射. 并且上行的核与下行的核不同构, 见 [推论1.145].

下面我们介绍 Abel 范畴中拉回关于具体态射序列正合性的刻画, 它为证明态射方块是拉回提供便利.

Proposition 1.140 ([Zha15]). 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 并固定 $\mathcal{A}$ 中下图, 并记 $i_1: X \to X \oplus Y, i_2: Y \to X \oplus Y$ 以及 $p_1: X \oplus Y \to X, p_2: X \oplus Y \to Y$ 是对象 X, Y 的余积和积的标准态射:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

那么上图是 f 和 g 的拉回当且仅当态射序列 $0 \longrightarrow P \xrightarrow{i_1\pi_1 + i_2\pi_2} X \oplus Y \xrightarrow{fp_1 - gp_2} Z$ 正合.

Proof. 如果固定的图是拉回, 那么根据拉回的构造, 如果取 $P' = \mathrm{Ker}(fp_1 - gp_2)$ 并设 $k: P' \to X \oplus Y$ 是标准态

射, 那么 P' 以及态射 p_1k, p_2l 给出 f 和 g 的拉回. 于是存在唯一的态射 $u : P \to P'$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rrr, "\pi_2"] \arrow[ddd, "\pi_1"'] \arrow[dr, dashed, "u"] & & & Y \arrow[ddd, "g"] \\
& P' \arrow[urr, "p_2k"] \arrow[dr, "k"] \arrow[ddl, "p_1k"'] & & \\
& & X \oplus Y \arrow[uur, "p_2"'] \arrow[dll, "p_1"'] & \\
X \arrow[rrr, "f"] & & & Z
\end{tikzcd}$$

因为 $(P; \pi_1, \pi_2)$ 是 f 和 g 的拉回, 所以这里的 u 是同构, 而根据上图的交换性知 $ku = \pi_1 i_1 + \pi_2 i_2$. 从 u 是同构易知 ku 是 monic 态并且 ku 也是 $fp_1 - gp_2$ 的核. 于是 $0 \longrightarrow P \xrightarrow{i_1\pi_1 + i_2\pi_2} X \oplus Y \xrightarrow{fp_1 - gp_2} Z$ 正合.

反之, 如果有正合列 $0 \longrightarrow P \xrightarrow{i_1\pi_1 + i_2\pi_2} X \oplus Y \xrightarrow{fp_1 - gp_2} Z$, 那么 $(fp_1 - gp_2)(i_1\pi_1 + i_2\pi_2) = 0$ 得到 $f\pi_1 = g\pi_2$. 下面证明 $(P; \pi_1, \pi_2)$ 是 f 和 g 的拉回. 如果有态射 $\alpha_1 : W \to X$ 和 $\alpha_2 : W \to Y$ 满足 $f\alpha_1 = g\alpha_2$. 那么明显有 $(fp_1 - gp_2)(i_1\alpha_1 + i_2\alpha_2) = 0$, 于是存在唯一的态射 $\alpha : W \to P$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \arrow[r, "i_1\pi_1 + i_2\pi_2"] & X \oplus Y \arrow[r, "fp_1 - gp_2"] & Z \\
& & W \arrow[ul, dashed, "\alpha"] \arrow[u, "i_1\alpha_1 + i_2\alpha_2"'] &
\end{tikzcd}$$

从态射的矩阵记号, 回忆 [记号1.3] 容易知道 $\pi_1\alpha = \alpha_1, \pi_2\alpha = \alpha_2$. □

Remark 1.141. 从 [注记1.126] 可知 [命题1.140] 中态射序列的负号位置无关紧要, 即易见态射序列

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{i_1\pi_1 + i_2\pi_2} X \oplus Y \xrightarrow{fp_1 - gp_2} Z, \quad 0 \longrightarrow P \xrightarrow{i_1\pi_1 + i_2\pi_2} X \oplus Y \xrightarrow{-fp_1 + gp_2} Z,$$

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{i_1\pi_1 - i_2\pi_2} X \oplus Y \xrightarrow{fp_1 + gp_2} Z, \quad 0 \longrightarrow P \xrightarrow{-i_1\pi_1 + i_2\pi_2} X \oplus Y \xrightarrow{fp_1 + gp_2} Z$$

的正合性都是等价的.

类似地, 对 Abel 范畴中的推出我们也能够用具体态射序列的正合性刻画.

Proposition 1.142 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 固定 $\mathcal{A}$ 中下图, 并记 $i_1 : Y \to Y \oplus Z, i_2 : Z \to Y \oplus Z$ 以及 $p_1 : Y \oplus Z \to Y$ 和 $p_2 : Y \oplus Z \to Z$ 是标准态射:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "\iota_2"] \\
Y \arrow[r, "\iota_1"] & P
\end{tikzcd}$$

那么上图是 f 和 g 的推出的充要条件是态射序列 $X \xrightarrow{i_1 f - i_2 g} Y \oplus Z \xrightarrow{\iota_1 p_1 + \iota_2 p_2} P \longrightarrow 0$ 正合.

Proof. 这里的证明与 [命题1.140] 完全是对偶的, 所以这里省略些验证细节. 如果给定图是推出, 那么明显 $i_1 f - i_2 g$ 和 $\iota_1 p_1 + \iota_2 p_2$ 的合成是零, 只需证 $\iota_1 p_1 + \iota_2 p_2$ 是 $i_1 f - i_2 g$ 的余核. 而根据推出对象的构造, $i_1 f - i_2 g$ 的余核

对象 P', 并且如果记 $c: Y\oplus Z\to P'$ 是标准态射, 那么 P' 和 ci_1, ci_2 给出 f 和 g 的推出. 于是存在唯一的态射 $v: P'\to P$ 使得 $\iota_1 = vci_1$ 以及 $\iota_2 = vci_2$. 由 $(P;\iota_1,\iota_2)$ 是推出得到 v 是同构. 并注意到 $vc=\iota_1p_1+\iota_2p_2$, 所以 $\iota_1p_1+\iota_2p_2$ 也是 i_1f-i_2g 的余核. 反之, 如果态射序列

$$X \xrightarrow{i_1f-i_2g} Y\oplus Z \xrightarrow{\iota_1p_1+\iota_2p_2} P \longrightarrow 0$$

正合, 那么 $\iota_1f-\iota_2g=0$. 如果有态射 $\alpha_1: Y\to W$ 和 $\alpha_2: Z\to W$ 满足 $f\alpha_1=g\alpha_2$, 那么态射 $h=\alpha_1p_1+\alpha_2p_2$ 满足 $h(i_1f-i_2g)=0$. 因此存在唯一的态射 $\alpha: P\to W$ 满足 $\alpha(\iota_1p_1+\iota_2p_2)=h$. 于是 $\alpha_1=\alpha\iota_1$ 并且 $\alpha_2=\alpha\iota_2$. 如果还有态射 $\alpha': P\to W$ 满足 $\alpha_1=\alpha'\iota_1$ 和 $\alpha_2=\alpha'\iota_2$. 那么 $\alpha'(\iota_1p_1+\iota_2p_2)=h$, 这说明 $\alpha=\alpha'$. □

Remark 1.143. 与拉回情形一致, [注记1.141] 中指出的态射序列中负号位置无关紧要也在推出情形成立.

Corollary 1.144 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 并设态射 $f: X\to Z$ 和 $g: Y\to Z$ 有拉回 $(P;\pi_1,\pi_2)$. 那么存在唯一的标准态射 $g': \mathrm{Coker}\pi_2\to\mathrm{Coker}f$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[r, "c_2"] \arrow[d, "g"] & \mathrm{Coker}\pi_2 \arrow[d, dashed, "g'"] \\
X \arrow[r, "f"] & Z \arrow[r, "c_1"] & \mathrm{Coker}f
\end{tikzcd}$$

那么 g' 是 monic 态. 类似地, 态射 f 诱导的 $\mathrm{Coker}\pi_1$ 到 $\mathrm{Coker}g$ 的标准态射也是 monic 态.

Proof. 命 $C=\mathrm{Coker}(i_1\pi_1+i_2\pi_2)$, 那么余核态射 $c: X\oplus Y\to C$ 可设为由 $\overline{f}: X\to C$ 和 $-\overline{g}: Y\to C$ 诱导的, 即 $c=\overline{f}p_1-\overline{g}p_2$. 在此记号下, 有正合列

$$P \xrightarrow{i_1\pi_1+i_2\pi_2} X\oplus Y \xrightarrow{\overline{f}p_1-\overline{g}p_2} C \longrightarrow 0.$$

应用 [命题1.142](以及 [注记1.143]) 立即得到下图是推出方块:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[d, "\overline{g}"] \\
X \arrow[r, "\overline{f}"] & C
\end{tikzcd}$$

所以从 [命题1.138(4)] 知下图中余核间的标准态射 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$ 都是同构:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[r, "c_2"] \arrow[d, "\overline{g}"] & \mathrm{Coker}\pi_2 \arrow[d, dashed, "\tilde{g}"] \\
X \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "c_1"'] & C \arrow[r, "c_3"] \arrow[d, "c_4"] & \mathrm{Coker}\overline{f} \\
\mathrm{Coker}\pi_1 \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] & \mathrm{Coker}\overline{g} &
\end{tikzcd}$$

利用 [命题1.140] 得到正合列 $0 \longrightarrow P \xrightarrow{i_1\pi_1+i_2\pi_2} X\oplus Y \xrightarrow{fp_1-gp_2} Z$. 现在存在唯一的态射 $t: C\to Z$ 使得

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[r, "i_1\pi_1+i_2\pi_2"] \arrow[d, "1"'] & X\oplus Y \arrow[r, "\overline{f}p_1-\overline{g}p_2"] \arrow[d, "1"'] & C \arrow[r] \arrow[d, dashed, "t"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r, "i_1\pi_1+i_2\pi_2"] & X\oplus Y \arrow[r, "fp_1-gp_2"] & Z &
\end{tikzcd}$$

交换. 应用蛇形引理 (见 [推论1.46]) 立即得到 $\mathrm{Ker}t = 0$, 即 t 是 monic 态 (回忆 [注记1.7]). 于是有唯一的态射 $\bar{t} : \mathrm{Coker}\overline{f} \to \mathrm{Coker}f$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "1"'] & C \arrow[r, "c_3"] \arrow[d, "t"] & \mathrm{Coker}\overline{f} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\bar{t}"] & 0 \\
X \arrow[r, "f"] & Z \arrow[r, "c_1"] & \mathrm{Coker}f \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

应用五引理, 见 [推论1.45(1)], 得到 $\bar{t}$ 是 monic 态. 特别地, $\bar{t}\tilde{g} : \mathrm{Coker}\pi_2 \to \mathrm{Coker}f$ 也是 monic 态. 下证 $g' = \bar{t}\tilde{g}$ 来得到 g' 是 monic 态. 为此只需说明 $\bar{t}\tilde{g}c_2 = c_1 g$. 这由 $\tilde{g}c_2 = c_3\overline{g}$ 以及 $t\overline{g} = g$ 容易看到. □

对偶地, 推出方块中平行态射的核间的标准映射都是 epic 态, 其证明与 [推论1.144] 完全对偶, 记录为

Corollary 1.145 ([Zha15]). 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 并设态射 $f : X \to Y$ 和 $g : X \to Z$ 有推出 $(P; \iota_1, \iota_2)$. 那么存在唯一的态射 $f' : \mathrm{Ker}g \to \mathrm{Ker}\iota_1$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}g \arrow[r, "k_2"] \arrow[d, dashed, "f'"'] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "\iota_2"] \\
\mathrm{Ker}\iota_1 \arrow[r, "k_1"] & Y \arrow[r, "\iota_1"] & P
\end{tikzcd}$$

那么 f' 是 epic 态. 类似地, $\mathrm{Ker}f$ 到 $\mathrm{Ker}\iota_2$ 的标准态射也是 epic 态.

Example 1.146 ([Ste75]). 设 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中有下述交换图, 其中上下两行正合:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

我们说明左边的方块既是推出方块也是拉回方块, 即 $(X; \alpha, f)$ 是 f' 和 β 的拉回, 并且 $(Y'; f', \beta)$ 是态射 α 和 f 的推出. 事实上, 根据 [推论1.144] 和 [推论1.145], 只需证明下述态射序列正合:

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{i_1\alpha + i_2 f} X' \oplus Y \xrightarrow{f'p_1 - \beta p_2} Y' \longrightarrow 0.$$

由 f 是 monic 态知 $i_1\alpha + i_2 f$ 也是 monic 态, 下证 $f'p_1 - \beta p_2$ 是 epic 态. 为此只需证明如果态射 $\gamma : Y' \to H$ 满足 $\gamma f' = 0, \gamma\beta = 0$, 那么 $\gamma = 0$. 首先由 $\gamma f' = 0$, 存在唯一的态射 $\overline{\gamma} : Z \to H$ 使得 $\overline{\gamma} g' = \gamma$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\gamma"] & Z \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\overline{\gamma}"] & 0 \\
 & & H & &
\end{tikzcd}$$

于是由 $\gamma g'\beta = 0$ 得到 $\overline{\gamma} g = 0$, 所以由 g 是 epic 态可知 $\overline{\gamma} = 0$, 因此 $\gamma = 0$, 这说明 $f'p_1 - \beta p_2$ 是 epic 态. 故只要再验证 $i_1\alpha + i_2 f$ 是 $f'p_1 - \beta p_2$ 的核, 由 [命题1.23] 便知 $0 \longrightarrow X \xrightarrow{i_1\alpha + i_2 f} X' \oplus Y \xrightarrow{f'p_1 - \beta p_2} Y' \longrightarrow 0$ 正合.

如果有态射 $h:W\to X'\oplus Y$ 满足 $(f'p_1-\beta p_2)h=0$, 那么可设 $h=i_1h_1+i_2h_2$, 这里 $h_1:W\to X'$ 和 $h_2:W\to Y$ 被 h 唯一决定. 于是 $f'h_1=\beta h_2$. 下证存在态射 $h':W\to X$ 使得 $h=(i_1\alpha+i_2f)h'$ 来得到 $i_1\alpha+i_2f$ 是 $f'p_1-\beta p_2$ 的核. 这时 $g'f'h_1=0$ 说明 $g'\beta h_2=0$, 所以 $gh_2=0$. 进而存在态射 $h':W\to X$ 使得 $fh'=h_2$. 再利用 $f'\alpha h'=\beta fh'=\beta h_2=f'h_1$ 以及 f' 是 monic 态得到 $h_1=\alpha h'$. 所以 $h=(i_1\alpha+i_2f)h'$.

类似地, 如果 $\mathcal{A}$ 中有下述交换图, 其中下述两行正合, 容易证明右边的方块既是拉回又是推出方块:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Remark 1.147. 这里指出 [例1.146] 反之也有相应结论也成立, 即当 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中有下述交换图

$$\begin{array}{ccc}
P & \xrightarrow{\pi_2} & Y\\
{\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g}\\
X & \xrightarrow{f} & Z
\end{array}$$

满足 f 是 monic 态且上图既是推出方块又是拉回方块, 那么存在下述形式的交换图满足上下两行正合:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{\pi_2} & Y & \xrightarrow{c_2} & C & \longrightarrow & 0\\
 & & {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Z & \xrightarrow{c_1} & C & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

首先 [命题1.136(1)] 说明 π_2 也是 monic 态, 命 $c_1:Z\to\mathrm{Coker}f$ 是 f 的余核. 那么根据 [命题1.138(4)] 得到 $\mathrm{Coker}\pi_2$ 到 $\mathrm{Coker}f$ 的标准态射是同构. 因此存在态射 $c_2:Y\to\mathrm{Coker}f$ 使得 c_2 是 π_2 的余核并且 $c_1g=c_2$. 类似地, 设 $\mathcal{A}$ 中下图既是推出方块又是拉回方块并且 g 是 epic 态:

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{g} & Z\\
{\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_2}\\
Y & \xrightarrow{\iota_1} & P
\end{array}$$

那么利用 [命题1.136] 和 [命题1.138] 类似可证存在下述形式的交换图满足上下两行正合:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{k_2} & X & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_2} & & \\
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{k_1} & Y & \xrightarrow{\iota_1} & P & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

1.7 正向/逆向极限

本节主要介绍 Abel 范畴中的正向极限和逆向极限的基本理论. 回忆带有二元关系 $\le$ 的集合 I 被称为**拟序集**, 如果 $(I,\le)$ 满足自反性和传递性. 那么拟序集 $(I,\le)$ 可自然视作一范畴, 以下记作 $\mathcal{I}$. 对任何范畴 $\mathcal{C}$, 称 $\mathcal{I}$ 到 $\mathcal{C}$ 的函子为 $\mathcal{C}$ 上以拟序集 I 为指标集的**正向系**. 下面是正向系之后常用的记号.

Notation 1.148. 设 $F:\mathcal{I}\to\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 上以拟序集 I 为指标集的正向系, 对任何 $i\in I$, 记 $F(i)$ 为 F_i, 并当 $i\le j\in I$ 时, 对应的 $\mathcal{C}$ 中态射如果记作 $\varphi^i_j:F_i\to F_j$, 那么把该正向系记作 $\{F_i,\varphi^i_j\}_I$.

Example 1.149 ([Rot09]). 设 $\mathcal{C}$ 是范畴, 固定 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$. 对拟序集 $(I, \leq)$, 定义 $|X|_i = X, \forall i \in I$ 并且对任何 $i \leq j \in I$, 对应的态射定义为 $1_X : X \to X$. 那么得到函子 $|X| : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, 称该正向系是 X 决定的**常量正向系**.

Example 1.150 ([Rot09]). 设 $I = \{1, 2, 3\}$, 其上拟序由 $1 < 2, 1 < 3$ 自然给出. 那么范畴 $\mathcal{C}$ 上以拟序集 I 为指标集的正向系可由下图描述 (指标 1 对应 X, 2 对应 Y, 3 对应 Z):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ Y & \end{tikzcd}$$

Example 1.151 ([Ste75]). 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, 有对象族 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, 这里 Λ 是非空指标集. 考虑 Λ 所有非空有限子集构成的集合 I, 那么 I 关于包含关系构成拟序集 $(I, \subseteq)$. 通过良序原理对 Λ 赋予良序 $\leq$, 那么 I 的任何有限子集 J 可表示为 $\{j_1, ..., j_n | j_1 < j_2 < \cdots < j_n\}$, 该集合对应有限余积 $X_{j_1} \oplus X_{j_2} \oplus \cdots \oplus X_{j_n}$. 于是 $\{X_{j_1} \oplus X_{j_2} \oplus \cdots \oplus X_{j_n} | j_1 < j_2 < \cdots < j_n \in \Lambda\}$ 可自然产生拟序集 $(I, \subseteq)$ 上的正向系.

Definition 1.152 ([Rot09]). 设 $\{F_i, \varphi_j^i\}_I$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 上以拟序集 I 为指标集的正向系. 称由 $\mathcal{C}$ 中对象 $\varinjlim_I F_i$ 和态射族 $\{\alpha_i : F_i \to \varinjlim_I F_i\}_{i \in I}$ 构成的二元组 $(\varinjlim_I F_i, \{\alpha_i : F_i \to \varinjlim_I F_i\}_{i \in I})$ 为 $\{F_i, \varphi_j^i\}_I$ 的**正向极限**, 若满足:
(1) 对任何 $i \leq j \in I$, $\alpha_i = \alpha_j \varphi_j^i$;
(2) 对任何 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$ 和满足 $f_i = f_j \varphi_j^i, \forall i \leq j \in I$ 的态射族 $\{f_i : F_i \to X\}_{i \in I}$, 存在唯一的态射 $f : \varinjlim_I F_i \to X$ 使得下图对所有指标 $i \in I$ 交换:

$$\begin{tikzcd} \varinjlim_I F_i \arrow[rr, dashed, "f"] & & X \\ & F_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[d, "\varphi_j^i"] & \\ & F_j \arrow[uul, bend left, "\alpha_j"] \arrow[uur, bend right, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

Example 1.153 ([Rot09]). 设 R 是含幺环, M 是左 R-模. 那么 M 所有的有限生成子模关于包含关系构成拟序集, 进而自然给出 R-**Mod** 中的正向系 (每个指标对应自身, 即 M 的某个有限生成子模), 易验证 M 以及 M 每个有限生成子模到 M 的标准嵌入同态给出该正向系的正向极限. 类似地, 如果 A 是域 $\Bbbk$ 上代数, 那么 A 的所有仿射 $\Bbbk$-子代数自然给出 $\Bbbk$-**Alg** 中的正向系, A(带上仿射子代数到 A 的标准嵌入) 就是该正向系的正向极限.

Example 1.154 ([Rot09]). 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 考虑 [例1.150] 中的正向系, 那么该正向系的正向极限明显由图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ Y & \end{tikzcd}$$

的推出给出 (正向极限对象取为推出对象, 图中对象到极限对象的态射也有自然的选取).

现在我们说明满足任何正向系的正向极限存在的 Abel 范畴中存在任意余积.

Proposition 1.155 ([Ste75]). 设 $\mathcal{A}$ 是满足任何正向系的正向极限都存在的 Abel 范畴, 则 $\mathcal{A}$ 余完备 ([注记1.13]).

Proof. 任取 $\mathcal{A}$ 中对象族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 记 I 是 Λ 所有非空有限子集构成的集合, 它关于包含关系构成拟序集. 于是根据 [例1.151] 我们得到 $\mathcal{A}$ 上正向系满足 I 中任何元素 $\{j_1,...,j_n|j_1<j_2<\cdots<j_n\}$ 对应 $\mathcal{A}$ 中对象 $X_{j_1}\oplus X_{j_2}\oplus\cdots\oplus X_{j_n}$, 如果 $J\subseteq J'$ 是 I 中元素, 那么相应的有限直和对象间也有自然的态射. 于是根据正向极限的定义容易验证该正向系的极限对象给出余积对象 $\oplus_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$, 每个 X_α 到正向极限对象的标准态射给出余积定义中的标准态射. $\square$

Proposition 1.156 ([Rot09])**.** 如果 $\mathcal{A}$ 是余完备的 Abel 范畴, 那么 $\mathcal{A}$ 中任何以拟序集为指标集正向系的正向极限存在, 并且在同构意义下唯一.

Proof. 设 $\{F_i,\varphi^i_j\}_I$ 是 $\mathcal{A}$ 中以拟序集 I 为指标集的正向系, 不妨设 $I\neq\varnothing$. 只需证明正向极限的存在性.

对每个指标 $i\in I$, 记 $\lambda_i:F_i\to F=\oplus_{i\in I}F_i$ 是标准态射 (这里由余完备条件保证余积存在). 那么对任何指标 $i\le j\in I$, 有态射 $\lambda_i-\lambda_j\varphi^i_j:F_i\to F$. 因此范畴 $\mathcal{I}$ 中任何态射 $\gamma:i\to j$, 那么对应 $\mathcal{A}$ 中态射 $\lambda_i-\lambda_j\varphi^i_j:F_i\to F$. 记 $\Gamma=\{\gamma:i\to j|i\le j\in I\}$, 并且对任何 $\gamma:i\to j\in\Gamma$, 记 $s(\gamma)=i,t(\gamma)=j$. 于是任何 $\gamma\in\Gamma$ 对应态射 $\lambda_{s(\gamma)}-\lambda_{t(\gamma)}\varphi^i_j:F_{s(\gamma)}\to F$. 由此导出态射

$$\tau:\oplus_{\gamma\in\Gamma}F_{s(\gamma)}\to F,$$

满足对 $\gamma\in\Gamma$ 对应的标准态射 $\iota_\gamma:F_{s(\gamma)}\to\oplus_{\gamma\in\Gamma}F_{s(\gamma)}$ 有 $\tau\iota_\gamma=\lambda_{s(\gamma)}-\lambda_{t(\gamma)}\varphi^{s(\gamma)}_{t(\gamma)},\forall\gamma\in\Gamma$. 考虑 τ 的标准分解

$$\begin{tikzcd}
\oplus_{\gamma\in\Gamma}F_{s(\gamma)} \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\tau'"'] & & F \\
& \mathrm{Im}\tau \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

那么 k 余核也是 τ 的余核, 即有 epic 态 $c:F\to F/\mathrm{Im}\tau$. 进而对任何 $i\le j\in I$ 对应的 $\mathcal{I}$ 中态射 γ 有

$$0=c\tau\iota_\gamma=c\lambda_{s(\gamma)}-c\lambda_{t(\gamma)}\varphi^{s(\gamma)}_{t(\gamma)}=c\lambda_i-c\lambda_j\varphi^i_j.$$

所以如果记 $\alpha_i=c\lambda_i:F_i\to F/\mathrm{Im}\tau$, 则有任何 $i\le j\in I$, $\alpha_i=\alpha_j\varphi^i_j$.

现在设 $X\in\mathrm{ob}\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}$ 中态射族 $\{f_i:F_i\to X\}_{i\in I}$ 满足 $f_i=f_j\varphi^i_j,\forall i\le j\in I$. 那么根据余积的定义存在唯一的态射 $\xi:F\to X$ 使得 $\xi\lambda_i=f_i,\forall i\in I$. 现在 $\xi\tau\iota_\gamma=\xi\lambda_{s(\gamma)}-\xi\lambda_{t(\gamma)}\varphi^{s(\gamma)}_{t(\gamma)}$ 说明对任何 $i\le j\in I$ 对应的态射 $\gamma:i\to j$ 有 $\xi\tau\iota_\gamma=\xi(f_i-f_j\varphi^i_j)=0$, 这说明 $\xi\tau=0$. 于是存在唯一的态射 $f:F/\mathrm{Im}\tau\to X$ 使得

$$\begin{tikzcd}
& F/\mathrm{Im}\tau \arrow[drr, dashed, "f"] & & \\
\oplus_{\gamma\in\Gamma}F_{s(\gamma)} \arrow[r, "\tau"] & F \arrow[u, "c"] \arrow[rr, "\xi"] & & X \\
& & F_i \arrow[ul, "\lambda_i"'] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[d, "\varphi^i_j"] & \\
& & F_j \arrow[uul, bend left, "\lambda_j"] \arrow[uur, bend right, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

对所有 $i\le j\in I$ 交换. 因此 $f\alpha_i=f_i,\forall i\in I$. 如果还有态射 $f':F/\mathrm{Im}\tau\to X$ 满足 $f'\alpha_i=f_i,\forall i\in I$, 那么对所有指标 $i\in I$ 有 $f'c\lambda_i=fc\lambda_i$. 于是由余积的定义得到 $f'c=fc$, 再由 c 是 epic 态得到 $f=f'$. 所以根据前面的讨论知 $\mathcal{A}$ 中对象 $F/\mathrm{Im}\tau$ 和态射族 $\{\alpha_i:F_i\to\varinjlim_I F_i\}_{i\in I}$ 给出正向系 $\{F_i,\varphi^i_j\}_I$ 的正向极限. $\square$

Remark 1.157. 从证明过程容易看出具有任意余积和任意余核的加性范畴, 正向系的正向极限总存在.

由 [命题1.155] 和 [命题1.156] 立即得到:

Corollary 1.158. 对 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ 余完备的充要条件是 $\mathcal{A}$ 上任何正向系的正向极限存在.

设 $(I,\leq)$ 是拟序集, $\mathcal{A}$ 是余完备的 Abel 范畴, 记 ob$\mathbf{Dir}(I)$ 是 $\mathcal{A}$ 上以 I 为指标集的正向系全体. 那么对任何正向系 $\{F_i,\varphi_j^i\}_I$ 和 $\{G_i,\psi_j^i\}_I$, 称 $\{F_i,\varphi_j^i\}_I$ 到 $\{G_i,\psi_j^i\}_I$ 的自然变换为 $\{F_i,\varphi_j^i\}_I$ 到 $\{G_i,\psi_j^i\}_I$ 的**态射**, 记 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Dir}(I)}(\{F_i,\varphi_j^i\}_I,\{G_i,\psi_j^i\}_I)$ 是 $\{F_i,\varphi_j^i\}_I$ 到 $\{G_i,\psi_j^i\}_I$ 的所有态射构成的类. 那么由替换公理, I 是集合保证了 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Dir}(I)}(\{F_i,\varphi_j^i\}_I,\{G_i,\psi_j^i\}_I)$ 也是集合. 于是我们能够自然的得到范畴 $\mathbf{Dir}(I)$(注意我们已经固定了 $\mathcal{A}$, 但在记号上没有体现). 一般地, 对任何范畴 $\mathcal{C}$ 和小范畴 $\mathcal{I}$, 定义 ob$\mathbf{Fun}(\mathcal{I},\mathcal{C})$ 为 $\mathcal{I}$ 到 $\mathcal{C}$ 的函子全体, 对任何 $\mathcal{I}$ 到 $\mathcal{C}$ 的函子 F,G, 定义态射类 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fun}(\mathcal{I},\mathcal{C})}(F,G)$ 为 F 到 G 的自然变换全体, 那么 ob$\mathcal{I}$ 是集合保证了 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fun}(\mathcal{I},\mathcal{C})}(F,G)$ 是集合. 利用函子间自然变换的合成定义态射的合成便得到范畴 $\mathbf{Fun}(\mathcal{I},\mathcal{C})$, 称为**函子范畴**. 易见这里以给定拟序集 $(I,\leq)$ 为指标集的正向系范畴 $\mathbf{Dir}(I)$ 是特殊的函子范畴.

下面说明取正向极限可自然导出共变函子. **首先我们对所有的正向系都选定正向极限**, 于是对任何正向系 $\{F_i,\varphi_j^i\}_I$ 和 $\{G_i,\psi_j^i\}_I$ 间的态射, 即可表示为态射族 $t=\{t_i:F_i\to G_i\}_{i\in I}$. 设 $\{F_i,\varphi_j^i\}_I$ 被选定的正向极限是 $(\varinjlim_I F_i,\{\alpha_i:F_i\to\varinjlim_I F_i\}_{i\in I})$, 而 $\{G_i,\psi_j^i\}_I$ 被选定的正向极限是 $(\varinjlim_I G_i,\{\beta_i:G_i\to\varinjlim_I G_i\}_{i\in I})$, 那么存在唯一的态射 $\vec{t}:\varinjlim_I F_i\to\varinjlim_I G_i$ 使得下图对所有的指标 $i\in I$ 交换:

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_I F_i \arrow[rrr, dashed, "\vec{t}"] & & & \varinjlim_I G_i \\
& F_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[r, "t_i"] \arrow[d, "\varphi_j^i"] & G_i \arrow[ur, "\beta_i"] \arrow[d, "\psi_j^i"] & \\
& F_j \arrow[uul, bend left, "\alpha_j"] \arrow[r, "t_j"] & G_j \arrow[uur, bend right, "\beta_j"'] &
\end{tikzcd}$$

因此取正向极限过程可自然导出共变函子 $\varinjlim_I:\mathbf{Dir}(I)\to\mathcal{A}$(对不同的正向极限选取方式定义出的函子是自然同构的), 称为**正向极限函子** (注意这里对 $\mathcal{A}$ 余完备性的假设). [例1.149] 中取常量正向系自然给出函子 $|\cdot|:\mathcal{A}\to\mathbf{Dir}(I)$. 这两个函子在 Hom 集层面给出的映射明显都是加群同态.

由于 $\mathcal{A}$ 是 (余完备)Abel 范畴, 所以容易验证 $\mathbf{Dir}(I)$ 也是 Abel 范畴, 并且

$$0\longrightarrow\{A_i,\varphi_j^i\}_I\xrightarrow{t=\{t_i\}_{i\in I}}\{B_i,\psi_j^i\}_I\xrightarrow{s=\{s_i\}_{i\in I}}\{C_i,\theta_j^i\}_I\longrightarrow 0$$

是正合列的充要条件是对每个 $i\in I$ 有 $0\longrightarrow A_i\xrightarrow{t_i}B_i\xrightarrow{s_i}C_i\longrightarrow 0$ 是短正合列. 因此正向极限函子 $\varinjlim_I:\mathbf{Dir}(I)\to\mathcal{A}$ 和取常量正向系函子 $|\cdot|:\mathcal{A}\to\mathbf{Dir}(I)$ 是 Abel 范畴间的加性函子.

Proposition 1.159 ([Rot09])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是余完备 Abel 范畴且 $(I,\leq)$ 是拟序集. 那么 $\varinjlim_I$ 是 $|\cdot|$ 的左伴随函子.

Proof. 任取 I 上正向系 $F=\{F_i,\varphi_j^i\}_I$ 和 $\mathcal{A}$ 中对象 X, 定义 $\eta_{X,F}:\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\varinjlim_I F_i,X)\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{Dir}(I)}(F,|X|),\varphi\mapsto\{\varphi\alpha_i\}_{i\in I}$, 这里态射族 $\{\alpha_i:F_i\to\varinjlim_I F_i\}_{i\in I}$ 是正向极限的标准态射. 那么从正向极限以及常量正向系的定义立即得到 $\eta_{X,F}$ 是双射, 并且根据 $\eta_{X,F}$ 的构造, 明显也是加群同态. 可直接验证 η 给出 $\varinjlim_I$ 和 $|\cdot|$ 的联络. □

在 [命题1.40] 中我们看到 Abel 范畴间左伴随函子右正合, 所以 [命题1.159] 表明

Corollary 1.160. 设 $\mathcal{A}$ 是余完备 Abel 范畴且 $(I,\leq)$ 是拟序集. 那么 $\varinjlim_I : \mathbf{Dir}(I) \to \mathcal{A}$ 右正合.

如果拟序集 $(I,\leq)$ 满足对任何 $i,j \in I$, 存在 $k \in I$ 使得 $i \leq k$ 且 $j \leq k$, 则称 $(I,\leq)$ 是**正向集**. 例如任何模的有限生成子模全体给出的正向系指标集就是正向集, 回忆 [例1.153]. 在模范畴中, 指标集为正向集的正向系的正向极限能够很好地把握. 固定含幺环 R, 那么根据 [命题1.156], R-**Mod** 中拟序集 I 上的正向系 $\{F_i,\varphi_j^i\}_I$ 的正向极限 $(\varinjlim_I F_i, \{\alpha_i : F_i \to \varinjlim_I F_i\}_{i\in I})$ 可如下具体表示: 设 S 是 $F = \oplus_{i\in I}F_i$ 中由集合 $\{\lambda_i(x_i) - \lambda_i\varphi_j^i(x_i) | x_i \in F_i, i \leq j \in I\}$ 生成的子模, 那么 $\varinjlim_I F_i = F/S$ 且 $\alpha_i : F_i \to F/S, x_i \mapsto \lambda_i(x_i) + S$ 给出正向极限 $(\varinjlim_I F_i, \{\alpha_i : F_i \to \varinjlim_I F_i\}_{i\in I})$.

Proposition 1.161 ([Rot09])**.** 设 $(I,\leq)$ 是正向集, R 是含幺环且 $\{X_i,\varphi_j^i\}_I$ 是左 R-模范畴中的正向系. 对每个 $i \in I$, 记 $\lambda_i : X_i \to \oplus_{i\in I}X_i$ 是标准映射. 那么:
(1) 正向极限对象 $\varinjlim_I X_i = \oplus_{i\in I}X_i/S$ 中每个元素满足存在 $t \in I, x_t \in X_t$ 使得该元素形如 $\lambda_t(x_t) + S$.
(2) 对 $\lambda_i(x_i) + S \in \varinjlim_I X_i$, $\lambda_i(x_i) + S = 0$ 当且仅当存在 $t \geq i$ 使得 $\varphi_t^i(x_i) = 0$.

Proof. (1) 易见 $\varinjlim_I X_i = \oplus_{i\in I}X_i/S$ 中每个元素可表示为形如 $\lambda_j(x_j) + S$ 的有限和, 所以对 $\varinjlim_I X_i$ 中给定元素, 存在 I 的非空有限子集 J 使得该元素可表示为 $\sum_{j\in J}\lambda_j(x_j) + S$, 因为 J 是有限集所以可以选取 $t \in I$ 使得 $j \leq t, \forall j \in J$. 于是对每个 $j \in J$ 有 $\varphi_t^j(x_j) \in X_t$. 所以

$$\sum_{j\in J}\lambda_j(x_j) + S = \sum_{j\in J}(\lambda_j(x_j) - \lambda_t\varphi_t^j(x_j)) + \sum_{j\in J}\lambda_t\varphi_t^j(x_j) + S = \lambda_t\left(\sum_{j\in J}\varphi_t^j(x_j)\right) + S.$$

(2) 如果 $\lambda_i(x_i) + S = 0$, 那么 $\lambda_i(x_i)$ 能够表示为有限和 $\sum_{j\leq k}\lambda_j(x_j) - \lambda_k\varphi_k^j(x_j)$, 设 $t \in I$ 比该表达式中出现的所有 I 中指标大, 那么在 $\oplus_{i\in I}X_i$ 中有

$$\begin{aligned}
\lambda_t\varphi_t^i(x_i) &= -\left(\lambda_i(x_i) - \lambda_t\varphi_t^i(x_i)\right) + \sum_{j\leq k}\left(\lambda_j(x_j) - \lambda_k\varphi_k^j(x_j)\right) \\
&= -\left(\lambda_i(x_i) - \lambda_t\varphi_t^i(x_i)\right) + \sum_{j}\left(\lambda_j(x_j) - \lambda_t\varphi_t^j(x_j)\right) + \sum_{j\leq k}\left(\lambda_t\varphi_t^j(x_j) - \lambda_k\varphi_k^j(x_j)\right) \\
&= -\left(\lambda_i(x_i) - \lambda_t\varphi_t^i(x_i)\right) + \sum_{j}\left(\lambda_j(x_j) - \lambda_t\varphi_t^j(x_j)\right) - \sum_{j\leq k}\left(\lambda_k\varphi_k^j(x_j) - \lambda_t\varphi_t^k\varphi_k^j(x_j)\right).
\end{aligned}$$

上面的最后一个表达式所有 I 中指标不超过 t, 所以求和表达式得到零. 反之, 如果 $t \geq i$ 使得 $\varphi_t^i(x_i) = 0$. 那么 $\lambda_i(x_i) + S = \lambda_i(x_i) - \lambda_t\varphi_t^i(x_i) + \lambda_t\varphi_t^i(x_i) + S = 0 + S$. □

Corollary 1.162 ([Rot09])**.** 设拟序集 $(I,\leq)$ 是正向集, R 是含幺环. 那么 $\varinjlim_I : \mathbf{Dir}(I) \to R$-**Mod** 是正合函子.

Proof. 根据 [推论1.160], $\varinjlim_I : \mathbf{Dir}(I) \to R$-**Mod** 是右正合函子, 所以只需再验证 $\varinjlim_I$ 保持单射即可. 现在设 $\{X_i,\varphi_j^i\}_I$ 和 $\{Y_i,\psi_j^i\}_I$ 都是左 R-模的正向系. 并且有正向系间的 monic 态, $t = \{t_i\}_{i\in I} : \{X_i,\varphi_j^i\}_I \to \{Y_i,\psi_j^i\}_I$, 即对每个 $i \in I$ 都有 $t_i : X_i \to Y_i$ 是 $\mathcal{A}$ 中 monic 态. 要证使得下图交换的态射 $\vec{t} : \varinjlim_I X_i \to \varinjlim_I Y_i$ 是单射:

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_I X_i \arrow[rrr, dashed, "\vec{t}"] & & & \varinjlim_I Y_i \\
& X_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[r, "t_i"] \arrow[d, "\varphi_j^i"] & Y_i \arrow[ur, "\beta_i"] \arrow[d, "\psi_j^i"] & \\
& X_j \arrow[uul, bend left, "\alpha_j"] \arrow[r, "t_j"] & Y_j \arrow[uur, bend right, "\beta_j"'] &
\end{tikzcd}$$

根据 [命题1.161], 任何 $\varinjlim_I X_i$ 中元素形如 $\alpha_i(x_i)$, $i \in I$ 是某个指标. 现在设 $\alpha_i(x_i)$ 满足 $\vec{t}\alpha_i(x_i) = 0$, 那么 $\beta_i t_i(x_i) = 0$. 再应用 [命题1.161], 存在 $j \geq i$ 使得 $\psi_j^i(t_i(x_i)) = 0$. 即 $t_j\varphi_j^i(x_i) = 0$, 结合 t_j 是单射得到 $\varphi_j^i(x_i) = 0$. 所以由 [命题1.161], $\alpha_i(x_i) = 0$, 这证明了 $\vec{t}$ 是单射. □

Remark 1.163. 通常余完备 Abel 范畴上的正向极限函子未必正合, 只能得到右正合 (回忆 [推论1.160]). 如果余完备 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的正向极限函子是正合的并且 $\mathcal{A}$ 有生成子, 则称 $\mathcal{A}$ 是 **Grothendieck 范畴**.

现在介绍拟序集上的逆向系. 设 $(I, \leq)$ 是拟序集, 称 $\mathcal{I}$ 到范畴 $\mathcal{C}$ 的逆变函子是 $\mathcal{C}$ 上以拟序集 I 为指标集的**逆向系**. 如果 $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ 是逆向系, 记 $i \in I$ 对应的对象 $F(i)$ 为 F_i. 任何 $i \leq j \in I$ 对应 $\mathcal{C}$ 中态射 $\psi_i^j : F_j \to F_i$. 这时把逆向系 F 也记作 $\{F_i, \psi_i^j\}_I$. $\mathcal{C}$ 上以拟序集 I 为指标集的正向系可自然视作对偶范畴 $\mathcal{C}^{op}$ 上拟序集 I 为指标集的逆向系; $\mathcal{C}$ 上以拟序集 I 为指标集的逆向系可自然视作对偶范畴 $\mathcal{C}^{op}$ 上拟序集 I 为指标集的正向系.

Example 1.164 ([Rot09])**.** 设 $I = \{1, 2, 3\}$, 其上拟序由 $1 < 2, 1 < 3$ 自然给出. 那么范畴 $\mathcal{C}$ 上以拟序集 I 为指标集的逆向系可由下图描述 (指标 1 对应 X, 2 对应 Y, 3 对应 Z):

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Example 1.165 ([Rot09])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, 有对象族 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, 这里 Λ 是非空指标集. 类似 [例1.151], 考虑 Λ 所有非空有限子集对应对象的积. 依然记 I 是 Λ 所有的非空有限子集 (关于集合包含关系) 构成的拟序集, 对 Λ 赋予良序 $\leq$. $\{j_1, ..., j_n | j_1 < j_2 < \cdots < j_n\}$ 对应积对象 $X_{j_1} \times X_{j_2} \times \cdots \times X_{j_n}$. 并且如果 $J \subseteq J'$ 都是 I 中元素, 那么指标集 J' 对应的积对象到 J 对应的积对象间有标准态射. 由此得到 $\mathcal{A}$ 上以拟序集 I 为指标集的逆向系.

逆向系的逆向极限的定义与正向系的正向极限完全是对偶的.

Definition 1.166 ([Rot09])**.** 设 $\{F_i, \psi_i^j\}_I$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 上以拟序集 I 为指标集的逆向系. 称由 $\mathcal{C}$ 中对象 $\varprojlim_I F_i$ 和态射族 $\{\beta_i : \varprojlim_I F_i \to F_i\}_{i \in I}$ 构成的二元组 $(\varprojlim_I F_i, \{\beta_i : \varprojlim_I F_i \to F_i\}_{i \in I})$ 为 $\{F_i, \psi_i^j\}_I$ 的**逆向极限**, 若满足:
(1) 对任何 $i \leq j \in I$, $\beta_i = \psi_i^j \beta_j$;
(2) 对任何 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$ 和满足 $f_i = \psi_j^i f_j, \forall i \leq j \in I$ 的态射族 $\{f_i : X \to F_i\}_{i \in I}$, 存在唯一的态射 $f : X \to \varprojlim_I F_i$ 使得对所有指标 $i \in I$ 有 $\beta_i f = f_i$, 即下图交换:

$$\begin{tikzcd} \varinjlim_I F_i \arrow[dr, "\beta_i"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_j"'] & & X \arrow[ll, dashed, "f"'] \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddl, bend left, "f_j"] \\ & F_i & \\ & F_j \arrow[u, "\psi_i^j"] & \end{tikzcd}$$

Example 1.167 ([Rot09])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 考虑 [例1.164] 中的逆向系. 那么该逆向系的逆向极限由图

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

的拉回给出 (逆向极限对象取为拉回对象, 逆向极限对象到图中对象的态射也有自然选取).

Proposition 1.168 ([Ste75]). 设 $\mathcal{A}$ 是满足逆向系的逆向极限都存在的 Abel 范畴, 则 $\mathcal{A}$ 完备 (回忆 [注记1.13]).

Proof. 任取 $\mathcal{A}$ 中对象族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 记 I 是 Λ 所有非空有限子集构成的集合, 它关于包含关系构成拟序集. 于是根据 [例1.165] 我们得到 $\mathcal{A}$ 上逆向系满足 I 中任何元素 $\{j_1,...,j_n|j_1<j_2<\cdots<j_n\}$ 对应 $\mathcal{A}$ 中对象 $X_{j_1}\times X_{j_2}\times\cdots\times X_{j_n}$, 如果 $J\subseteq J'$ 是 I 中元素, 那么相应的有限积对象间也有自然的态射. 于是根据逆向极限的定义容易验证该逆向系的极限对象给出积对象 $\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$, 每个逆向极限对象到 X_α 的标准态射给出积定义中的标准态射. 所以 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 在 $\mathcal{A}$ 中存在积. □

Proposition 1.169 ([Ste75]). 设 $\mathcal{A}$ 是完备 Abel 范畴, 那么 $\mathcal{A}$ 上任何指标集为拟序集的逆向系的逆向极限存在, 并且在同构意义下唯一.

Proof. 记 $\mathcal{I}$ 是拟序集 $(I,\leq)$ 给出的范畴, 设 $\{F_i,\psi_i^j\}_I$ 是 $\mathcal{A}$ 上以 I 为指标集的逆向系, $F=\prod_{i\in I}F_i$, $p_i:F\to F_i$ 是标准态射. 这里仅验证逆向系的逆向极限的存在性. 任何 $\mathcal{I}$ 中态射 $\gamma:i\to j$, 记 $s(\gamma)=i$ 以及 $t(\gamma)=j$, $\mathcal{I}$ 中所有态射构成的集合记作 Γ. $\prod_{\gamma\in\Gamma}F_{s(\gamma)}$ 到 $F_{s(\gamma)}$ 的标准态射记作 π_γ. 对每个 $i\leq j\in I$, 对应 $\mathcal{A}$ 中态射 $p_i-\psi_i^jp_j:F\to F_i$. 于是我们得到 $\mathcal{A}$ 中态射 $\theta:F\to\prod_{\gamma\in\Gamma}F_{s(\gamma)}$ 满足对任何 Γ 中态射 $\gamma:i\to j$ 有 $\pi_\gamma\theta=p_i-\psi_i^jp_j$. 现在有余核 $k:\mathrm{Ker}\theta\to F$. 对每个 $i\in I$, 记 $\beta_i=p_ik:\mathrm{Ker}\theta\to F_i$. 下面验证当 $i\leq j\in I$ 时, $\psi_i^j\beta_j=\beta_i$. 只需注意到对任何 $\gamma\in\Gamma$ 有 $0=\pi_\gamma\theta k=\beta_i-\psi_i^j\beta_j$. 现在设有 $\mathcal{A}$ 中对象 X 和满足 $f_i=\psi_j^if_j,\forall i\leq j\in I$ 的态射族 $\{f_i:X\to F_i\}_{i\in I}$. 这时存在唯一的态射 $\eta:X\to F$ 使得对任何 $i\in I$ 有 $p_i\eta=f_i$. 那么对任何 $i\leq j\in I$ 有 $\pi_\gamma\theta\eta=p_i\eta-\psi_i^jp_j\eta=f_i-\psi_i^jf_j=0$. 这说明 $\theta\eta=0$. 进而存在唯一的态射 $f:X\to\mathrm{Ker}\theta$ 使得 $kf=\eta$. 于是对任何指标 $i\in I$ 有 $\beta_if=f_i$. 最后说明如果还有态射 $f':X\to\mathrm{Ker}\theta$ 满足 $\beta_if'=f_i,\forall i\in I$, 那么 $f=f'$. 这时 $k(f-f')=0$, 结合 k 是 monic 态便知 $f=f'$. □

Corollary 1.170. 对 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, 该范畴完备当且仅当 $\mathcal{A}$ 上任何指标集为拟序集的逆向系的逆向极限都存在.

从 [例1.154] 和 [命题1.155] 中看到推出和任意余积可实现为正向极限; [例1.167] 和 [命题1.168] 说明拉回和任意直积可实现为逆向极限. 所以保持极限的函子十分重要且有用.

Theorem 1.171 ([ZW18]). 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 都是既完备又余完备的 Abel 范畴, $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是 $G:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ 的右伴随函子. 那么左伴随函子 G 保持正向极限, 右伴随函子 F 保持逆向极限.

$$\mathcal{C}\underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}}\mathcal{D}$$

特别地, F 保持积、拉回、核和 monic 态; G 保持余积、推出、余核和 epic 态.

Proof. 现在设 $\{Y_i,\varphi_j^i\}_I$ 是 $\mathcal{B}$ 上指标集为拟序集 $(I,\leq)$ 的正向系, $(\varinjlim_I Y_i,\{\alpha_i:Y_i\to\varinjlim_I Y_i\}_{i\in I})$ 是其正向极限. 于是我们得到 $\mathcal{A}$ 中以 I 为指标集的正向系 $\{GY_i,G\varphi_j^i\}_I$. 下面我们证明 $(G\varinjlim_I Y_i,\{G\alpha_i:GY_i\to G\varinjlim_I Y_i\}_{i\in I})$ 是 $\mathcal{A}$ 上正向系 $\{GY_i,G\varphi_j^i\}_I$ 的正向极限. 首先设 η 是伴随函子间的联络, 对每个 $Y\in\mathrm{ob}\mathcal{B}$ 和 $X\in\mathrm{ob}\mathcal{A}$ 对应加群同构 $\eta_{Y,X}:\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GY,X)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y,FX)$. 现在设 $A\in\mathrm{ob}\mathcal{A}$ 以及态射族 $\{f_i:GY_i\to A\}_{i\in I}$ 满足对任何

$i \leq j \in I$ 有 $f_i = f_j G\varphi_j^i$. 需要证明存在唯一的态射 $f : G\varinjlim_I Y_i \to A$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
G\varinjlim_I Y_i \arrow[rr, dashed, "f"] & & A \\
& GY_i \arrow[ul, "G\alpha_i"'] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[d, "G\varphi_j^i"] & \\
& GY_j \arrow[uul, bend left, "G\alpha_j"] \arrow[uur, bend right, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

现在对任何 $i \leq j \in I$, 根据联络 η 的定义有交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GY_i, A) \arrow[r, "\eta_{Y_i,A}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y_i, FA) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GY_j, A) \arrow[r, "\eta_{Y_j,A}"] \arrow[u, "(G\varphi_j^i)^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y_j, FA) \arrow[u, "(\varphi_j^i)^*"']
\end{tikzcd}$$

对每个指标 $i \in I$, 记 $g_i = \eta_{Y_i,A}(f_i) : Y_i \to FA$, 那么上图的交换性说明对任何 $i \leq j \in I$ 有 $g_i = g_j\varphi_j^i$. 所以存在唯一的态射 $g : \varinjlim_I Y_i \to FA$ 使得对所有 $i \in I$ 有 $g\alpha_i = g_i$. 对加群同构

$$\eta_{\varinjlim_I Y_i,A} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G\varinjlim_I Y_i, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y_i, FA),$$

可选取唯一的态射 $f : G\varinjlim_I Y_i \to A$ 满足 $\eta_{\varinjlim_I Y_i,A}(f) = g$. 于是利用联络 η 容易验证对任何 $i \in I$ 有 $\eta_{Y_i,A}(fG\alpha_i) = g\alpha_i = g_i = \eta_{Y_i,A}(f_i)$. 于是 $fG\alpha_i = f_i, \forall i \in I$. 下证态射 f 的唯一性. 如果还有态射 $f' : G\varinjlim_I Y_i \to A$ 满足 $f'G\alpha_i = f_i, \forall i \in I$, 那么 $\eta_{\varinjlim_I Y_i,A}(f')\alpha_i = \eta_{Y_i,A}(f'G\alpha_i) = \eta_{Y_i,A}(f_i) = g_i, \forall i \in I$. 故

$$\eta_{\varinjlim_I Y_i,A}(f')\alpha_i = g\alpha_i, \forall i \in I.$$

从而 $\eta_{\varinjlim_I Y_i,A}(f') = \eta_{\varinjlim_I Y_i,A}(f)$, 这说明 $f = f'$. 至此我们证明了 G 保持正向极限. 对于逆向极限的情形, 将 F 视作 $\mathcal{A}^{op}$ 到 $\mathcal{B}^{op}$ 的加性函子, G 视作 $\mathcal{B}^{op}$ 到 $\mathcal{A}^{op}$ 的加性函子. 那么联络 η 说明 $F : \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}^{op}$ 是 $G : \mathcal{B}^{op} \to \mathcal{A}^{op}$ 的左伴随函子, 进而应用前面证明的结论便知 F 保持 $\mathcal{A}^{op}$ 中正向系的正向极限, 即 $\mathcal{A}$ 中逆向系的逆向极限. □

Remark 1.172. 特别地, 根据 [定理1.171] 的证明过程 (保持定理中的假设和记号), 如果记 $\hat{G}$ 和 $\hat{F}$ 分别是 G 和 F 所诱导正向系范畴间的加性函子, 那么有自然同构 $\varinjlim_I \hat{G} \cong G\varinjlim_I$ 和 $\varprojlim_I \hat{F} \cong F\varprojlim_I$.

Example 1.173 ([Rot09])**.** 设 R 是含幺环, M 是左 R-模且 N 是右 R-模. 那么 $N \otimes_R -$ 和 $- \otimes_R M$ 和正向极限可交换. 应用 [推论1.162] 和 [注记1.172]: 如果 $\{N_i, \varphi_j^i\}_{i \in I}$ 是由平坦右 R-模给出的正向集上正向系, 那么 $\varinjlim_I N_i$ 也是平坦右 R-模. 类似地, 平坦左 R-模族构成的正向系的正向极限模依然是平坦模. 于是我们能够得到如果右 R-模 N 的有限生成子模都是平坦的, 那么 N 也平坦: 从 [例1.153] 知 N 的所有有限生成子模自然产生正向系并且该正向系的正向极限就是 N. 所以通过平坦模正向系的正向极限模平坦得到 N 平坦.

Remark 1.174. 投射模给出的正向集上正向系的正向极限未必投射. 例如考虑 $\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Q}$ 的所有有限生成子模构成的正向系. 该正向系每项作为 $\mathbb{Z}$ 上无挠模平坦, 故由有限表现模的平坦性与投射性等价得到 $\mathbb{Q}$ 的任何有限生成子模是投射 $\mathbb{Z}$-模. 而 $\mathbb{Q}$ 作为自身所有有限生成 $\mathbb{Z}$-子模的正向极限明显不是自由的, 因此也不是投射的.

Remark 1.175. 内射模给出的正向集上的正向系也未必内射 [Ber13], 因为 [推论1.162] 对逆向极限不再成立.

Corollary 1.176 ([Rot09]). 设 M 是左 R-模, N 是右 R-模. 那么对任何 $n\in\mathbb{N}$, 函子 $\mathrm{Tor}_n^R(-,M)$ 和 $\mathrm{Tor}_n^R(N,-)$ 与 (相应模范畴中) 任何正向集上的正向极限可交换.

Proof. 以 $\mathrm{Tor}_n^R(N,-)$ 为例, 取定正向集 $(I,\leq)$ 上的正向系 $\{M_i,\varphi_j^i\}_I$, 那么我们总能构造下述形式的正向系短正合列, 满足每个 P_i 是投射模:

$$0\longrightarrow\{K_i,\theta_j^i\}_I\xrightarrow{s=\{s_i\}_{i\in I}}\{P_i,\psi_j^i\}_I\xrightarrow{t=\{t_i\}_{i\in I}}\{M_i,\varphi_j^i\}_I\longrightarrow 0.$$

需要验证对每个自然数 n, $\varinjlim_I\mathrm{Tor}_n^R(N,M_i)$ 到 $\mathrm{Tor}_n^R(N,\varinjlim_I M_i)$ 的标准映射是同构. 当 $n=0$ 时, 这来自 [注记1.172]. 假设结论对 $n-1(n\geq 1)$ 的情形成立, 那么考虑 $0\longrightarrow K_i\xrightarrow{s_i}P_i\xrightarrow{t_i}M_i\longrightarrow 0$ 导出的 Tor 群长正合列. 当 $n=1$ 时, 利用 $N\otimes_R-$ 和正向极限可交换, 五引理便可得 $\mathrm{Tor}_1^R(N,-)$ 与正向极限可交换. 由 $\varinjlim_I P_i$ 的平坦性 ([例1.173]) 可知 $\mathrm{Tor}_k^R(N,\varinjlim_I P_i)=0,\forall k\geq 1$. 故当 $n\geq 2$ 时, 再结合 Tor 群的长正合列以及对正向系 $\{K_i,\theta_j^i\}_I$ 应用归纳假设可验证 $\varinjlim_I\mathrm{Tor}_n^R(N,M_i)$ 到 $\mathrm{Tor}_n^R(N,\varinjlim_I M_i)$ 的标准映射是同构. □

从 [定理1.171] 也可知对含幺环 R 上的模 M, $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 和逆向极限可交换 (在 [注记1.172] 的意义下). 下面我们讨论 R-模 M 决定的函子 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 何时与正向极限可交换. 先看直和这一特殊情形.

Proposition 1.177. 设 R 是含幺环, M 是有限生成左 R-模. 那么对任何左 R-模族 $\{N_i\}_{i\in I}$, 标准映射

$$\xi_M:\oplus_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(M,N_i)\to\mathrm{Hom}_R(M,\oplus_{i\in I}N_i),(f_i)_{i\in I}\mapsto\xi_M((f_i)_{i\in I}),$$

这里 $\xi_M((f_i)_{i\in I}),M\to\oplus_{i\in I}N_i,x\mapsto(f_i(x))_{i\in I}$, 是加群同构. 并且对任何左 R-模同态 $\varphi:M\to M'$, 有交换图:

$$\begin{tikzcd}
\oplus_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(M,N_i) \arrow[r, "\xi_M"] & \mathrm{Hom}_R(M,\oplus_{i\in I}N_i) \\
\oplus_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(M',N_i) \arrow[r, "\xi_{M'}"] \arrow[u, "(\varphi^*)_{i\in I}"] & \mathrm{Hom}_R(M',\oplus_{i\in I}N_i) \arrow[u, "\varphi^*"']
\end{tikzcd}$$

Proof. 设 $\iota_i:N_i\to\oplus_{i\in I}N_i$ 和 $p_i:\oplus_{i\in I}N_i\to N_i$ 都是标准态射. 如果 $\theta:M\to\oplus_{i\in I}N_i$ 是满同态, 记 $\theta_i=p_i\theta$, 那么 $\xi_M((\theta_i)_{i\in I})=\theta$, 所以 ξ_M 总是满射. 假设有 $(f_i)_{i\in I},(g_i)_{i\in I}\in\oplus_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(M,N_i)$ 满足在 ξ_M 下的像一致. 设 M 有生成元集 $\{x_1,...,x_\ell\}$, 那么对每个 $1\leq k\leq\ell$ 有 $f_i(x_k)=g_i(x_k),\forall i\in I$, 进而 $f_i(x)=g_i(x),\forall i\in I,x\in M$. 因此 $(f_i)_{i\in I}=(g_i)_{i\in I}\in\oplus_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(M,N_i)$, 于是知 ξ_M 是单射. 最后 ξ_M 关于 M 的自然性是明显的. □

Remark 1.178. 一般地, 存在非有限生成的 R-模 M 使得 [命题1.177] 中的同态 ξ_M 不是同构, 见 [EGT97].

回忆左 R-模 M 是有限生成模当且仅当 M 无法表示为一些真子模的正向并: 如果 M 是有限生成模, 如果 M 有真子模族 $\{M_i\}_{i\in I}$ 关于包含关系是正向集并且 $M=\cup_{i\in I}M_i$, 那么利用 M 是有限生成模以及该子模族是正向集立即得到某个真子模包含 M 的任何有限生成元集, 矛盾. 反之, 如果 M 不是有限生成模, 考虑 M 所有的有限生成子模构成的集族 S, 那么 S 关于包含关系是正向集, 并且 S 中所有模之并就是 M, 这说明 M 能表示为一些真子模的正向并. 在刻画满足 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 与任何正向集上正向极限可交换的 M 前, 我们需要

Lemma 1.179 ([Wu]). 设 M 是左 R-模. 那么 M 是有限生成模当且仅当 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 任何 (某个模的) 子模族的正向并可交换. 即对任何左 R-模 N 的子模正向集 $\{N_i\}_{i\in I}$(这里 $(I,\leq)$ 是拟序集满足 $i\leq j$ 当且仅当 $N_i\subseteq N_j$), 标准同态 $t_M:\varinjlim_I\mathrm{Hom}_R(M,N_i)\to\mathrm{Hom}_R(M,\cup_{i\in I}N_i)$ 是同构.

Proof. 必要性: 不妨设 $N=\cup_{i\in I}N_i$, 对 $i\le j\in I$, 记 $\iota^i_j:N_i\to N_j,\ell_i:N_i\to N$ 是标准嵌入. 那么有正向系 $\{\mathrm{Hom}_R(M,N_i),(\iota^i_j)_*\}_I$. 那么 t_M 是使得下图交换的唯一加群同态:

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(M,N_i) \arrow[rr, dashed, "t_M"] & & \mathrm{Hom}_R(M,N) \\
& \mathrm{Hom}_R(M,N_i) \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "(\ell_i)_*"] \arrow[d, "(\iota^i_j)_*"] & \\
& \mathrm{Hom}_R(M,N_j) \arrow[uul, bend left, "\alpha_j"] \arrow[uur, bend right, "(\ell_j)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

利用 [命题1.161] 以及 $(\ell_i)_*$ 是 monic 态立即得到 t_M 是单射. 下证 f 是满射. 任取 R-模同态 $f:M\to N$, 那么 $M=f^{-1}(N)=\cup_{i\in I}f^{-1}(N_i)$ 是一些子模的正向并, 所以 M 的有限生成性迫使存在某个指标 $i_0\in I$ 使得 $M=f^{-1}(N_{i_0})$. 于是 f 导出标准态射 $f':M\to N_{i_0},x\mapsto f(x)$, 满足 $(\ell_{i_0})_*(f')=f$. 因此 $f=t_M\alpha_{i_0}(f')$.

充分性: 我们通过说明 M 和某个有限生成子模相同来得到结论. 设 $\{M_i\}_{i\in I}$ 是 M 的所有有限生成子模构成的正向系 (回忆 [例1.153]), 根据条件, 标准同态 $t_M:\varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(M,M_i)\to\mathrm{Hom}_R(M,M)$ 是同构. 所以根据 t_M 是满射以及 [命题1.161], 存在 $i_0\in I$ 和 $f_{i_0}\in\mathrm{Hom}_R(M,M_{i_0})$ 使得 $t_M\alpha_{i_0}(f_{i_0})=1_M$. 即 $(\ell_{i_0})_*(f_{i_0})=1_M$, 这说明 $M_{i_0}=M$. 因此 M 是有限生成 R-模. □

Remark 1.180. 对左 R-模 N 的正向子模集 $\{N_i\}_{i\in I},\cup_{i\in I}N_i$ 也是 N 的 R-子模且为 $\{N_i\}_{i\in I}$ 的正向极限.

下面的 [引理1.181] 为我们提供了模的有限表现性的判别准则.

Lemma 1.181 ([Sta24]). 给定左 R-模 M, 则 M 是有有限表现的模当且仅当 M 有限生成且对任何左 R-模短正合列 $0\longrightarrow M_2\xrightarrow{f}M_1\xrightarrow{g}M\longrightarrow 0$, 有 M_1 是有限生成 R-模蕴含 M_2 是有限生成 R-模.

Proof. 充分性是明显的, 仅证明必要性: 设 M 有正合列 $R^m\xrightarrow{h_1}R^n\xrightarrow{h_2}M\longrightarrow 0$, 那么由 R^n 的投射性, 有同态 $\theta:R^n\to M_1$ 使得 $g\theta=h_2$. 进而存在同态 $\psi:R^m\to M_2$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
& R^m \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, dashed, "\psi"] & R^n \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "\theta"] & M \arrow[r] \arrow[d, "1_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r, "f"] & M_1 \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

应用蛇形引理得到 $\mathrm{Coker}\psi\cong\mathrm{Coker}\theta$. 因此当 M_1 是有限生成模时, $M_2/\mathrm{Im}\psi$ 也是有限生成模. 进而由 $\mathrm{Im}\psi$ 是有限生成模得到 M_2 也是有限生成模. □

Remark 1.182. 特别地, 对有限表现模, 表示为有限生成生成元和生成关系时, 生成关系总可选为有限多个.

Proposition 1.183 ([Wu]). 对左 R-模 M, M 是有有限表现的当且仅当 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 和模范畴上任何以正向集为指标集的正向极限可交换.

Proof. 必要性: 设左 R-模 M 有有限表现, 并设 $(I,\le)$ 是正向集, $\{N_i,\varphi^i_j\}_I$ 是左 R-模范畴中的正向系. 我们设

$(\varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(M,N_i), \{\alpha_i\}_{i\in I})$ 是正向系 $\{\mathrm{Hom}_R(M,N_i),(\varphi^i_j)_*\}_I$ 的正向极限, 我们证明下述标准同态是同构:

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(M,N_i) \arrow[rr, dashed, "t_M"] & & \mathrm{Hom}_R(M,\varinjlim_I N_i) \\
& \mathrm{Hom}_R(M,N_i) \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "(\beta_i)_*"] \arrow[d, "(\varphi^i_j)_*"] & \\
& \mathrm{Hom}_R(M,N_j) \arrow[uul, bend left, "\alpha_j"] \arrow[uur, bend right, "(\beta_j)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

先证明 t_M 是单射. 根据 [命题1.161], $\varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(M,N_i)$ 中任何元素形如 $\alpha_i(f_i)$, 其中 $f_i\in \mathrm{Hom}_R(M,N_i)$. 现在设 $\alpha_i(f_i)\in \mathrm{Ker}t_M$, 那么 $\beta_i f_i=0$. 从 [命题1.161] 知 $\mathrm{Ker}\beta_i=\sum_{j\geq i}\mathrm{Ker}\varphi^i_j$. 所以 $\mathrm{Im}f_i\subseteq \sum_{j\geq i}\mathrm{Ker}\varphi^i_j$.

因为对 $j_2\geq j_1\geq i$ 总有 $\mathrm{Ker}\varphi^i_{j_1}\subseteq \mathrm{Ker}\varphi^i_{j_2}$, 所以由 $\mathrm{Im}f_i$ 是有限生成模 (这里用了 M 是有限生成模), 知存在某个 $j\geq i$ 使得 $\mathrm{Im}f_i\subseteq \mathrm{Ker}\varphi^i_j$. 于是 $\varphi^i_j f_i=0$ 得到 $\alpha_i(f_i)=0$, 所以 t_M 是单射.

下面说明 t_M 是满射. 任取左 R-模同态 $h: M\to \varinjlim_I N_i$. 并记 $N=\varinjlim_I N_i$, 由 [命题1.161] 知 $N=\sum_{i\in I}\mathrm{Im}\beta_i$. 于是由 $\mathrm{Im}h$ 是有限生成模知存在某个指标 $i\in I$ 使得 $\mathrm{Im}h\subseteq \mathrm{Im}\beta_i$. 记 $\beta_i': N_i\to \mathrm{Im}\beta_i$ 是 β_i 的限制同态, $h': M\to \mathrm{Im}\beta_i$ 是 h 的限制同态. 考虑下述拉回方块 (β_i' 和 h' 的拉回):

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_i"'] & M \arrow[d, "h'"] \\
N_i \arrow[r, "\beta_i'"] & \mathrm{Im}\beta_i
\end{tikzcd}$$

由于 β_i' 是满射, 所以 [命题1.136] 保证了 g 也是满射. 因为 M 是有限生成模, 所以可选取 M' 的有限生成子模 M'' 使得 $g(M'')=M$. 于是考虑 g 的限制同态 $g': M''\to M$(依然是满射) 和 h_i 的限制同态 $h_i': M''\to N_i$ 得到下面的交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}g' \arrow[r] & M'' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h_i'"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "h'"] & 0 \\
& & N_i \arrow[r, "\beta_i'"] & \mathrm{Im}\beta_i &
\end{tikzcd}$$

应用 [引理1.181] 得到 $\mathrm{Ker}g'$ 也是有限生成模. 因为对 $j_2\geq j_1\geq i$ 总有 $\mathrm{Ker}\varphi^i_{j_1}\subseteq \mathrm{Ker}\varphi^i_{j_2}$, 所以由 $\mathrm{Ker}g'$ 的有限生成性, 可选取 $j\geq i$ 使得 $\varphi^i_j h_i'(\mathrm{Ker}g')=0$. 所以有同态 $\overline{h}_j: M\to N_j$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}g' \arrow[r] & M'' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h_i'"'] & M \arrow[r] \arrow[ddl, dashed, "\overline{h}_j"] & 0 \\
& & N_i \arrow[d, "\varphi^i_j"'] & & \\
& & N_j & &
\end{tikzcd}$$

于是可直接验证 $\beta_j\overline{h}_j g'=hg'$, 因此由 g' 是满射得到 $h=\beta_j\overline{h}_j=t_M\alpha_j(\overline{h}_j)$. 即 t_M 是满射.

充分性: 现在设左 R-模 M 满足 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 和模范畴上任何以正向集为指标集的正向极限可交换, 那么 [引理1.179] 和 [注记1.180] 说明 M 是有限生成模. 根据 [引理1.181], 如果能够证明对任何形如

$$0\longrightarrow K\xrightarrow{f} N\xrightarrow{g} M\longrightarrow 0$$

的短正合列只要 N 有限生成就有 K 有限生成, 那么便可知 M 是有有限表现的. 现在设上述短正合列中 N 是有限生成模. 不妨设 $K \subseteq N$. 设 $\{K_i\}_{i\in I}$ 是 K 的所有有限生成子模构成的正向系, 那么 $K = \varinjlim_I K_i$(回忆 [例1.153]). 对每个指标 $i \in I$, 记 $u_i : K_i \to K$ 是标准嵌入 (也是正向极限中的标准映射), 那么存在唯一的同态 $v_i : N/\mathrm{Im} fu_i \to M$ 使得下图交换 (并且应用蛇形引理可知 $K/\mathrm{Im}u_i \cong \mathrm{Ker}v_i$):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_i \arrow[r, "fu_i"] \arrow[d, "u_i"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "1_N"] & N/\mathrm{Im} fu_i \arrow[r] \arrow[d, dashed, "v_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

将上图不依赖于指标 i 的模视作以正向集 I 为指标集的常量正向系, 对上图关于 $i \in I$ 取正向极限得到交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_K"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "1_N"] & \varinjlim_I (N/\mathrm{Im} fu_i) \arrow[r] \arrow[d, "\vec{v}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

从 [推论1.162] 知上图的上下两行都是正合列. 因此五引理保证 $\vec{v}$ 也是同构.

对每个指标 $i \in I$, 记 $\gamma_i : N/\mathrm{Im} fu_i \to \varinjlim_I (N/\mathrm{Im} fu_i)$ 是正向极限的标准映射, 那么有交换图:

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(M, N_i) \arrow[rr, "t_M"] & & \mathrm{Hom}_R(M, \varinjlim_I (N/\mathrm{Im} fu_i)) \\
& \mathrm{Hom}_R(M, N/\mathrm{Im} fu_i) \arrow[ul, "\alpha_i"] \arrow[ur, "(\gamma_i)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

根据条件, 这里 t_M 是加群同构, 所以对 $\vec{v}^{-1} \in \mathrm{Hom}_R(M, \varinjlim_I (N/\mathrm{Im} fu_i))$, 应用 [命题1.161] 得到存在 $i \in I$ 和 R-模同态 $g_i : M \to N/\mathrm{Im} fu_i$ 使得 $\gamma_i g_i = \vec{v}^{-1}$. 于是由 $\vec{v}\gamma_i = v_i$ 得到 $1_M = v_i g_i$. 所以

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}v_i \longrightarrow N/\mathrm{Im} fu_i \xrightarrow{v_i} M \longrightarrow 0$$

的可裂短正合列. 于是 $\mathrm{Ker}v_i$ 作为 $N/\mathrm{Im} fu_i$ 的直和因子是有限生成模. 结合 $K/\mathrm{Im}u_i \cong \mathrm{Ker}v_i$ 得到 $K/\mathrm{Im}u_i$ 是有限生成模. 而 K_i 是有限生成模保证了 $\mathrm{Im}u_i$ 也是有限生成模. 于是知 K 也是有限生成模. □

Corollary 1.184 ([Bro75, Wu]). 设 M 是左 R-模, 那么 M 有有限生成投射分解的充要条件是对每个 $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ext}_R^n(M, -)$ 和任何 (以正向集为指标集的) 正向极限可交换.

Proof. 必要性: 如果 M 有投射分解 $\cdots \to P^{-n} \to \cdots \to P^{-1} \to P^0 \to M \to 0$ 满足每个 P^i 是有限生成投射模. 那么对任何正向集 I 上的左 R-模正向系 $\{N_i, \varphi^i_j\}_I$, 对每个指标 i 有复形

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P^0, N_i) \to \mathrm{Hom}_R(P^{-1}, N_i) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_R(P^{-n}, N_i) \to \cdots,$$

也有定义 $\mathrm{Ext}_R^n(M, \varinjlim_I N_i)$ 的复形

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P^0, \varinjlim_I N_i) \to \mathrm{Hom}_R(P^{-1}, \varinjlim_I N_i) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_R(P^{-n}, \varinjlim_I N_i) \to \cdots.$$

对每个指标 i, 设 $\alpha_i^{-n}: \mathrm{Hom}_R(P^{-n},N_i)\to \varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(P^{-n},N_i)$ 是正向极限的标准同态. 那么由有限生成投射模有有限表现, 应用 [命题1.183] 得到使得下图交换的唯一加群同态 $\beta^{-n}: \varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(P^{-n},N_i)\to \mathrm{Hom}_R(P^{-n},\varinjlim_I N_i)$ 是同构:

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(P^{-n},N_i) \arrow[rr, dashed, "\beta^{-n}"] & & \mathrm{Hom}_R(P^{-n},\varinjlim_I N_i) \\
& \mathrm{Hom}_R(P^{-n},N_i) \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "(\beta_i)_*"] \arrow[d, "(\varphi_j^i)_*"] & \\
& \mathrm{Hom}_R(P^{-n},N_j) \arrow[uul, bend left, "\alpha_j"] \arrow[uur, bend right, "(\beta_j)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

因此得到下面竖直方向同态都是同构的交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(P^0,N_i) \arrow[r] \arrow[d, "\beta^0"] & \varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(P^{-1},N_i) \arrow[r] \arrow[d, "\beta^{-1}"] & \cdots \arrow[r] & \varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(P^{-n},N_i) \arrow[r] \arrow[d, "\beta^{-n}"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P^0,\varinjlim_I N_i) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P^{-1},\varinjlim_I N_i) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P^{-n},\varinjlim_I N_i) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

于是利用上图以及五引理可验证链映射 $(\beta_i^\bullet)_*: \varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(P^\bullet,N_i)\to \mathrm{Hom}_R(P^\bullet,\varinjlim_I N_i)$ 所诱导的各次上闭链群以及上边缘链群间的标准同态的正向极限是同构. 由此得到正向极限 $\varinjlim_I \mathrm{Ext}_R^n(M,N_i)$ 到 $\mathrm{Ext}_R^n(M,\varinjlim_I N_i)$ 的标准态射也是同构. 于是得到对任何自然数 $n\in\mathbb{N}$ 有 $\mathrm{Ext}_R^n(M,-)$ 和正向集上正向极限可交换.

充分性: 通过 $n=0$ 的情形以及 [命题1.183] 得到 M 是有有限表现的. 因此只需证明对形如

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0 \tag{1.7}$$

的短正合列, 这里 P 是有限生成投射模, 有: 对每个 $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Ext}_R^n(K,-)$ 和任何正向集上正向极限可交换. 一旦证明该断言, 再用 K 代替 M 重复应用断言, 便可得 M 存在每项都是有限生成投射模的投射分解.

当 $n\geq 1$ 时, 由 $\mathrm{Ext}_R^n(K,-)$ 的定义知有自然同构 $\mathrm{Ext}_R^n(K,-)\cong \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,-)$, 所以根据条件, 只需要说明 $\mathrm{Ext}_R^0(K,-)\cong \mathrm{Hom}_R(K,-)$ 和任何正向集上正向极限可交换即可. 考虑短正合列 (1.7) 导出的长正合列, 有下述交换图 (根据条件以及 P 是有有限表现模, 利用必要性得到竖直方向标记的箭头都是同构):

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(M,\varinjlim_I N_i) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P,\varinjlim_I N_i) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(K,\varinjlim_I N_i) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_R^1(M,\varinjlim_I N_i) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_R^1(P,\varinjlim_I N_i) \\
\varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(M,N_i) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & \varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(P,N_i) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & \varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(K,N_i) \arrow[r] \arrow[u] & \varinjlim_I \mathrm{Ext}_R^1(M,N_i) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"'] & \varinjlim_I \mathrm{Ext}_R^1(P,N_i) \arrow[u, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

由于上图的上下两行正合, 故应用五引理得 $\varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(K,N_i)$ 到 $\mathrm{Hom}_R(K,\varinjlim_I N_i)$ 的标准同态是同构. □

Remark 1.185. 特别地, 如果左 R-模 M 有有限生成投射分解, 那么 $\mathrm{Ext}_R^n(M,-)$ 和直和可交换.

Remark 1.186. 从 [推论1.184] 的证明过程也可以看出如果左 R-模 M 有长度为 $d\in\mathbb{N}$ 的有限生成投射分解, 那么对任何 $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Ext}_R^n(M,-)$ 和任何以正向集为指标集的正向极限可交换, 以及当 $n\geq d+1$ 时有 $\mathrm{Ext}_R^n(M,N)=0,\forall N\in \mathrm{ob}R\text{-}\mathbf{Mod}$. 反之, 如果左 R-模 M 满足有自然数 d 使得对任何自然数 $0\leq n\leq d$, $\mathrm{Ext}_R^n(M,-)$ 与正向集上的正向极限可交换并且当 $n\geq d+1$ 时有 $\mathrm{Ext}_R^n(M,N)=0,\forall N\in \mathrm{ob}R\text{-}\mathbf{Mod}$, 那么 M 有长度不超过 d 的有限生成投射分解. 由此可看出 $\mathrm{Ext}_R^n(M,-)$ 足以反映 M 是否存在有限长的有限生成投射分解.

Remark 1.187. 根据 [推论1.184] 中充分性的证明过程, 把有限生成投射的叙述替换为有限生成自由的叙述便能够得到对任何含幺环 R 上左模 M, M 如果满足对每个 $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Ext}_R^n(M,-)$ 和任何 (以正向集为指标集的) 正向极限可交换, 那么 M 存在有限生成自由分解.

Definition 1.188 ([Sta24])**.** 设 M 是左 R-模, 如果 M 有有限生成投射分解, 那么称 M 是**伪凝聚的**.

Remark 1.189. 于是 [推论1.184] 可重述为左 R-模 M 是伪凝聚模当且仅当对每个 $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Ext}_R^n(M,-)$ 和左 R-模范畴上任何以正向集为指标集的正向极限可交换.

Proposition 1.190 ([Sta24])**.** 设 R 是含幺环, M 是左 R-模. 那么以下三条等价:
(1) M 是伪凝聚的.
(2) M 满足对每个 $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Ext}_R^n(M,-)$ 和左 R-模范畴上任何以正向集为指标集的正向极限可交换.
(3) M 存在有限生成自由分解.

Proof. (1)⇔(2) 来自 [推论1.184], (2)⇒(3) 来自 [注记1.187], (3)⇒(1) 是特殊情况. 这里再记录 (1)⇒(3) 的直接证明: 首先注意到对任何有限生成左 R-模 X, 如果有左 R-模短正合列 $0\longrightarrow K\xrightarrow{f}P\xrightarrow{g}X\longrightarrow 0$ 满足 P,K 是有限生成模, 其中 P 是投射 R-模, 那么存在有限生成投射左 R-模 L 使得 $P\oplus L$ 是有限生成自由左 R-模并且如果记 $\tilde{g}:P\oplus L\to X$ 是标准投射 $P\oplus L\to P$ 与 g 的合成, 则有正合列

$$0\longrightarrow K\oplus L\xrightarrow{f\oplus 1_L}P\oplus L\xrightarrow{\tilde{g}}X\longrightarrow 0,$$

这里 $K\oplus L$ 依然是有限生成左 R-模, $P\oplus L$ 是有限生成自由左 R-模. 现在我们设 M 有有限生成投射分解

$$\cdots\longrightarrow P_2\xrightarrow{d_2}P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon}M\longrightarrow 0,$$

那么对短正合列 $0\longrightarrow \mathrm{Ker}\varepsilon\longrightarrow P_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$ 应用前面的观察, 存在有限生成投射 R-模 L_0 使得 $F_0=P_0\oplus L_0$ 有限生成自由 R-模且有短正合列 $0\longrightarrow \mathrm{Ker}\varepsilon\oplus L_0\longrightarrow F_0\xrightarrow{\tilde{\varepsilon}}M\longrightarrow 0$. 现在

$$0\longrightarrow \mathrm{Ker}d_1\longrightarrow P_1\oplus L_0\xrightarrow{\overline{d_1}\oplus 1_{L_0}}\mathrm{Ker}\varepsilon\oplus L_0\longrightarrow 0$$

是左 R-模短正合列满足 $P_1\oplus L_0$ 是有限生成投射 R-模, $\mathrm{Ker}d_1$ 也是有限生成投射 R-模. 所以应用前面的观察得到存在有限生成投射 R-模 L_1 使得 $F_1=P_1\oplus L_0\oplus L_1$ 是有限生成自由 R-模且

$$0\longrightarrow \mathrm{Ker}d_1\oplus L_1\longrightarrow F_1=P_1\oplus L_0\oplus L_1\xrightarrow{\widetilde{\overline{d_1}\oplus 1_{L_0}}}\mathrm{Ker}\varepsilon\oplus L_0\longrightarrow 0$$

是短正合列. 再对短正合列 $0\longrightarrow \mathrm{Ker}d_2\oplus L_1\longrightarrow P_2\oplus L_1\xrightarrow{\overline{d}_2\oplus 1_{L_1}}\mathrm{Ker}d_1\oplus L_1\longrightarrow 0$ 重复前面的讨论, 归纳地我们便能得到正合列

$$\cdots\longrightarrow F_2\longrightarrow F_1\longrightarrow F_0\xrightarrow{\tilde{\varepsilon}}M\longrightarrow 0$$

满足对每个自然数 i, F_i 是有限生成自由 R-模. 于是得到 M 的有限生成自由分解. □

Remark 1.191. 我们指出使用 [命题1.190] 证明过程中 (1)⇒(3) 的直接证明也可以得到: 对任何上有界 R-模复形 $P^\bullet$, 满足每项 P^i 是有限生成投射 R-模, 则存在上有界 R-模复形 $F^\bullet$ 使得每项 F^k 是有限生成自由 R-模以

及有拟同构 $P^\bullet \to F^\bullet$. 设 $P^\bullet$ 满足 $P^t=0,\forall t\geq m+1$. 则存在有限生成投射 R-模 L^m 使得 $F^m=P^m\oplus L^m$ 是有限生成自由模. 那么也存在有限生成投射 R-模 L^{m-1} 使得 $F^{m-1}=P^{m-1}\oplus L^m\oplus L^{m-1}$ 是有限生成自由模. 定义 $d_F^{m-1}=d_P^{m-1}\oplus 1_{L^m}\oplus 0: F^{m-1}\to F^m$, 那么 $F^m/\mathrm{Im}d_F^{m-1}\cong P^m/\mathrm{Im}d_P^{m-1}$. 现在 $\mathrm{Ker}d_F^{m-1}=\mathrm{Ker}d_P^{m-1}\oplus 0\oplus L^{m-1}$. 设有限生成投射 R-模 L^{m-2} 满足 $F^{m-2}=P^{m-2}\oplus L^m\oplus L^{m-1}\oplus L^{m-2}$ 是有限生成自由模. 命 $d_F^{m-2}=d_P^{m-2}\oplus 0\oplus 1_{L^{m-1}}\oplus 0: F^{m-2}\to F^{m-1}$, 那么 $\mathrm{Im}d_F^{m-2}=\mathrm{Im}d_P^{m-2}\oplus 0\oplus L^{m-1}$. 因此也有 $\mathrm{Ker}d_F^{m-1}/\mathrm{Ker}d_F^{m-2}\cong \mathrm{Ker}d_P^{m-1}/\mathrm{Ker}d_P^{m-2}$. 如此继续, 递归地可构造上有界的有限生成自由复形

$$\cdots \longrightarrow F^{m-2}\xrightarrow{d_F^{m-2}} F^{m-1}\xrightarrow{d_F^{m-1}} F^m\longrightarrow 0\longrightarrow\cdots$$

满足 $P^\bullet$ 到上述复形的标准链映射是拟同构.

Remark 1.192. 如果 R 是左 Noether 环, M 是左 R-模. 那么 M 是有限生成左 R-模当且仅当 M 是伪凝聚模.

Example 1.193. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上代数, 满足有中心子代数 C 使得 C 是仿射 $\Bbbk$-代数并且 A 是有限生成 C-模. 那么 $A^e=A\otimes_\Bbbk A^{op}$ 是双边 Noether 环. 特别地, A 作为左 A^e-模有有限生成投射分解.

Proof. 注意到 $C\otimes_\Bbbk C$ 是交换仿射 $\Bbbk$-代数, 所以 $C\otimes_\Bbbk C$ 是交换 Noether 环. 现在 $C\otimes_\Bbbk C$ 是 $C\otimes_\Bbbk A^{op}$ 的中心子代数并且 $C\otimes_\Bbbk A^{op}$ 是有限生成 $C\otimes_\Bbbk C$-模, 这说明 $C\otimes_\Bbbk A^{op}$ 是双边 Noether 环. 最后, 易见 $A\otimes_\Bbbk A^{op}$ 作为左 $C\otimes_\Bbbk A^{op}$-模和作为右 $C\otimes_\Bbbk A^{op}$-模都是有限生成的, 因此 $A^e=A\otimes_\Bbbk A^{op}$ 是双边 Noether 环. □

Definition 1.194 (完全复形, [Wu]). 设 R 是含幺环, $(X^\bullet,d^\bullet)$ 是 R-模复形. 如果 $(X^\bullet,d^\bullet)$ 和某个有界的并且每项是有限生成投射 R-模的复形 $P^\bullet$ 满足存在拟同构 $P^\bullet\to X^\bullet$, 则称 $(X^\bullet,d^\bullet)$ 是**完全复形** (事实上该条件等价于在说复形 $X^\bullet$ 和 $P^\bullet$ 在导出范畴 $\mathscr{D}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ 中同构, 见 [推论3.38]). 如果 R-模 M 满足将 M 视作集中在 0 次部分的复形后, 为完全复形, 则称 M 是**完全模**.

下面的观察说明完全模就是存在有限长的有限生成投射分解的模. 特别地, 完美模是伪凝聚的.

Proposition 1.195 ([Wu]). 设 R 是含幺环 R, M 是左 R-模. 那么 M 是完全模的充要条件是 M 存在一个有限长的有限生成投射分解.

Proof. 充分性是明显的 (由 M 的有限长的有限生成投射分解直接构造), 这里仅验证必要性. 假设由有限生成投射模构成的有界复形 $(P^\bullet,d^\bullet)$ 满足存在 R-模同态 $\varepsilon: P^0\to M$ 给出下述拟同构:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & P^{-n} \arrow[r, "d^{-n}"] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[u] & P^0 \arrow[r] \arrow[u, "\varepsilon"] & P^1 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & P^t \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}$$

那么 $0\to P^{-n}\xrightarrow{d^{-n}}\cdots\xrightarrow{d^{-2}}P^{-1}\xrightarrow{d^{-1}}P^0$ 是正合列并且有定义合理的模同构

$$\varphi: \mathrm{Ker}d^0/\mathrm{Im}d^{-1}\to M$$
$$x+\mathrm{Im}d^{-1}\mapsto \varepsilon(x)$$

由此立即看到 $\mathrm{Im}d^{-1}=\mathrm{Ker}\varepsilon$ 并且 ε 是满射. 因此我们得到 M 的有限生成投射分解

$$0\longrightarrow P^{-n}\xrightarrow{d^{-n}}\cdots\xrightarrow{d^{-2}}P^{-1}\xrightarrow{d^{-1}}P^0\xrightarrow{\varepsilon}M\longrightarrow 0.$$

□

之后我们会在导出范畴场景讨论伪凝聚复形 (见 [定义3.47]), 完全复形是特殊的伪凝聚复形 (也见 [推论3.96]). 任何模视作集中在 0 次部分的复形是伪凝聚复形当且仅当该模是伪凝聚模 ([命题3.49]).

1.8 Ischebeck 谱序列

本节主要记录滤复形谱序列的初步知识, 主要参考文献是 [Wu09] 和 [Wei94]. 谱序列是进行 (上) 同调计算的高效工具. 一般地, 它并不能直接精确计算出同调, 但它依然能够提供一些同调信息. 之后主要关心模范畴中的上同调谱序列. 在 [注记1.74] 中我们已经介绍了模范畴中复形的滤以及滤的有界性的概念. 关于复形的滤, 这里多引入一个术语: 如果 R-模复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 有滤 $\{F^pX^\bullet\}_{p\in\mathbb{Z}}$ 满足对每个 $n\in\mathbb{Z}$, $X^n=\cup_{p\in\mathbb{Z}}F^pX^n$, 则称该滤是**竭尽的**. 对模自然可引入滤的术语 (或将模视作集中在 0 次位置的复形): 对若左 R-模 M 有子模链 $\cdots\subseteq F^{p+1}M\subseteq F^pM\subseteq F^{p-1}M\subseteq\cdots\subseteq M$, 则称该子模链 $\{F^iM|i\in\mathbb{Z}\}$ 是 M 的**滤** (当然, 我们能够利用子对象链对范畴中的对象定义滤). 类似于复形可以定义模的滤是**上有界**或**下有界的**. 称 M 的既有上界又有下界的滤是**有限的**. 即形如

$$0=F^sM\subseteq\cdots\subseteq F^{p+1}M\subseteq F^pM\subseteq F^{p-1}M\subseteq\cdots\subseteq\cdots\subseteq F^tM=M.$$

一旦 M 有上述有限滤, 那么每个 F^iM 是 $F^iM/F^{i+1}M$ 被 $F^{i+1}M$ 的扩张, 于是知如果我们已经得到了商模族 $\{F^{s-1}M/F^sM,...,F^tM/F^{t+1}M\}$ 的所有信息, 那么 M 就是这有限个商模之间做有限次扩张可得产物. 进而我们可以近似地获取 M 的信息. 基于这种想法, 对某上链复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 的 n 次上同调 $H^n(X)$, 如果它有有限滤 $0=F^sH^n(X)\subseteq\cdots\subseteq F^{p+1}H^n(X)\subseteq F^pH^n(X)\subseteq F^{p-1}H^n(X)\subseteq\cdots\subseteq\cdots\subseteq F^tH^n(X)=H^n(X)$, 那么我们可以从 $\{F^pH^n(X)/F^{p+1}H^n(X)|p\in\mathbb{Z}\}$ 中获取上同调群 $H^n(X)$ 的信息.

我们将看到任何一个带滤的上链复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 都可以产生一个谱序列 $E_{\geq a}^{\bullet\bullet}$(见下面的 [定义1.196]), 并且当该上链复形的滤有界时, $E_{\geq a}^{\bullet\bullet}$ 是有界谱序列并且每个极限项 $E_\infty^{pq}\cong F^pH^{p+q}(X)/F^{p+1}H^{p+q}(X)$. 即可以从复形的滤出发来近似计算其上同调. 实际应用中, 上链复形的滤很有可能是无界的.

Definition 1.196 (上同调谱序列, [Wu09]). 设 a 是固定的整数, $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴. $\mathcal{A}$ 中的一个**从第 a 页开始的上同调谱序列** $E_{\geq a}^{\bullet\bullet}$ 由以下三部分构成:
(1) 对每个整数组 (p,q) 和整数 $r\geq a$, 对应一对象 $E_r^{pq}\in\mathrm{ob}\mathcal{A}$, 即有对象集 $\{E_r^{pq}\in\mathrm{ob}\mathcal{A}|p,q\in\mathbb{Z},r\geq a\}$.
(2) 对每个 E_r^{pq}, 有态射 $d_r^{pq}:E_r^{pq}\to E_r^{p+r,q-r+1}$, 满足 $d_r^{pq}d_r^{p-r,q+r-1}=0$.
(3) 对每个整数组 (p,q) 和 $r\geq a$, 有同构 $E_{r+1}^{pq}\cong\mathrm{Ker}d_r^{pq}/\mathrm{Im}d_r^{p-r,q+r-1}$.

Remark 1.197. 谱序列定义中的 (1) 可理解为: 对固定的整数 $r\geq a$, r 表示“一本从第 a 页 (每页是一个平面 $\mathbb{R}^2$) 开始的纸张尺寸无穷大的书”的“页数”. 在第 r 页, 或者说第 r 个平面 $\mathbb{R}^2$ 中每个整数格点 $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$ 处放置一个对象 E_r^{pq}. 这里 $p+q$ 称为 E_r^{pq} 的**全次数**. E_r^{pq} 的全次数为 n 意味着它被置于第 r 个平面中的直线 $x+y=n$ 上. 定义中的 (2) 可理解为: 在第 r 个平面中, 穿过 E_r^{pq} 且斜率为 $-\frac{r-1}{r}$ 的直线上一些横坐标相隔 r 的对象 E_r^{pq} 和从它出发的态射 d_r^{pq} 全体可构成一上链复形. 定义中的 (3) 可理解为: 在第 $r+1$ 页中, 位于 (p,q) 格点的对象 E_{r+1}^{pq} 可由前一页穿过 E_r^{pq} 且斜率为 $-\frac{r-1}{r}$ 的直线上的复形在 E_r^{pq} 位置处的上同调对象计算.

Example 1.198. 设 $E_{\geq 0}^{\bullet\bullet}$ 为 Abel 范畴中第 0 页开始的谱序列. 那么该谱序列第 0 页 $E_0^{\bullet\bullet}$ 形如

$$\begin{tikzcd}
E_0^{-2,2} & E_0^{-1,2} & E_0^{02} & E_0^{12} & E_0^{22} \\
E_0^{-2,1} \arrow[u] & E_0^{-1,1} \arrow[u] & E_0^{01} \arrow[u] & E_0^{11} \arrow[u] & E_0^{21} \arrow[u] \\
E_0^{-2,0} \arrow[u] & E_0^{-1,0} \arrow[u] & E_0^{00} \arrow[u] & E_0^{10} \arrow[u] & E_0^{20} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Example 1.199. 设 $E_{\geq 0}^{\bullet\bullet}$ 为 Abel 范畴中第 0 页开始的谱序列. 那么该谱序列第 1 页 $E_1^{\bullet\bullet}$ 形如

$$\begin{tikzcd}
E_1^{-2,2} \arrow[r] & E_1^{-1,2} \arrow[r] & E_1^{02} \arrow[r] & E_1^{12} \arrow[r] & E_1^{22} \\
E_1^{-2,1} \arrow[r] & E_1^{-1,1} \arrow[r] & E_1^{01} \arrow[r] & E_1^{11} \arrow[r] & E_1^{21} \\
E_1^{-2,0} \arrow[r] & E_1^{-1,0} \arrow[r] & E_1^{00} \arrow[r] & E_1^{10} \arrow[r] & E_1^{20}
\end{tikzcd}$$

Example 1.200. 设 $E_{\geq 0}^{\bullet\bullet}$ 为 Abel 范畴中第 0 页开始的谱序列. 那么该谱序列第 2 页 $E_2^{\bullet\bullet}$ 形如

$$\begin{tikzcd}
E_2^{-3,2} \arrow[drr] & E_2^{-2,2} \arrow[drr] & E_2^{-1,2} \arrow[drr] & E_2^{02} \arrow[drr] & E_2^{12} \arrow[drr] & E_2^{22} & \\
E_2^{-3,1} \arrow[drr] & E_2^{-2,1} \arrow[drr] & E_2^{-1,1} \arrow[drr] & E_2^{01} \arrow[drr] & E_2^{11} \arrow[drr] & E_2^{21} & E_2^{31} \\
& E_2^{-2,0} & E_2^{-1,0} & E_2^{00} & E_2^{10} & E_2^{20} & E_2^{30}
\end{tikzcd}$$

Definition 1.201 (有界谱序列, [Wu09, Wei94])**.** 设 $E_{\geq a}^{\bullet\bullet}$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的 (上同调) 谱序列. 如果对每个整数 n, 谱序列首页全次数是 n 的项 (即满足 $p+q=n$ 的项 E_a^{pq}) 只有有限多项非零, 则称该谱序列是**有界的**. 如果对每个整数 n, $E_a^{\bullet\bullet}$ 满足当 p 充分大时, $E_a^{p,n-p}=0$(即谱序列首页全次数是 n 的项只要纵坐标充分小就是零对象), 那么称该谱序列是**下有界的**. 如果 (未必有界的) 谱序列 $E_{\geq a}^{\bullet\bullet}$ 满足对固定的整数 p,q, 当 r 充分大时, 有 $d_r^{pq}=0$, 则称该谱序列是**正则的**.

Remark 1.202. 如果 $E_{\geq a}^{\bullet\bullet}$ 是有界谱序列, 那么对固定的整数 p,q, 存在整数 $r_0\geq a$ 使得 $d_r^{pq}=0, d_r^{p-r,q+r-1}=0$, 这说明 $E_r^{pq}\cong E_{r+1}^{pq}\cong E_{r+1}^{pq}\cong\cdots$(在模范畴场景, 我们可以将这族稳定对象视作等同 $E_r^{pq}=E_{r+1}^{pq}=\cdots$). 这时对固定的整数 p,q, 我们可以取定 $E_\infty^{pq}\in\mathrm{ob}\mathcal{A}$ 使得 $E_\infty^{pq}\cong E_r^{pq},\forall r\geq r_0$, **当讨论有界谱序列时, 我们对每个** p,q, **固定** E_∞^{pq} **的选取**. 事实上, 只要谱序列 $E_a^{\bullet\bullet}$ 是下有界的, 那么对固定的 p,q, 当 r 充分大时总有 $d_r^{pq}=0$. 所以下有界谱序列是正则谱序列.

设 $E_{\geq a}^{\bullet\bullet}$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中有界 (上同调) 谱序列, $H^*=\{H^n|n\in\mathbb{Z}\}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的对象集. 如果对每个 n, H^n 有有限 (子对象) 滤 $0=F^sH^n\subseteq\cdots\subseteq F^{p+1}H^n\subseteq F^pH^n\subseteq F^{p-1}H^n\subseteq\cdots\subseteq\cdots\subseteq F^tH^n=H^n$ 使得 $E_\infty^{pq}\cong F^pH^{p+q}/F^{p+1}H^{p+q},\forall p,q\in\mathbb{Z}$, 那么称该谱序列**收敛**到 $H^*=\{H^n|n\in\mathbb{Z}\}$, 记为 $E_a^{pq}\Rightarrow H^{p+q}$. 有时对某个 $r_0\geq a$, 可明确写出 $E_{r_0}^{pq}$ 表达式时, 也记作 $E_{r_0}^{pq}\Rightarrow H^{p+q}$(事实上, 从 $E_{\geq a}^{\bullet\bullet}$ 定义出的 $E_{\geq r_0}^{pq}$ 依然是有界谱序列).

接下来我们局限在 R-模范畴讨论上同调谱序列. 设 $E_{\geq a}^{pq}$ 是 R-模范畴中的谱序列, 对每个整数 p,q,r, 记 $B_a^{pq}=0, B_{a+1}^{pq}=\mathrm{Im}d_a^{p-r,q+r-1}$ 以及 $Z_a^{pq}=E_a^{pq}, Z_{a+1}^{pq}=\mathrm{Ker}d_a^{pq}$, 那么 $B_a^{pq}\subseteq B_{a+1}^{pq}\subseteq Z_{a+1}^{pq}\subseteq Z_a^{pq}\subseteq E_a^{pq}$ 以及 $E_{a+1}^{pq}\cong Z_{a+1}^{pq}/B_{a+1}^{pq}$. 递归地, 我们能够得到 E_a^{pq} 的子模链

$$B_a^{pq}\subseteq B_{a+1}^{pq}\subseteq\cdots\subseteq B_r^{pq}\subseteq B_{r+1}^{pq}\subseteq\cdots B_\infty^{pq}\subseteq Z_\infty^{pq}\subseteq\cdots\subseteq Z_{r+1}^{pq}\subseteq Z_r^{pq}\subseteq\cdots\subseteq Z_{a+1}^{pq}\subseteq Z_a^{pq},$$

其中 $B_\infty^{pq}=\cup_{r\geq a}B_r^{pq}$ 以及 $Z_\infty^{pq}=\cap_{r\geq a}Z_r^{pq}$ 且满足 $Z_r^{pq}/B_r^{pq}\cong E_r^{pq},\forall r\geq a$. 如果定义 $E_\infty^{pq}=Z_\infty^{pq}/B_\infty^{pq}$, 那么当 $E_{\geq a}^{pq}$ 是有界谱序列时, 和 [注记1.202] 中的定义一致.

现在给定 R-模滤 (上链) 复形 $(C^\bullet,d^\bullet)$, 其上滤为 $\{F^pC^\bullet\}_{p\in\mathbb{Z}}$. **将说明滤复形可自然地诱导一个谱序列.**

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{n-2} \arrow[r, "d^{n-2}"] & C^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] & C^n \arrow[r, "d^n"] & C^{n+1} \arrow[r, "d^{n+1}"] & C^{n+2} \arrow[r, "d^{n+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & F^pC^{n-2} \arrow[r] \arrow[u] & F^pC^{n-1} \arrow[r] \arrow[u] & F^pC^n \arrow[r] \arrow[u] & F^pC^{n+1} \arrow[r] \arrow[u] & F^pC^{n+2} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & F^{p+1}C^{n-2} \arrow[r] \arrow[u] & F^{p+1}C^{n-1} \arrow[r] \arrow[u] & F^{p+1}C^n \arrow[r] \arrow[u] & F^{p+1}C^{n+1} \arrow[r] \arrow[u] & F^{p+1}C^{n+2} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & F^{p+2}C^{n-2} \arrow[r] \arrow[u] & F^{p+2}C^{n-1} \arrow[r] \arrow[u] & F^{p+2}C^n \arrow[r] \arrow[u] & F^{p+2}C^{n+1} \arrow[r] \arrow[u] & F^{p+2}C^{n+2} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}$$

对每个 $p,q\in\mathbb{Z},r\in\mathbb{N}$, 定义

$$A_r^{pq}=\{x\in F^pC^{p+q}|d(x)\in F^{p+r}C^{p+q+1}\}, A_0=F^pC^{p+q},$$

$$Z_r^{pq}=\frac{A_r^{pq}+F^{p+1}C^{p+q}}{F^{p+1}C^{p+q}}\subseteq\frac{F^pC^{p+q}}{F^{p+1}C^{p+q}}=Z_0^{pq},$$

$$B_r^{pq}=\frac{d(A_{r-1}^{p-r+1,q+r-2})+F^{p+1}C^{p+q}}{F^{p+1}C^{p+q}}\subseteq Z_r^{pq}\subseteq\frac{F^pC^{p+q}}{F^{p+1}C^{p+q}}.$$

这里 A_r^{pq} 是 F^pC^{p+q} 中那些微分作用后落在 $F^{p+r}C^{p+q+1}$ 中的元素构成的 F^pC^{p+q} 的子模, Z_r^{pq} 为 A_r^{pq} 在 $F^pC^{p+q}/F^{p+1}C^{p+q}$ 中的像集给出的子模, B_r^{pq} 是那些 $F^{p-r+1}C^{p+q-1}$ 经微分作用后落在 F^pC^{p+q} 内的元素全体 (即 $A_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}$) 关于微分的像集 (那么一定是 A_r^{pq} 的子模) 所对应在 $F^pC^{p+q}/F^{p+1}C^{p+q}$ 内的子模. 根据定义知 $A_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}\subseteq F^{p-r+1}C^{p+q-1}$ 满足 $d(A_{r-1}^{p-r+1,q+r-2})\subseteq F^pC^{p+q}$.

对固定的整数 p,q 以及 $r\geq 1$. 如果 $x\in A_r^{pq}$, 那么 $x\in F^pC^{p+q}$ 并有 $d(x)\in F^{p+r}C^{p+q+1}\subseteq F^{p+r-1}C^{p+q+1}$. 这说明 $\cdots\subseteq A_{r+1}^{pq}\subseteq A_r^{pq}\subseteq A_{r-1}^{pq}\subseteq\cdots\subseteq A_0^{pq}$. 故有升链 $\cdots\subseteq Z_{r+1}^{pq}\subseteq Z_r^{pq}\subseteq\cdots\subseteq Z_1^{pq}\subseteq Z_0^{pq}$.

对固定的整数 p,q 和 $r\in\mathbb{N}$. 如果 $x\in A_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}$, 那么 $d(x)\in F^{p-r+1}C^{p+q-1}$, 这说明 $A_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}\subseteq A_r^{p,q+r-1}$. 于是得到 $F^pC^{p+q}/F^{p+1}C^{p+q}$ 的子模升链 $0=B_0^{pq}\subseteq B_1^{pq}\subseteq\cdots\subseteq B_r^{pq}\subseteq B_{r+1}^{pq}\subseteq\cdots\subseteq Z_{r+1}^{pq}\subseteq Z_r^{pq}\subseteq\cdots\subseteq Z_1^{pq}\subseteq Z_0^{pq}$. 现在我们利用前面的记号定义

$$Z_\infty^{pq}=\bigcap_{r\geq 0}Z_r^{pq}=\frac{\cap_{r=0}^\infty\left(A_r^{pq}+F^{p+1}C^{p+q}\right)}{F^{p+1}C^{p+q}}\subseteq\frac{F^pC^{p+q}}{F^{p+1}C^{p+q}}$$

$$B_\infty^{pq}=\bigcup_{r\geq 0}B_r^{pq}=\frac{\cup_{r=0}^\infty\left(d(A_{r-1}^{p-r+1,q+r-2})+F^{p+1}C^{p+q}\right)}{F^{p+1}C^{p+q}}\subseteq\frac{F^pC^{p+q}}{F^{p+1}C^{p+q}}$$

作为 $F^pC^{p+q}/F^{p+1}C^{p+q}$ 的升子模列 $\{B_r^{pq}\}_{r=0}^\infty$ 与降子模列 $\{Z_r^{pq}\}_{r=0}^\infty$ 的极限项.

Lemma 1.203 ([Wu09]). 若给定的滤复形 $(C^\bullet, d^\bullet)$ 的滤 $\{F^iC^\bullet | i \in \mathbb{Z}\}$ 是竭尽的, 则升子模列 $\{B_r^{pq}\}_{r=0}^\infty$ 极限项

$$B_\infty^{pq} = \frac{d(C^{p+q-1}) \cap F^pC^{p+q} + F^{p+1}C^{p+q}}{F^{p+1}C^{p+q}}.$$

Proof. 因为 $A_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} \subseteq F^{p-r+1}C^{p+q-1}$, 所以 B_∞^{pq} 是上式右边的子模是明显的. 因为这时滤复形上的滤是竭尽的, 所以等式右边任何元素形如 $d(x) + F^{p+1}C^{p+q}$, 其中 $x \in F^kC^{p+q-1}$ 满足 $d(x) \in F^pC^{p+q}$. 如果 $k > p$, 那么 $x \in F^pC^{p+q-1} = A_0^{p,q-1}$, 进而 $d(x) + F^{p+1}C^{p+q} \in B_1^{pq} \subseteq B_\infty^{pq}$. 如果 $k \leq p$, 那么 $x \in A_{p-k}^{k,p+q-1-k}$. 于是 $d(x) + F^{p+1}C^{p+q} \in B_{p-k+1}^{pq} \subseteq B_\infty^{pq}$. 由此得到要证结论等号右边是 B_∞^{pq} 的子模. $\square$

再定义 $E_r^{pq} = Z_r^{pq}/B_r^{pq}$, 那么 $E_0^{pq} = F^pC^{p+q}/F^{p+1}C^{p+q}$. 于是我们可以用 $d^{p+q} : C^{p+q} \to C^{p+q+1}$ 自然定义出同态 $d_0^{pq} : E_0^{pq} \to E_0^{p,q+1}$. 对一般的 $r \geq 1$, 有标准同构

$$E_r^{pq} \cong \frac{A_r^{pq} + F^{p+1}C^{p+q}}{d(A_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}) + F^{p+1}C^{p+q}}.$$

结合 $d(A_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}) \subseteq A_r^{pq}$ 得到进一步有标准同构:

$$E_r^{pq} \cong \frac{A_r^{pq} + F^{p+1}C^{p+q}}{d(A_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}) + F^{p+1}C^{p+q}} \cong \frac{A_r^{pq}}{d(A_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}) + F^{p+1}C^{p+q} \cap A_r^{pq}}.$$

将上述标准同构链中指标 p 改为 $p+r$, q 改为 $q-r+1$, 我们得到标准同构

$$E_r^{p+r,q-r+1} \cong \frac{A_r^{p+r,q-r+1} + F^{p+r+1}C^{p+q+1}}{d(A_{r-1}^{p+1,q-1}) + F^{p+r+1}C^{p+q+1}} \cong \frac{A_r^{p+r,q-r+1}}{d(A_{r-1}^{p+1,q-1}) + F^{p+r+1}C^{p+q+1} \cap A_r^{p+r,q-r+1}}.$$

进而我们能够通过下图定义出唯一使得下图交换的同态 $d_r^{pq} : E_r^{pq} \to E_r^{p+r,q-r+1}$:

$$\begin{tikzcd}
E_r^{pq} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, dashed, "d_r^{pq}"'] & \frac{A_r^{pq}+F^{p+1}C^{p+q}}{d(A_{r-1}^{p-r+1,q+r-2})+F^{p+1}C^{p+q}} \arrow[r, "\cong"] & \frac{A_r^{pq}}{d(A_{r-1}^{p-r+1,q+r-2})+F^{p+1}C^{p+q}\cap A_r^{pq}} \arrow[d, "\overline{d}"] \\
E_r^{p+r,q-r+1} \arrow[r, "\cong"] & \frac{A_r^{p+r,q-r+1}+F^{p+r+1}C^{p+q+1}}{d(A_{r-1}^{p+1,q-1})+F^{p+r+1}C^{p+q+1}} \arrow[r, "\cong"] & \frac{A_r^{p+r,q-r+1}}{d(A_{r-1}^{p+1,q-1})+F^{p+r+1}C^{p+q+1}\cap A_r^{p+r,q-r+1}}
\end{tikzcd}$$

上图中 $\overline{d}$ 表示由复形微分 $d : C^{p+q} \to C^{p+q+1}$ 诱导的标准映射. 于是对任何 E_r^{pq} 中的元素, 如果表示为关于 B_r^{pq} 的陪集, 陪集代表元设为 $a + F^{p+1}C^{p+q}$, 这里 $a \in A_r^{pq}$, 那么 E_r^{pq} 中的此元素在 d_r^{pq} 作用下的像为以 $d(a) + F^{p+r+1}C^{p+q+1}$ 为代表元的关于 $B_r^{p+r,q-r+1}$ 的陪集. 由于这里的同态 d_r^{pq} 使用复形微分构造, 所以自然有 $d_r^{pq}d_r^{p-r,q+r-1} = 0$(当 $r = 0$ 时同理). 我们通过下述引理来说明 $E_{\geq 0}^{\bullet\bullet}$ 是上同调谱序列:

Lemma 1.204 ([Wu09]). 对滤复形 $(C^\bullet, d^\bullet)$ 以及上述定义的 $d_r^{pq} : E_r^{pq} \to E_r^{p+r,q-r+1}$, 有标准分解

$$\begin{tikzcd}
E_r^{pq} \arrow[r, "d_r^{pq}"] \arrow[d] & E_r^{p+r,q-r+1} \\
Z_r^{pq}/Z_{r+1}^{pq} \arrow[r, "d'"] & B_{r+1}^{p+r,q-r+1}/B_r^{p+r,q-r+1} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

那么这里 d' 是同构. 特别地, 总有 $\mathrm{Ker} d_r^{pq} = Z_{r+1}^{pq}/B_r^{pq}$ 以及 $\mathrm{Im} d_r^{p-r,q+r-1} = B_{r+1}^{pq}/B_r^{pq}$.

Proof. 根据映射 $d_r^{pq}: E_r^{pq} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ 的定义, 我们有下述标准交换图:

$$
\begin{tikzcd}
\frac{Z_r^{pq}}{Z_{r+1}^{pq}} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "d'"'] & \frac{A_r^{pq}+F^{p+1}C^{p+q}}{A_{r+1}^{pq}+F^{p+1}C^{p+q}} \arrow[r, "\cong"] & \frac{A_r^{pq}}{A_{r+1}^{pq}+A_{r-1}^{p+1,q-1}} \arrow[d, "\overline{d'}"] \\
\frac{B_{r+1}^{p+r,q-r+1}}{B_r^{p+r,q-r+1}} \arrow[r, "\cong"] & \frac{d(A_r^{pq}+F^{p+r+1}C^{p+q+1})}{d(A_{r-1}^{p+1,q-1})+F^{p+r+1}C^{p+q+1}} \arrow[r, "\cong"] & \frac{d(A_r^{pq})}{d(A_{r-1}^{p+1,q-1})+d(A_{r+1}^{pq})}
\end{tikzcd}
$$

其中上行右边的同构来自 $A_r^{pq} \cap F^{p+1}C^{p+q} = A_{r-1}^{p+1,q-1}$, 下行右边的同构来自 $A_r^{pq} \supseteq A_{r-1}^{p+1,q-1}$ 以及 $d(A_{r+1}^{pq}) = d(A_r^{pq}) \cap F^{p+r+1}C^{p+q+1}$. 要证明标准映射 d' 是同构, 只要证 $\overline{d'}: A_r^{pq}/(A_{r+1}^{pq}+A_{r-1}^{p+1,q-1}) \to d(A_r^{pq})/(d(A_{r-1}^{p+1,q-1})+d(A_{r+1}^{pq}))$ 是同构. 而 $\overline{d'}$ 明显是满射, 所以还需要验证 $\overline{d'}$ 是单射. 如果有 $x \in A_r^{pq} \subseteq F^pC^{p+q}$ 满足存在 $y \in A_{r-1}^{p+1,q-1}, z \in A_{r+1}^{pq}$ 使得 $d(x) = d(y) + d(z)$. 那么 $x - y - z \in \mathrm{Ker}d \cap F^pC^{p+q} \subseteq A_r^{pq}$, 故 $\overline{d'}$ 是单射. □

Proposition 1.205 (滤复形谱序列, [Wu09]). 对滤复形 $(C^\bullet, d^\bullet)$, 前面构造的 E_r^{pq} 以及同态 $d_r^{pq}: E_r^{pq} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ 给出从第 0 页开始的上同调谱序列 $E_{\geq 0}^{\bullet\bullet}$, 称为**给定滤复形诱导的谱序列**.

Proof. 前面已经说明了对每个 E_r^{pq} 处相邻微分满足 $d_r^{pq}d_r^{p-r,q+r-1} = 0$. 从 [引理1.204] 知 $\mathrm{Ker}d_r^{pq}/\mathrm{Im}d_r^{p-r,q+r-1} \cong Z_{r+1}^{pq}/B_{r+1}^{pq} = E_{r+1}^{pq}$, 所以 $E_{\geq 0}^{\bullet\bullet}$ 是上同调谱序列. □

Remark 1.206. 该谱序列的第 0 页满足 $E_0^{pq} = F^pC^{p+q}/F^{p+1}C^{p+q}$, 第 1 页满足 $E_1^{pq} = H^{p+q}(F^pC/F^{p+1}C)$.

Remark 1.207. 如果滤复形上给定的滤是有界的, 那么该滤复形的谱序列的第 0 页满足对固定的整数 n, 使得 $p + q = n$ 的非零项 E_0^{pq} 至多有限项. 因此滤复形上的滤的有界性蕴含谱序列是有界的.

我们指出滤复形上的滤也可诱导复形上同调上的滤. 固定整数 n, 对每个整数 p, 定义:

$$F^pH^n(C) = \frac{\mathrm{Ker}d^n \cap F^pC^n + d(C^{n-1})}{d(C^{n-1})}. \tag{1.8}$$

那么明显有 $\cdots \subseteq F^{p+1}H^n(C) \subseteq F^pH^n(C) \subseteq F^{p-1}H^n(C) \subseteq \cdots \subseteq H^n(C)$. 如果复形的滤是竭尽的, 那么也有

$$H^n(C) = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} F^pH^n(C). \tag{1.9}$$

对一般的滤复形 $(C^\bullet, d^\bullet)$, 根据前面引入的上同调群上的滤, 总有

$$\frac{F^pH^n(C)}{F^{p+1}H^n(C)} \cong \frac{\mathrm{Ker}d^n \cap F^pC^n}{\mathrm{Ker}d^n \cap F^{p+1}C^n + d(C^{n-1}) \cap F^pC^n}.$$

回忆前面引入的记号

$$Z_\infty^{pq} = \frac{\cap_{r=0}^\infty (A_r^{pq} + F^{p+1}C^{p+q})}{F^{p+1}C^{p+q}} \text{ 以及 } B_\infty^{pq} = \frac{\cup_{r=0}^\infty \left(d(A_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}) + F^{p+1}C^{p+q}\right)}{F^{p+1}C^{p+q}}.$$

现在对每个整数 p, q, 记 $E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq}/B_\infty^{pq}$(这是 $F^pC^{p+q}/F^{p+1}C^{p+q}$ 两个子模之商) 以及

$$z_\infty^{pq} = \frac{\mathrm{Ker}d \cap F^pC^{p+q} + F^{p+1}C^{p+q}}{F^{p+1}C^{p+q}} \subseteq Z_\infty^{pq}, e_\infty^{pq} = z_\infty^{pq}/B_\infty^{pq} \subseteq E_\infty^{pq}.$$

Lemma 1.208 ([Wu09])**.** 给定滤复形 $(C^\bullet, d^\bullet)$. 那么当滤是竭尽的时, 对任何整数 p, q 有

$$e_\infty^{pq} \cong \frac{\mathrm{Ker} d \cap F^pC^{p+q}}{d(C^{p+q-1}) \cap F^pC^{p+q} + \mathrm{Ker} d^{p+q} \cap F^{p+1}C^{p+q}}.$$

特别地, 当 $p+q=n$ 时, 有 $e_\infty^{pq} \cong F^pH^n(C)/F^{p+1}H^n(C)$.

Proof. 根据 e_∞^{pq} 的定义和 [引理1.203], 只需验证 $(\mathrm{Ker} d^{p+q} \cap F^pC^{p+q}) \cap (d(C^{p+q-1}) \cap F^pC^{p+q} + F^{p+1}C^{p+q})$ 就是 $d(C^{p+q-1}) \cap F^pC^{p+q} + \mathrm{Ker} d^{p+q} \cap F^{p+1}C^{p+q}$, 而这是明显的. □

Remark 1.209. 如果滤复形 $(C^\bullet, d^\bullet)$ 的滤是下有界的, 那么对固定的整数 n, 当整数 p 充分大时, 有 $E_\infty^{pq} = e_\infty^{pq}$. 因此当复形的滤既竭尽又有下界时, 对充分大的整数 p, 有 $F^pH^n(C) = F^{p+1}H^n(C) = F^{p+2}H^n(C) = \cdots = 0$. 如果滤复形的滤是有上界的, 那么根据复形上同调的滤的定义可知对固定的整数 n, 当整数 p 充分小时, 有 $F^pH^n(C) = H^n(C)$. 更进一步, 只要滤复形的滤是下有界的, 那么对固定的整数 p, q, 只要整数 r 充分大, 那么 $A_r^{pq} = A_{r+1}^{pq} = \cdots = \mathrm{Ker} d \cap F^pC^{p+q}$, 进而

$$Z_\infty^{pq} = \frac{\mathrm{Ker} d \cap F^pC^{p+q} + F^{p+1}C^{p+q}}{F^{p+1}C^{p+q}}.$$

只要滤复形的滤是上有界的, 那么对充分大的整数 r, 有 $d(A_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}) = \mathrm{Im} d \cap F^pC^{p+q}$. 这时

$$B_\infty^{pq} = \frac{\mathrm{Im} d \cap F^pC^{p+q} + F^{p+1}C^{p+q}}{F^{p+1}C^{p+q}}.$$

当滤复形 $(C^\bullet, d^\bullet)$ 的滤是有界滤时, [注记1.205] 指出滤复形的谱序列也是有界的. 注意到这时滤自然是竭尽的, 所以 [引理1.208] 说明对任何整数 n 和满足 $p+q=n$ 的指标 p, q, 有 $e_\infty^{pq} \cong F^pH^n(C)/F^{p+1}H^n(C)$. 并且 [注记1.209] 说明这时 $Z_\infty^{pq} = z_\infty^{pq}$, 所以也有 $E_\infty^{pq} \cong F^pH^n(C)/F^{p+1}H^n(C)$. 于是结合 [引理1.204] 知我们证明了

Theorem 1.210 (有界滤复形的经典收敛定理, [Wei94])**.** 设滤复形 $(C^\bullet, d^\bullet)$ 的滤是有界的. 那么 [命题1.205] 意义下的谱序列 $E_{\geq 0}^{\bullet\bullet}$ 满足对每个整数 n, 上同调群 $H^n(C)$ 上通过 (1.8) 定义出的标准滤 $\{F^pH^n(C) | p \in \mathbb{Z}\}$ 有 $E_\infty^{pq} \cong F^pH^{p+q}(C)/F^{p+1}H^{p+q}(C)$. 即谱序列 $E_{\geq 0}^{\bullet\bullet}$ 收敛到 $H^*(C) = \{H^n(C) | n \in \mathbb{Z}\}$, 有 $E_0^{pq} \Rightarrow H^{p+q}(C)$.

[引理1.203] 和 [注记1.209] 使我们也能讨论带有下有界且竭尽的滤的滤复形谱序列的收敛性.

Theorem 1.211 (滤复形谱序列的经典收敛定理, [Wei94])**.** 设滤复形 $(C^\bullet, d^\bullet)$ 上的滤既是下有界的又是竭尽的.
(1) 谱序列的第 $0, 1$ 页满足: $E_0^{pq} = F^pC^{p+q}/F^{p+1}C^{p+q}, E_1^{pq} = H^{p+q}(F^pC/F^{p+1}C)$.
(2) 考虑 (1.8) 定义出的给定复形的上同调的标准滤. 对每个整数 p, q, 有

$$E_\infty^{pq} \cong F^pH^{p+q}(C)/F^{p+1}H^{p+q}(C).$$

这时也称滤复形谱序列 $E_{\geq 0}^{\bullet\bullet}$ 收敛到 $H^*(C) = \{H^n(C) | n \in \mathbb{Z}\}$, 并记作 $E_0^{pq} \Rightarrow H^{p+q}(C)$.

Proof. (1) 来自滤复形谱序列的构造. (2) 来自 [引理1.203] 和 [注记1.209]. □

Remark 1.212. 如果滤复形 $(C^\bullet, d^\bullet)$ 上的滤有下界且竭尽, 那么 (1.9) 保证了对固定的整数 n, $F^pH^n(C)$ 关于所有整数 p 取并就是 $H^n(C)$. 因此如果进一步谱序列第 r 页满足全次数是 n 的项只有一项非零, 那么这项给出滤复形的 n 次上同调.

在 [定义1.71] 介绍了加性范畴上的双复形并且在 [注记1.74] 中我们看到双复形的全复形会有两个自然的滤: 行滤和列滤. 现在我们将前面对滤复形谱序列的讨论应用到双复形的全复形上.

Example 1.213 (双复形的谱序列, [Wu09]). 设 R 是含幺环, 考虑 R-**Mod** 中的双复形 $(C^{\bullet\bullet}, d_v^{\bullet\bullet}, d_h^{\bullet\bullet})$:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & C^{p-1,q+1} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{p-1,q+1}"] & C^{p,q+1} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{p,q+1}"] & C^{p+1,q+1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{p-1,q} \arrow[u, "d_v^{p-1,q}"] \arrow[r, "d_h^{p-1,q}"] & C^{p,q} \arrow[u, "d_v^{p,q}"] \arrow[r, "d_h^{p,q}"] & C^{p+1,q} \arrow[u, "d_v^{p+1,q}"] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{p-1,q-1} \arrow[u, "d_v^{p-1,q-1}"] \arrow[r, "d_h^{p-1,q-1}"] & C^{p,q-1} \arrow[u, "d_v^{p,q-1}"] \arrow[r, "d_h^{p,q-1}"] & C^{p+1,q-1} \arrow[u, "d_v^{p+1,q-1}"] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

考虑上述双复形的全复形 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{\bullet}$. 先看其列滤 $\{{}^{\mathrm{I}}F^p(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet}))^{\bullet} | p \in \mathbb{Z}\}$. 那么对每个整数 p, q, 有

$$E_0^{pq} = \frac{{}^{\mathrm{I}}F^p(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet}))^{\bullet}}{{}^{\mathrm{I}}F^{p+1}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet}))^{\bullet}} \cong C^{pq}.$$

并且 $d_0^{pq} : E_0^{pq} \to E_0^{p,q+1}$ 作为由全复形微分 (回忆 [例1.73]) 诱导的映射满足下述标准交换图:

$$\begin{tikzcd}
E_0^{pq} \arrow[r, "d_0^{pq}"] \arrow[d, "\cong"'] & E_0^{p,q+1} \arrow[d, "\cong"] \\
C^{pq} \arrow[r, "d_v^{pq}"] & C^{p,q+1}
\end{tikzcd}$$

于是有 $E_1^{pq} \cong H_v^q(C^{p\bullet})$, 这里 $H_v^q(C^{p\bullet})$ 表示双复形 $(C^{\bullet}, d_v^{\bullet\bullet}, d_h^{\bullet\bullet})$ 横坐标固定为 p 给出的竖直方向的复形的 q 次上同调. 如果把同构 $E_1^{pq} \cong H_v^q(C^{p\bullet})$ 视作等同, 滤复形谱序列的第 1 页形如下图:

$$\begin{tikzcd}
H_v^{q+1}(C^{p-2,\bullet}) \arrow[r, "d_1^{p-2,q+1}"] & H_v^{q+1}(C^{p-1,\bullet}) \arrow[r, "d_1^{p-1,q+1}"] & H_v^{q+1}(C^{p\bullet}) \arrow[r, "d_1^{p,q+1}"] & H_v^{q+1}(C^{p+1,\bullet}) \arrow[r, "d_1^{p+1,q+1}"] & H_v^{q+1}(C^{p+2,\bullet}) \\
H_v^{q}(C^{p-2,\bullet}) \arrow[r, "d_1^{p-2,q}"] & H_v^{q}(C^{p-1,\bullet}) \arrow[r, "d_1^{p-1,q}"] & H_v^{q}(C^{p\bullet}) \arrow[r, "d_1^{p,q}"] & H_v^{q}(C^{p+1,\bullet}) \arrow[r, "d_1^{p+1,q}"] & H_v^{q}(C^{p+2,\bullet}) \\
H_v^{q-1}(C^{p-2,\bullet}) \arrow[r, "d_1^{p-2,q-1}"] & H_v^{q-1}(C^{p-1,\bullet}) \arrow[r, "d_1^{p-1,q-1}"] & H_v^{q-1}(C^{p\bullet}) \arrow[r, "d_1^{p,q-1}"] & H_v^{q-1}(C^{p+1,\bullet}) \arrow[r, "d_1^{p+1,q-1}"] & H_v^{q-1}(C^{p+2,\bullet})
\end{tikzcd}$$

更严格地, 对每个整数 p, q, 这里 $d_1^{pq} : E_1^{pq} \to E_1^{p+1,q}$ 满足下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
E_1^{pq} \arrow[r, "d_1^{pq}"] \arrow[d, "\cong"'] & E_1^{p+1,q} \arrow[d, "\cong"] \\
H_v^q(C^{p\bullet}) \arrow[r, "\overline{d_h^{pq}}"] & H_v^q(C^{p+1,\bullet})
\end{tikzcd}$$

其中 $\overline{d_h^{pq}}: H_v^q(C^{p\bullet}) \to H_v^q(C^{p+1,\bullet})$ 是由双复形水平方向微分诱导的上同调间的同态 (该同态的定义合理性来自双复形每个方块的反交换性). 因此 $E_2^{pq} \cong H_h^p(H_v^q(C^{\bullet\bullet}))$. 即双复形的全复形的列滤诱导的谱序列的第 2 页上 (p,q) 位置的项同构于对双复形先取列上同调, 再取行上同调得到的对象. 为了与行滤诱导的谱序列作区分, 我们将 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})^{\bullet}$ 的列滤产生的谱序列记作 ${}^{\mathrm{I}}E_{\geq 0}^{\bullet\bullet}$. 前面的讨论说明

$$
{}^{\mathrm{I}}E_r^{pq} \cong \begin{cases} {}^{\mathrm{I}}F^p(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet}))^{\bullet}/{}^{\mathrm{I}}F^{p+1}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet}))^{\bullet}, & r=0, \\ H_v^q(C^{p\bullet}), & r=1, \\ H_h^p(H_v^q(C^{\bullet\bullet})), & r=2. \end{cases} \tag{1.10}
$$

如果双复形 $(C^{\bullet\bullet}, d_v^{\bullet\bullet}, d_h^{\bullet\bullet})$ 集中在第一象限或第三象限, 那么 (1.10) 说明列滤诱导的全复形的谱序列是有界的. 于是由 [定理1.210], ${}^{\mathrm{I}}E_{\geq 0}^{\bullet\bullet}$ 收敛且 ${}^{\mathrm{I}}E_0^{pq} \Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet}))$. 如果双复形 $(C^{\bullet\bullet}, d_v^{\bullet\bullet}, d_h^{\bullet\bullet})$ 在第四象限内部的项都是零, 那么全复形上的列滤有下界并且是竭尽的, 因此应用 [定理1.211] 得到 ${}^{\mathrm{I}}E_0^{pq} \Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet}))$.

现在我们考虑全复形上的行滤, 记相应谱序列为 ${}^{\mathrm{II}}E_{\geq 0}^{pq}$. 这时对固定的整数 p,q, 有

$$
{}^{\mathrm{II}}E_0^{pq} = \frac{{}^{\mathrm{II}}F^p(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet}))^{\bullet}}{{}^{\mathrm{II}}F^{p+1}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet}))^{\bullet}} \cong C^{qp}.
$$

于是对于谱序列第 0 页中的模和同态, 我们有下述标准交换图:

$$
\begin{tikzcd}
{}^{\mathrm{II}}E_0^{pq} \arrow[r, "d_0^{pq}"] \arrow[d, "\cong"'] & {}^{\mathrm{II}}E_0^{p,q+1} \arrow[d, "\cong"] \\
C^{qp} \arrow[r, "d_h^{qp}"] & C^{q+1,p}
\end{tikzcd}
$$

特别地, 行滤谱序列第 1 页满足 ${}^{\mathrm{II}}E_1^{pq} \cong H_h^q(C^{\bullet,p})$. 谱序列第 1 页中的微分满足下述交换图:

$$
\begin{tikzcd}
{}^{\mathrm{II}}E_1^{pq} \arrow[r, "d_1^{pq}"] \arrow[d, "\cong"'] & {}^{\mathrm{II}}E_1^{p+1,q} \arrow[d, "\cong"] \\
H_h^q(C^{\bullet,p}) \arrow[r, "\overline{d_v^{qp}}"] & H_h^q(C^{\bullet,p+1})
\end{tikzcd}
$$

于是有 ${}^{\mathrm{II}}E_2^{pq} \cong H_v^p H_h^q(C^{\bullet\bullet})$. 于是行滤谱序列的第 0 到 2 页的项满足:

$$
{}^{\mathrm{II}}E_r^{pq} \cong \begin{cases} {}^{\mathrm{II}}F^p(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet}))^{\bullet}/{}^{\mathrm{II}}F^{p+1}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet}))^{\bullet}, & r=0, \\ H_h^q(C^{\bullet,p}), & r=1, \\ H_v^p(H_h^q(C^{\bullet\bullet})), & r=2. \end{cases} \tag{1.11}
$$

类似于列滤情形, 当双复形集中在第一象限或第三象限时, ${}^{\mathrm{II}}E_{\geq 0}^{pq}$ 是有界谱序列. 故 ${}^{\mathrm{II}}E_0^{pq} \Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet}))$. 如果双复形满足第二象限内部的项都是零模, 那么滤复形的行滤是下有界的并且是竭尽的. 应用 [定理1.211] 得到该谱序列收敛, 并有 ${}^{\mathrm{II}}E_0^{pq} \Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet}))$.

下面我们正式地介绍 Ischebeck 谱序列. 以下固定含幺环 R 上的左 R-模 M 并设 M 是伪凝聚的. 取定 M 的有限生成投射分解 $\cdots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$. 再设 N 是右 R-模, 有内射分解:

$$
0 \longrightarrow N \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^2 \longrightarrow \cdots.
$$

于是我们能够适当调整复形微分的符号得到下述形式的双复形:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & E^0 \otimes_R P^0 & \longrightarrow & E^1 \otimes_R P^0 & \longrightarrow & E^2 \otimes_R P^0 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & E^0 \otimes_R P^{-1} & \longrightarrow & E^1 \otimes_R P^{-1} & \longrightarrow & E^2 \otimes_R P^{-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & E^0 \otimes_R P^{-2} & \longrightarrow & E^1 \otimes_R P^{-2} & \longrightarrow & E^2 \otimes_R P^{-2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

称上述双复形为 **Ischebeck 复形**. 对每个指标 $j \leq 0$, P^j 是有限生成投射左 R-模, 所以对任何指标 $i \geq 0$, 有自然同构 $C^{ij} = E^i \otimes_R P^j \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(P^j, R), E^i)$. 因此从上述双复形我们也能够得到与之同构的双复形 $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(P^\bullet, R), E^\bullet)$. 如果 P^j 或 E^j 进一步是 A-A 双模, 这里的加群同构也能成为 A-模同构.

首先考虑该双复形的列滤, 那么由 (1.10) 知有加群同构 (回忆正合函子和取上同调可交换, [推论1.30])

$${}^{\mathrm{I}}E_1^{pq} \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^{-q}(M, R), E^p), {}^{\mathrm{I}}E_2^{pq} \cong \mathrm{Ext}_R^p(\mathrm{Ext}_R^{-q}(M, R), N).$$

再考虑行滤谱序列, 利用 (1.11) 得到

$${}^{\mathrm{II}}E_1^{pq} = \begin{cases} N \otimes_R P^p, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

从 (1.12) 以及 (1.11) 可知

$${}^{\mathrm{II}}E_2^{pq} = \begin{cases} \mathrm{Tor}_{-p}^R(N, M), & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

因为 Ischebeck 复形在第二象限内都是零, 所以行滤谱序列下有界且是竭尽的. 进而我们得到

$${}^{\mathrm{II}}E_{\geq 0}^{pq} \Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})).$$

同时, 明显有 ${}^{\mathrm{II}}E_2^{pq} = {}^{\mathrm{II}}E_\infty^{pq}$. 故对任何整数 n 有 $H^n(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})) \cong \mathrm{Tor}_{-n}^R(N, M)$. 当 $n \geq 1$ 时有 $H^n(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})) = 0$. 注意当 M 的投射分解长度有限且 N 的内射分解长度有限时, 行滤谱序列和列滤谱序列都是有界的, 故收敛.

固定左 R-模 M 的有限生成投射分解 $\cdots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \to M \to 0$. 现在我们设 N 也是左 R-模, 并考虑 N 的投射分解:

$$\cdots \longrightarrow Q^{-2} \longrightarrow Q^{-1} \longrightarrow Q^0 \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

注意也有右 R-模复形 $0 \to \mathrm{Hom}_R(M, R) \to \mathrm{Hom}_R(P^0, R) \to \mathrm{Hom}_R(P^{-1}, R) \to \mathrm{Hom}_R(P^{-2}, R) \to \cdots$.

于是我们能够适当调整复形微分的符号得到下述形式的双复形:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P^0,R)\otimes_R Q^0 \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_R(P^{-1},R)\otimes_R Q^0 \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_R(P^{-2},R)\otimes_R Q^0 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P^0,R)\otimes_R Q^{-1} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_R(P^{-1},R)\otimes_R Q^{-1} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_R(P^{-2},R)\otimes_R Q^{-1} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P^0,R)\otimes_R Q^{-2} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_R(P^{-1},R)\otimes_R Q^{-2} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_R(P^{-2},R)\otimes_R Q^{-2} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

该双复形集中在第四象限. 如果考虑该双复形的列滤谱序列, 有 ${}^{\mathrm{I}}E_1^{pq} \cong \mathrm{Tor}_{-q}(\mathrm{Hom}_R(P^{-p},R),N)$. 所以当 $q=0$ 时, ${}^{\mathrm{I}}E_1^{pq} \cong \mathrm{Hom}_R(P^{-p},R)\otimes_R N \cong \mathrm{Hom}_R(P^{-p},N)$. 当 $q\neq 0$ 时, ${}^{\mathrm{I}}E_1^{pq}=0$. 因此

$$ {}^{\mathrm{I}}E_2^{pq} = \begin{cases} \mathrm{Ext}_R^p(M,N), & q=0, \\ 0, & q\neq 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

如果记 $C^{ij}=\mathrm{Hom}_R(P^{-i},R)\otimes_R Q^j$, 那么从 (1.14) 得到对任何整数 n 有 $H^n(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet}))\cong \mathrm{Ext}_R^n(M,N)$.

因为上述双复形在第二象限内部的项都是零模, 所以行滤谱序列收敛. 对 $p\leq 0, q\geq 0$ 我们有

$$ {}^{\mathrm{II}}E_1^{pq} \cong \mathrm{Ext}_R^q(M,R)\otimes_R Q^p, {}^{\mathrm{II}}E_2^{pq} \cong \mathrm{Tor}_{-p}^R(\mathrm{Ext}_R^q(M,R),N).$$

对于 $p>0$ 或 $q<0$ 的情形, ${}^{\mathrm{II}}E_1^{pq}=0$.

Example 1.214 (张量积复形谱序列计算 Tor 群, [Wei94]). 给定右 R-模 M 和左 R-模 Q, 取定它们的投射分解 (未必有限生成也可能无限长): $\cdots \longrightarrow P^{i-1} \longrightarrow P^i \longrightarrow P^{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 和

$$\cdots \longrightarrow Q^{j-1} \longrightarrow Q^i \longrightarrow Q^{j-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q^{-1} \longrightarrow Q^0 \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

那么可考虑 [例1.75] 所介绍的复形的张量积 $P^{\bullet}\otimes_R Q^{\bullet}$:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \\
\cdots \arrow[r] & P^{p-1}\otimes_R Q^0 \arrow[r] \arrow[u] & P^p\otimes_R Q^0 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & P^{-1}\otimes_R Q^0 \arrow[r] \arrow[u] & P^0\otimes_R Q^0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P^{p-1}\otimes_R Q^{-1} \arrow[r] \arrow[u] & P^p\otimes_R Q^{-1} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & P^{-1}\otimes_R Q^{-1} \arrow[r] \arrow[u] & P^0\otimes_R Q^{-1} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

该双复形集中在第三象限, 所以双复形的行滤和列滤诱导的谱序列都是有界的. 为叙述方便记 $C^{ij}=P^i\otimes_R Q^j$. 那么经典收敛定理说明 ${}^{\mathrm{I}}E_0^{pq}\Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet}))$ 以及 ${}^{\mathrm{II}}E_0^{pq}\Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet}))$. 先考虑列滤谱序列 ${}^{\mathrm{I}}E_{\geq 0}^{pq}$.

根据 (1.10), ${}^{\mathrm{I}}E_0^{pq} \cong P^p \otimes Q^q$ 以及

$$
{}^{\mathrm{I}}E_1^{pq} \cong \begin{cases} P^p \otimes_R N, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases} \tag{1.15}
$$

因此从 (1.15) 可知当 $q=0$ 时, ${}^{\mathrm{I}}E_2^{pq} \cong \mathrm{Tor}_{-p}^R(M,N)$; 当 $q \neq 0$ 时, ${}^{\mathrm{I}}E_2^{pq} = 0$. 即 ${}^{\mathrm{I}}E_{\geq 0}^{pq}$ 的第 2 页形如

$$
\begin{array}{cccccc}
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & {}^{\mathrm{I}}E_2^{-2,0} \cong \mathrm{Tor}_2^R(M,N) & {}^{\mathrm{I}}E_2^{-1,0} \cong \mathrm{Tor}_1^R(M,N) & {}^{\mathrm{I}}E_2^{00} \cong \mathrm{Tor}_0^R(M,N) & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots
\end{array}
$$

特别地, 我们得到 $H^n(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C^{\bullet\bullet})) \cong \mathrm{Tor}_{-n}^R(M,N), \forall n \in \mathbb{Z}$. 对于双复形 $C^{\bullet}$ 的行滤, 作类似讨论可得有界谱序列 ${}^{\mathrm{II}}E_{\geq 0}^{pq}$ 的第 0 页满足 ${}^{\mathrm{II}}E_0^{pq} \cong P^q \otimes_R Q^p$. 第 1 页满足

$$
{}^{\mathrm{II}}E_1^{pq} \cong \begin{cases} M \otimes_R Q^p, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases} \tag{1.16}
$$

从 (1.16) 得到谱序列第 2 页形如:

$$
\begin{array}{cccccc}
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & {}^{\mathrm{II}}E_2^{-2,0} \cong \mathrm{Tor}_2^R(M,N) & {}^{\mathrm{II}}E_2^{-1,0} \cong \mathrm{Tor}_1^R(M,N) & {}^{\mathrm{II}}E_2^{00} \cong \mathrm{Tor}_0^R(M,N) & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots
\end{array}
$$

这里再指出, 通过考虑 M 的投射分解和 N 的投射分解的全张量积复形, 我们前面的讨论也重新证明了 Tor 群既可以用第一位置的模的投射分解计算, 也可以用第二位置的模的投射分解计算.

Lemma 1.215. 设 K 是含幺交换环, $f_1 : V_1 \to W_1, f_2 : V_2 \to W_2$ 都是平坦 K-模间的模同态. 如果 $\mathrm{Im} f_1$ 和 $\mathrm{Im} f_2$ 也是平坦 K-模, 那么 $\mathrm{Ker}(f_1 \otimes f_2) = \mathrm{Ker} f_1 \otimes_K V_2 + V_1 \otimes_K \mathrm{Ker} f_2$.

Proof. 因为 V_1 和 V_2 都是平坦 K-模, 所以 $\mathrm{Ker} f_1 \otimes_K V_2$ 和 $V_1 \otimes_K \mathrm{Ker} f_2$ 都是 $V_1 \otimes_K V_2$ 的子模. 只需要验证 $\mathrm{Ker}(f_1 \otimes f_2) \subseteq \mathrm{Ker} f_1 \otimes_K V_2 + V_1 \otimes_K \mathrm{Ker} f_2$. 考虑下面的交换图:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & & V_1 \otimes_K \mathrm{Ker} f_2 \arrow[r, "f_1 \otimes 1"] \arrow[d] & f_1(V_1) \otimes_K \mathrm{Ker} f_2 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker} f_1 \otimes_K V_2 \arrow[r] & V_1 \otimes_K V_2 \arrow[r, "f_1 \otimes 1"] \arrow[d, "f_1 \otimes 1"'] & f_1(V_1) \otimes_K V_2 \arrow[d, "1 \otimes f_2"] \\
 & & f_1(V_1) \otimes_K V_2 \arrow[r, "1 \otimes f_2"] & f_1(V_1) \otimes_K W_2
\end{tikzcd}
$$

上图中间行和最右边的列是正合的. 现在设 $x \in \mathrm{Ker}(f_1 \otimes f_2)$, 那么 $(f_1 \otimes 1)(x) \in \mathrm{Ker}(1 \otimes f_2)$, 所以 $(f_1 \otimes 1)(x)$ 在 $f_1(V_1) \otimes_K \mathrm{Ker} f_2$. 于是存在 $y \in V_1 \otimes \mathrm{Ker} f_2$ 使得 $(f_1 \otimes 1)(y) = (f_1 \otimes 1)(x)$. 因此 $x - y \in \mathrm{Ker}(f_1 \otimes 1) = \mathrm{Ker} f_1 \otimes V_2$. 这就证明了 $\mathrm{Ker}(f_1 \otimes f_2) \subseteq \mathrm{Ker} f_1 \otimes_K V_2 + V_1 \otimes_K \mathrm{Ker} f_2$. $\square$

Proposition 1.216. 设 R 是含幺环, $X^\bullet$ 是上有界右 R-模复形, $Y^\bullet$ 是上有界左 R-模复形.
(1) 如果 $X^\bullet$ 每项是投射模且 $Y^\bullet$ 是正合复形, 那么 $\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet \otimes_R Y^\bullet)$ 是正合复形.
(2) 如果 $X^\bullet$ 是正合复形且 $Y^\bullet$ 每项是投射模, 那么 $\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet \otimes_R Y^\bullet)$ 是正合复形.

Proof. 设 $X^\bullet$ 满足存在正整数 m 使得 $X^k = 0, \forall k \geq m+1$, $Y^\bullet$ 满足存在正整数 n 使得 $Y^k = 0, \forall k \geq n+1$. 那么定义 $\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet \otimes_R Y^\bullet)$ 的双复形形如:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
\cdots \arrow[r] & X^{m-2}\otimes_R Y^n \arrow[r] \arrow[u] & X^{m-1}\otimes_R Y^n \arrow[r] \arrow[u] & X^m\otimes_R Y^n \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X^{m-2}\otimes_R Y^{n-1} \arrow[r] \arrow[u] & X^{m-1}\otimes_R Y^{n-1} \arrow[r] \arrow[u] & X^m\otimes_R Y^{n-1} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{1.17}$$

(1) 如果 $X^\bullet$ 每项是投射模且 $Y^\bullet$ 是正合复形, 考虑双复形 (1.17) 的列滤诱导的谱序列 ${}^{\mathrm{I}}E^{\bullet\bullet}_{\geq 0}$. 根据 (1.10) 知列滤给出的谱序列第 1 页满足 ${}^{\mathrm{I}}E_1^{pq} = 0, \forall p,q \in \mathbb{Z}$(因为每个 X^i 是投射右 R-模且 $Y^\bullet$ 正合). 注意到 ${}^{\mathrm{I}}E^{\bullet\bullet}_{\geq 0}$ 是有界谱序列, 根据经典收敛定理 ([定理1.210]), $\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet \otimes_R Y^\bullet)$ 的各次上同调都是零, 所以 $\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet \otimes_R Y^\bullet)$ 是正合复形. (2) 的证明完全类似, 只需考虑行滤谱序列同样得到 ${}^{\mathrm{II}}E_1^{pq} = 0, \forall p,q \in \mathbb{Z}$ 即可. □

Corollary 1.217. 设 R 是含幺环, $X^\bullet$ 是上有界正合平坦左 R-模复形, $Y^\bullet$ 是上有界正合平坦右 R-模复形. 那么
(1) 对任何右 R-模 M(视作集中在 0 次位置复形), $\mathrm{Tot}^\oplus(M \otimes_R X^\bullet)$ 是正合复形.
(2) 对任何左 R-模 N(视作集中在 0 次位置复形), $\mathrm{Tot}^\oplus(Y^\bullet \otimes_R N)$ 是正合复形.

Proof. 这时 $X^\bullet$ 可视作零左模的平坦分解, $Y^\bullet$ 可视作零右模的平坦分解, 应用 [例1.214] 即可. □

我们指出 [推论1.217] 也可以利用双复形谱序列适当加强, 为之后引用方便这里记录为下述引理.

Lemma 1.218 ([Sta24]). 给定上有界右 R-模复形 $X^\bullet$ 和上有界左 R-模复形 Y, 那么有全张量积复形 $\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet \otimes_R Y^\bullet)$ 是下述张量积双复形的全复形 (设 $X^t = 0, \forall t \geq m+1$ 以及 $Y^\ell = 0, \forall \ell \geq n+1$):

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
\cdots \arrow[r] & X^{m-2}\otimes_R Y^n \arrow[r] \arrow[u] & X^{m-1}\otimes_R Y^n \arrow[r] \arrow[u] & X^m\otimes_R Y^n \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X^{m-2}\otimes_R Y^{n-1} \arrow[r] \arrow[u] & X^{m-1}\otimes_R Y^{n-1} \arrow[r] \arrow[u] & X^m\otimes_R Y^{n-1} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X^{m-2}\otimes_R Y^{n-2} \arrow[u] & X^{m-1}\otimes_R Y^{n-2} \arrow[r] \arrow[u] & X^m\otimes_R Y^{n-2} \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

(1) 如果 $X^\bullet$ 的每项都是平坦右 R-模且正合, 那么 $\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet \otimes_R Y^\bullet)$ 是正合复形.
(2) 如果 $Y^\bullet$ 的每项都是平坦左 R-模且正合, 那么 $\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet \otimes_R Y^\bullet)$ 是正合复形.

Proof. 注意上述张量积双复形相当于集中在第三象限, 故其全复形的关于列滤和行滤的滤复形谱序列是有界的. 进而我们能够应用经典收敛定理. 下面用行滤谱序列证明 (1), 用列滤谱序列证明 (2).

(1) 设 $X^\bullet$ 是正合复形且每项是平坦右 R-模, 那么 $X^\bullet$ 可视作零模的平坦分解. 考虑给定张量积双复形的行滤谱序列, 那么由 (1.11) 可知该谱序列第 1 页的 (p,q) 项为右零模和左 R-模 Y^p 的 Tor 群, 因此该谱序列第 1 页全为零. 所以 $\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet \otimes_R Y^\bullet)$ 的各次上同调是零.

(2) 设 $Y^\bullet$ 是正合复形且每项是平坦左 R-模, 那么 $Y^\bullet$ 可视作零模的平坦分解. 考虑上述张量积双复形的列滤谱序列并应用 (1.10) 可知该谱序列第 1 页全为零, 从而 $\mathrm{Tot}^\oplus(X^\bullet \otimes_R Y^\bullet)$ 正合. □

Proposition 1.219 ([Hue99])**.** 设左 R-模 M 满足存在自然数 d 使得 M 有长度为 d 的有限生成投射分解

$$0 \longrightarrow P^{-d} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

且 $\mathrm{Ext}^i_R(M,R) = 0, \forall i \neq d$. 如果记右 R-模 $\omega_M = \mathrm{Ext}^d_R(M,R)$, 那么对任何自然数 $i \geq 0$ 有同构

$$\mathrm{Ext}^i_R(M,N) \cong \mathrm{Tor}^R_{d-i}(\omega_M, N), \forall N \in \mathrm{ob}R\textbf{-Mod}.$$

Proof. 对任何左 R-模 N, 取定投射分解 $\cdots \longrightarrow Q^{-2} \longrightarrow Q^{-1} \longrightarrow Q^0 \longrightarrow N \longrightarrow 0.$ 考虑双复形

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P^0,R)\otimes_R Q^0 \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_R(P^{-1},R)\otimes_R Q^0 \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_R(P^{-2},R)\otimes_R Q^0 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P^0,R)\otimes_R Q^{-1} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_R(P^{-1},R)\otimes_R Q^{-1} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_R(P^{-2},R)\otimes_R Q^{-1} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P^0,R)\otimes_R Q^{-2} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_R(P^{-1},R)\otimes_R Q^{-2} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_R(P^{-2},R)\otimes_R Q^{-2} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

那么 (1.14) 说明上述双复形的行滤谱序列 ${}^{\mathrm{II}}E_0^{pq} \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_R(M,N)$. 而 ${}^{\mathrm{II}}E_2^{pq} \cong \mathrm{Tor}^R_{-p}(\mathrm{Ext}^q_R(M,R),N)$.

由条件, 行滤谱序列的第 2 页除第 d 列外都是零. 所以对任何 $0 \leq i \leq d$, 有关于左 R-模 N 的同构

$$\mathrm{Tor}^R_{d-i}(\omega_M, N) = \mathrm{Tor}^R_{d-i}(\mathrm{Ext}^d_R(M,R), N) \cong \mathrm{Ext}^i_R(M,N).$$

当 $i \geq d+1$ 时, 由 M 的投射维数不超过 d 立即得到结论. □

Remark 1.220. 事实上, 在 [命题1.219] 的条件下, 进一步有函子的自然同构 $\mathrm{Ext}^i_R(M,-) \cong \mathrm{Tor}^R_{d-i}(\omega_M,-)$. 证明也是直接的: 取定左 R-模 M 的有限生成投射分解 $0 \longrightarrow P^{-d} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$, 那么作用逆变函子 $\mathrm{Hom}_R(-,R)$ 后得到右 R-模正合列 (利用命题条件):

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P^0,R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P^{-1},R) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P^{-d},R) \longrightarrow \mathrm{Ext}^d_R(M,R) \longrightarrow 0,$$

这给出 $\mathrm{Ext}^d_R(M,R)$ 作为右 R-模的长度为 d 的有限生成投射分解. 进而利用 $\mathrm{Hom}_R(P^i,R)\otimes_R N \cong \mathrm{Hom}_R(P_i,N)$ 关于左 R-模 N 自然可得计算 Tor 群 $\mathrm{Tor}_{d-i}(\mathrm{Ext}^d_R(M,R),N)$ 的标准复形与计算 $\mathrm{Ext}^i_R(M,N)$ 的标准复形间有链同构, 因此对每个自然数 $0 \leq i \leq d$, 有自然同构 $\mathrm{Ext}^i_R(M,-) \cong \mathrm{Tor}^R_{d-i}(\omega_M,-)$.

Proposition 1.221 ([Hue99]). 如果左 R-模 M 满足存在自然数 d 和右 R-模 ω_M 满足对任何自然数 $i \geq 0$ 有自然同构 $\mathrm{Ext}_R^i(M,-) \cong \mathrm{Tor}_{d-i}^R(\omega_M,-)$, 那么 M 有长度为 d 的有限生成投射分解并且 $\mathrm{Ext}_R^i(M,R) = 0, \forall i \neq d$.

Proof. 先说明 M 作为左 R-模的投射维数不超过 d. 事实上, 由条件 $\mathrm{Ext}_R^{d+1}(M,N) = 0$ 对任何左 R-模 M 成立. 这就得到 M 的投射维数不超过 d. 又因为 Tor 函子总和正向集上的正向极限可交换, 所以 [注记1.186] 说明 M 有长度为 d 的有限生成投射分解. 最后, 由 $\mathrm{Tor}_n^R(\omega_M,R) = 0, \forall n \geq 1$ 得到结论. □

总结 [注记1.220] 和 [命题1.221] 便得到下述结果.

Corollary 1.222 ([Hue99]). 设 M 是左 R-模, d 是自然数. 那么以下两条等价:
(1) 模 M 存在长度为 d 的有限生成投射分解并且 $\mathrm{Ext}_R^i(M,R) = 0, \forall i \neq d$.
(2) 模 M 满足存在右 R-模 ω_M 使得对任何自然数 i 有自然同构 $\mathrm{Ext}_R^i(M,-) \cong \mathrm{Tor}_{d-i}^R(\omega_M,-)$.
当上述两个等价命题之一成立时, 我们也称 M 有 d 维的**对偶模** ω_M.

Remark 1.223. 注意到当 M 有 d 维对偶模 ω_M 时, 有加群同构 $\mathrm{Ext}_R^d(M,R) \cong \omega_M$. 特别地, 如果 M 本身是有限生成投射 R-模且 $d \geq 1$, 那么 $\omega_M = 0$. 事实上, 只要 M 是有限生成投射 R-模, 那么 M 自然满足 $d = 0$ 情形下的 (1), 这时 $\omega_M \cong \mathrm{Hom}_R(M,R)$. 进而知 M 是非零有限生成投射模时, M 有非零的 0 维对偶模. 如果 M 存在 d 维对偶模 ω_M 并且 M 不是投射模, 那么 $d \geq 1$. 并且 [命题1.116] 说明存在左 R-模 N 使得 $\mathrm{Ext}_R^1(M,N) \neq 0$. 于是 $\mathrm{Tor}_{d-1}^R(\omega_M,N) \cong \mathrm{Ext}_R^1(M,N) \neq 0$. 这说明 $\omega_M \neq 0$. 于是知只要左 R-模 M 存在 d 维对偶模, 那么只可能分为两种情况:(1) M 是有限生成投射模, 这时只要 $M \neq 0$ 就有 $\omega_M \neq 0$(反之亦然, 如果 $\omega_M = 0$, 那么 $\mathrm{Hom}_R(M,N) = 0$ 对任何左 R-模 N 成立, 这迫使 $M = 0$); (2) M 不是投射模, 这时 $d \geq 1$ 且 $\omega_M \neq 0$.

现在设 K 是含幺交换环, A 是 K-代数并且 A 是投射 K-模, 记 $A^e = A \otimes_K A^{op}$ 是 A 的包络代数. 那么对任何 A-A 双模 M(或等价地, 将 M 视作左 A^e-模), A 系数在 M 中的 i 次 Hochschild 上同调可由 $\mathrm{Ext}_{A^e}^i(A,M)$ 计算; A 系数在 M 中的 i 次 Hochschild 同调可由 $\mathrm{Tor}_i^{A^e}(A,M)$ 计算. 当我们考虑 $\mathrm{Ext}_{A^e}^i(A,A^e)$ 的右 A^e-模结构时, 使用的 A^e 的右 A^e-模结构来自 A^e 上的右乘.

Corollary 1.224 ([Zhu20]). 设 A 是 K-代数满足 A 是投射 K-模. 如果存在自然数 d 和 A-A 双模 U 使得 U 作为右 A-模平坦并且 $H^i(A,-) \cong H_{d-i}(A, U \otimes_A -), \forall i \in \mathbb{N}$, 那么 A 作为左 A^e-模有长度为 d 的有限生成投射分解并且有 [推论1.222] 意义下的 d 维对偶模 $\mathrm{Ext}_{A^e}^d(A,A^e)$. 事实上, 进一步有加群同构 $U \cong \mathrm{Ext}_{A^e}^d(A,A^e)$.

Proof. 这时有自然同构 $\mathrm{Ext}_{A^e}^i(A,-) \cong \mathrm{Tor}_{d-i}^{A^e}(A, U \otimes_A -) \cong \mathrm{Tor}_{d-i}^{A^e}(A,-)(U \otimes_A -)$. 易见 A 作为左 A^e-模的投射维数不超过 d. 现在右边是两个可与任何正向集为指标集的正向极限可交换的函子的合成, 所以 $\mathrm{Ext}_{A^e}^i(A,-)$ 也能够与正向集为指标集的正向极限可交换. 因此 [注记1.186] 表明 A 作为左 A^e-模有长度为 d 的有限生成投射分解. 取定 A 作为左 A^e-模的有限生成投射分解 $0 \longrightarrow P^{-d} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$. 因为 A 的投射 K-模, 所以由伴随同构 $\mathrm{Hom}_A(A \otimes_K A_A, -) \cong \mathrm{Hom}_K({}_AA_K, \mathrm{Hom}_A(A_A,-))$ 得到 $A \otimes_K A^{op}$ 作为右 A-模是投射的. 这说明任何投射左 A^e-模视作 A-A 双模后, 其上右 A-模结构也是投射的. 特别地,

$$0 \longrightarrow P^{-d} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \tag{1.18}$$

视作右 A-模范畴中的正合列后, 是上有界且每项是投射右 A-模的复形. 应用 [例1.65] 得到 (1.18) 是可裂正合的右 A-模复形. 于是由 [命题1.67] 得到下述同态序列正合:

$$0 \longrightarrow P^{-d} \otimes_A U \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{-2} \otimes_A U \longrightarrow P^{-1} \otimes_A U \longrightarrow P^0 \otimes_A U \longrightarrow A \otimes_A U \cong U \longrightarrow 0$$

通过下面的 [引理1.231] 易知 U 作为右 A-模的平坦性蕴含 $P^j \otimes_A U$ 作为右 A^e-模的平坦性. 所以上述正合列给出 U 作为右 A^e-模的平坦分解. 于是由 Tor 群可经平坦分解计算以及利用 [引理1.231] 中的自然同构 ζ 关于 P 也有自然性 (并注意每个 P^j 视作右 A^e-模也投射) 立即得到自然同构 $\mathrm{Tor}_k^{A^e}(U,-) \cong \mathrm{Tor}_k^{A^e}(A, U\otimes_A -), \forall k \in \mathbb{N}$. 所以由条件得到对任何的自然数 i 有自然同构 $\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A,-) \cong \mathrm{Tor}^{A^e}_{d-i}(U,-)$. 进而知右 A^e-模 U 是左 A^e-模 A 的 d 维对偶模. 于是 $U \cong \mathrm{Ext}^d_{A^e}(A, A^e)$. □

Remark 1.225. 如果 [推论1.224] 条件中的自然同构 $H^i(A,-) \cong H_{d-i}(A, U\otimes_A -), \forall i \in \mathbb{N}$, 满足在 A^e 上的作用是右 A^e-模同构, 那么 $U \cong \mathrm{Ext}^d_{A^e}(A, A^e)$ 便能进一步取为右 A^e-模同构.

Remark 1.226. 该推论表明如果 K-代数 A 满足作为 K-模投射且有自然同构 $H^i(A,-) \cong H_{d-i}(A, U\otimes_A -), \forall i \in \mathbb{N}$, 那么 $\mathrm{p.dim}_{A^e} A < +\infty$. 满足 $\mathrm{p.dim}_{A^e} A = +\infty$ 的具体例子参见 [FSSA03]. 一般地, 称 $\mathrm{p.dim}_{A^e} A$ 为 A 的 **Hochschild 维数**. 当 A 的 Hochschild 维数有限时, 容易获得更进一步的描述, 见 [引理1.243].

Remark 1.227. 从 [推论1.224] 的证明过程中也可以看出只要 K-代数 A 是投射 K-模, 那么投射 A^e-模作为左 A-模和右 A-模依然投射. 保持假设 A 是投射 K-模. 注意到左 A^e-模自然视作右 A^e-模后投射性和内射性不发生改变. 所以由 A^e 是平坦左 A-模可知任何内射右 A^e-模作为右 A-模依然内射. 如果 A 是平坦 K-模, 这时对任何内射左 A^e-模 Q, 有自然同构 $\mathrm{Hom}_A(-, {}_AQ) \cong \mathrm{Hom}_A(-, \mathrm{Hom}_A(A_A, {}_AQ_A)) \cong \mathrm{Hom}_{A^e}(-\otimes_K A, {}_{A^e}Q)$, 这说明 Q 作为左 A-模也内射. 所以平坦 K-代数 A 满足内射左 A^e-模作为左 A-模也内射 (见 [引理1.228]).

Lemma 1.228 ([Ye92])**.** 设 A 是 K-代数. 考虑环同态 $\alpha : A \to A \otimes_K A^{op}, a \mapsto a \otimes 1$ 给出的 A^e 上的右 A-模结构, 那么作为 A-**Mod** 到 K-**Mod** 的函子, 有自然同构 $A^e \otimes_A - \cong A \otimes_K -$, 因此如果进一步 A 是平坦 K-模, 那么 A^e 作为右 A-模是平坦模. 特别地, 任何内射左 A^e-模 (在环同态 α 下) 作为左 A-模也是内射模.

Proof. 由 A^e 上右 A-模结构的定义, 对任何左 A-模 X, 在 $A^e \otimes_A X$ 中有 $(a\otimes b)\otimes x = (1\otimes b)\otimes ax, \forall a, b \in A, x \in X$. 作为 K-模, 有标准同构 $\eta_X : A^e \otimes_A X \to A \otimes_K X, (a\otimes b)\otimes x \mapsto b \otimes ax$(逆映射由 $A\otimes_K X \to A^e \otimes_A X, a\otimes x \mapsto (1\otimes a)\otimes x$ 给出). 对任何左 A-模同态 $f : X \to Y$, 易验证下图交换:

$$\begin{tikzcd}
A^e \otimes_A X \arrow[r, "\mathrm{id}_{A^e}\otimes f"] \arrow[d, "\eta_X"'] & A^e \otimes_A Y \arrow[d, "\eta_Y"] \\
A \otimes_K X \arrow[r, "\mathrm{id}_A \otimes f"] & A \otimes_K Y
\end{tikzcd}$$

所以我们得到自然同构 $\eta : A^e \otimes_A - \cong A \otimes_K -$. 如果进一步 A 是平坦 K-模, 那么 A^e 在上述右 A-模结构下是平坦右 A-模并且这时 A 是 A^e-A 双模, 满足有左 A-模同构 $Q \cong \mathrm{Hom}_{A^e}({}_{A^e}A_A, {}_{A^e}Q)$. 对任何内射左 A^e-模 Q 有 $\mathrm{Hom}_A(-, {}_AQ) \cong \mathrm{Hom}_A(-, \mathrm{Hom}_{A^e}({}_{A^e}A_A, {}_{A^e}Q)) \cong \mathrm{Hom}_{A^e}({}_{A^e}A_A \otimes_A -, {}_{A^e}Q)$. 故 Q 是内射左 A-模. □

Remark 1.229. 对称地, 也有自然同构 $-\otimes_A A^e \cong -\otimes_K A$. 所以 A 是平坦 K-模能够保证 A^e 作为左 A-模平坦. 进而任何内射右 A^e-模视作右 A-模后依然是内射模.

总结一下 [引理1.228] 和 [注记1.229], 只要 K-代数 A 是平坦 K-模, 那么内射 A^e-模作为左/右 A-模都是内射的. 只要 A 是投射 K-模, 那么投射 A^e-模作为左/右 A-模都是投射的.

Example 1.230. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上代数, 那么 $\mathrm{inj.dim}_A A \le \mathrm{inj.dim}_{A^e} A^e$.

Proof. 不妨设 $\mathrm{inj.dim}_{A^e}A^e$ 有限, 记 $t=\mathrm{inj.dim}_{A^e}A^e$, 那么可取 A^e 作为左 A^e-模有内射分解:

$$0 \longrightarrow A^e \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \cdots$$

因为 $A^e = A\otimes_{\Bbbk} A^{op}$ 作为左 A-模同构于一些 A 的直和, 所以由上述复形中每项 I^k 作为左 A-模也内射, 应用 [注记1.124] 便知 $\mathrm{inj.dim}_A A\le t$. □

Lemma 1.231 ([Zhu20]). 设 A 是 K-代数, P,U,N 都是 A-A 双模 (也视作左 A^e-模). 命

$$\xi_N:\mathrm{Hom}_{A^e}(P\otimes_A U,N)\to\mathrm{Hom}_{A^e}(P,\mathrm{Hom}_A(U_A,-)),\varphi\mapsto\xi_N(\varphi)$$

满足对任何 $p\in P$ 有 $\xi_N(\varphi):U\to N,u\mapsto\varphi(p\otimes u)$. 那么 ξ_N 是加群同构且关于 N 自然. 命

$$\zeta_N:(P\otimes_A U)\otimes_{A^e}N\to P\otimes_{A^e}(U\otimes_A N),(p\otimes u)\otimes n\mapsto p\otimes(u\otimes n),$$

那么 ξ_N 是加群同构并且关于 N 自然 (如果固定 N, 关于 P 也自然). 特别地, 当 U 作为右 A-模平坦且 P 是投射左 A^e-模 (那么这时 P 作为右 A^e-模也投射) 时, $P\otimes_A U$ 作为右 A^e-模也平坦; 当 U 作为右 A-模投射且 P 是投射左 A^e-模时, $P\otimes_A U$ 上标准 A-A 双模结构给出的左 A^e-模结构也投射.

Proof. 对 A-A 双模 N, 定义 $\eta_N:\mathrm{Hom}_{A^e}(P,\mathrm{Hom}_A(U_A,-))\to\mathrm{Hom}_{A^e}(P\otimes_A U,N),F\mapsto\eta_N(F)$ 满足

$$\eta_N(F):P\otimes_A U\to N,p\otimes u\mapsto F(p)(u),$$

可直接验证 ξ_N,η_N 是定义合理的加群同态并且互为逆映射, ξ_N 关于 N 的自然性也是明显的. ζ_N 的定义合理性也是直接验证, 这里仅指出 $P\otimes_A U$ 上的右 A^e-模结构来自其上标准 A-A 双模结构, $U\otimes_A N$ 上左 A^e-模结构也来自自身上标准 A-A 双模结构. 可直接验证 $\theta_N:P\otimes_{A^e}(U\otimes_A N)\to(P\otimes_A U)\otimes_{A^e}N,p\otimes(u\otimes n)\mapsto(p\otimes u)\otimes n$ 是定义合理的加群同态并且是 ζ_N 的逆映射. 因此 ζ_N 是加群同构, ζ_N 关于 N 的自然性是明显的. □

Remark 1.232. 设 K 是含幺交换环, A,B,C 是 K-代数, X 是 B-A 双模, Y 是 A-A 双模且 Z 是 A-C-双模. 那么 Y 可自然视作右 A^e-模, $Z\otimes_K X$ 可自然视作 A^e-$(C\otimes_K B^{op})$ 双模. 进而 $X\otimes_A Y\otimes_A Z$ 和 $Y\otimes_{A^e}(Z\otimes_K X)$ 可自然视作 B-C 双模. 这里 $Y\otimes_{A^e}(Z\otimes_K X)$ 上的 B-C 双模结构来自:

$$(b\otimes c)(y\otimes(z\otimes x))=y\otimes(zc\otimes bx).$$

可直接验证 $\theta:X\otimes_A Y\otimes_A Z\to Y\otimes_{A^e}(Z\otimes_K X),x\otimes y\otimes z\mapsto y\otimes(z\otimes x)$ 是定义合理的 K-模同构, 并且在 $Y\otimes_{A^e}(Z\otimes_K X)$ 赋予前述 B-C 双模结构后, θ 成为 B-C 双模同构. 对称地, $Y\otimes_{A^e}(Z\otimes_K X)$ 可自然视作右 $C\otimes_K B^{op}$-模, 进而有定义合理的 B-C 双模同构

$$\tau:X\otimes_A Y\otimes_A Z\to(X\otimes_K Z)\otimes_{A^e}Y,x\otimes y\otimes z\mapsto(x\otimes z)\otimes y.$$

因此有 B-C 双模同构 $X\otimes_A Y\otimes_A Z\cong Y\otimes_{A^e}(Z\otimes_K X)\cong(X\otimes_K Z)\otimes_{A^e}Y$. 于是对 B-A 双模复形 $X^\bullet$, A-A 双模复形 Y 和 A-C 双模复形 $Z^\bullet$ 我们可以直接构造作为 B-C 双模复形的链同构 $X^\bullet\otimes_A Y^\bullet\otimes_A Z\cong Y^\bullet\otimes_{A^e}(Z^\bullet\otimes_K X^\bullet)$: 对每个整数 n 和满足 $p+t+q=n$ 的指标 p,t,q, 命 $\lambda^n:(X^\bullet\otimes_A Y^\bullet\otimes_A Z^\bullet)^n\to(Y^\bullet\otimes_{A^e}(Z^\bullet\otimes_K X^\bullet))^n,x^p\otimes y^t\otimes z^q\mapsto(-1)^{pt+pq}(x^p\otimes z^q)\otimes y^t$ 那么 $\lambda=\{\lambda^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 定义出 B-C 双模复形间链同构

$$\lambda:X^\bullet\otimes_A Y^\bullet\otimes_A Z^\bullet\cong Y^\bullet\otimes_{A^e}(Z\otimes_K X)\to Y^\bullet\otimes_{A^e}(Z^\bullet\otimes_K X^\bullet).$$

类似地, 对每个整数 n 和满足 $p+t+q=n$ 的指标 p,t,q, 命 $\mu^n:(X^\bullet\otimes_A Y^\bullet\otimes_A Z^\bullet)^n\to((X^\bullet\otimes_K Z^\bullet)\otimes_{A^e} Y^\bullet)^n, x^p\otimes y^t\otimes z^q\mapsto(-1)^{qt}x^p\otimes z^q\otimes y^t$, 那么 $\mu=\{\mu^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 定义了 $X^\bullet\otimes_A Y^\bullet\otimes_A Z^\bullet$ 到 $(X^\bullet\otimes_K Z^\bullet)\otimes_{A^e} Y^\bullet$ 的链同构 $\mu:X^\bullet\otimes_A Y^\bullet\otimes_A Z^\bullet\cong(X^\bullet\otimes_K Z^\bullet)\otimes_{A^e} Y^\bullet$.

Lemma 1.233 ([Wit19])**.** 设 A,B 都是 K-代数. 那么对任何投射左 A^e-模 P 和投射左 B^e-模 Q, $P\otimes_K Q$ 在下述双模结构下是投射左 $(A\otimes_K B)^e$-模: $(a\otimes b)(p\otimes q)(a'\otimes b')=apa'\otimes bqb', \forall a,a'\in A, b,b'\in B, p\in P, q\in Q$.

Proof. 首先标准 K-模同构 $A^e\otimes_K B^e\to(A\otimes_K B)^e, (a_1\otimes a_2)\otimes(b_1\otimes b_2)\mapsto(a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes b_2)$ 在对 $A^e\otimes_K B^e$ 如条件赋予 $(A\otimes_K B)$-$(A\otimes_K B)$ 双模结构后能够成为左 $(A\otimes_K B)^e$-模同构. 所以 $A^e\otimes_K B^e$ 赋予标准左 $(A\otimes_K B)^e$-模结构后是自由 $(A\otimes_K B)^e$-模. 由此可得对任何投射左 A^e-模 P, $P\otimes_K B^e$ 作为左 $(A\otimes_K B)^e$-模也是投射的. 进而得到对任何自由左 B^e-模 F, $P\otimes_K F$ 是投射左 $(A\otimes_K B)^e$-模. 故对任何投射左 B^e-模 Q, 有 $P\otimes_K Q$ 作为左 $(A\otimes_K B)^e$-模是投射的. $\square$

Proposition 1.234 ([Wit19])**.** 设 A,B 都是域 K 上代数. 那么 $\mathrm{p.dim}_{(A\otimes_K B)^e}A\otimes_K B\leq\mathrm{p.dim}_{A^e}A+\mathrm{p.dim}_{B^e}B$.

Proof. 取定 A 作为左 A^e-模的投射分解以及 B 作为左 B^e-模的投射分解, 分别设为

$$\cdots\longrightarrow P^{i-1}\longrightarrow P^i\longrightarrow P^{i-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow P^{-1}\longrightarrow P^0\xrightarrow{\varepsilon}A\longrightarrow 0,$$

$$\cdots\longrightarrow Q^{j-1}\longrightarrow Q^i\longrightarrow Q^{j-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow Q^{-1}\longrightarrow Q^0\xrightarrow{\eta}B\longrightarrow 0.$$

后得到下述左 $(A\otimes_K B)^e$-模双复形 (并且 [引理1.233] 保证了每项是投射左 $(A\otimes_K B)^e$-模):

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \\
\cdots \arrow[r] & P^{p-1}\otimes_K Q^0 \arrow[r]\arrow[u] & P^p\otimes_K Q^0 \arrow[r]\arrow[u] & \cdots \arrow[r] & P^{-1}\otimes_K Q^0 \arrow[r]\arrow[u] & P^0\otimes_K Q^0 \arrow[r]\arrow[u] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P^{p-1}\otimes_K Q^{-1} \arrow[r]\arrow[u] & P^p\otimes_K Q^{-1} \arrow[r]\arrow[u] & \cdots \arrow[r] & P^{-1}\otimes_K Q^{-1} \arrow[r]\arrow[u] & P^0\otimes_K Q^{-1} \arrow[r]\arrow[u] & 0 \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

记 $C^{ij}=P^i\otimes_K Q^j$, 那么 $\mathrm{Tot}^\oplus(C^{\bullet\bullet})$ 是 M 和 N 的投射分解视作 K-模复形后的全张量积复形. 类似 [例1.214] 的讨论, 考虑列滤导出的全张量积复形作为滤复形的谱序列易知 $\mathrm{Tot}^\oplus(C^{\bullet\bullet})$ 除了 0 次上同调外上同调都是零. 应用 [引理1.215] 得到标准映射 $\varepsilon\otimes\eta:P^0\otimes_K Q^0\to A\otimes_K B$ 满足:

$$\mathrm{Ker}(\varepsilon\otimes\eta)=\mathrm{Im}d_P^{-1}\otimes_K Q^0+P^0\otimes_K\mathrm{Im}d_Q^{-1}.$$

并且 $\varepsilon\otimes\eta:P^0\otimes_K Q^0\to A\otimes_K B$ 是左 $(A\otimes_K B)^e$-模满同态. 所以 $\mathrm{Tot}^\oplus(C^{\bullet\bullet})$ 给出 $A\otimes_K B$ 作为左 $(A\otimes_K B)^e$-模的投射分解. 该投射分解的长度就是取定的 A 作为 A^e-模的投射分解与 B 作为 B^e-模的投射分解的长度之和. 由此得到 $\mathrm{p.dim}_{(A\otimes_K B)^e}A\otimes_K B\leq\mathrm{p.dim}_{A^e}A+\mathrm{p.dim}_{B^e}B$. $\square$

Remark 1.235. 根据推论的证明过程可知对固定的域 K, 如果 K-代数 A 作为左 A^e-模有长度为 d_1 的有限生成投射分解, B 作为左 B^e-模有长度为 d_2 的有限生成投射分解, 那么 $A\otimes_K B$ 作为左 $(A\otimes_K B)^e$-模有长度不超过 d_1+d_2 的有限生成投射分解.

Remark 1.236. 由此可知域 $\Bbbk$ 上两个可分代数在 $\Bbbk$ 上的张量积代数依然是可分的. 更一般地, 如果 A_1, A_2, Z_1, Z_2 都是 K-代数满足 A_1 是可分 Z_1 代数且 A_2 是可分 Z_2-代数, 那么只要 $Z_1 \otimes_K Z_2, A_1 \otimes_K A_2 \neq 0$(例如 K 是域), 那么将 $A_1 \otimes_K A_2$ 通过对角作用赋予 $Z_1 \otimes_K Z_2$-代数结构后, $A_1 \otimes_K A_2$ 成为可分 $Z_1 \otimes_K Z_2$-代数.

Proposition 1.237 ([Krä07]). 设 A 是域 K 上代数, 那么 $\text{l.gl.dim}A \leq \text{p.dim}_{A^e} A$.

Proof. 取定 A 作为左 A^e-模的投射分解 $\cdots \longrightarrow P^{i-1} \longrightarrow P^i \longrightarrow P^{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$. 那么由 [推论1.224] 的证明过程可知每个 P^i 作为右 A-模是投射的. 因此 [例1.65] 得到任何左 A-模 M 决定的张量函子 $-\otimes_A M$ 作用上述正合复形依然正合. 注意到标准同构 $A^e \otimes_A M \to A \otimes_K M, a \otimes b \otimes x \mapsto a \otimes bx$ 也是左 A-模同构. 所以对任何投射左 A^e-模 $Q, Q \otimes_A M$ 是投射左 A-模. 特别地, 每个 $P^i \otimes_A M$ 是投射左 A-模. 即将 $-\otimes_A M$ 作用取定的 A 作为左 A^e-模的投射分解后, 得到 M 作为左 A-模的投射分解, 故 $\text{l.gl.dim}A \leq \text{p.dim}_{A^e} A$. □

Remark 1.238. 域上可分代数满足整体维数是零且有限维. 所以域上整体维数无限的有限维代数 A 都满足 A 不是投射左 A^e-模. 特别地, 这时 A 作为左 A-模和右 A-模都是投射的, 但 A 作为 A-A 双模不投射.

Remark 1.239. 与 [注记1.238] 对偶地, 对域 $\Bbbk$ 上代数 A, 如果 A-A 双模 X 满足 ${}_AX$ 和 X_A 都是内射模, 也无法得到 X 是内射左 A^e-模. 事实上, 如果能够构造 $\Bbbk$-代数 A 满足 A 是 Artin 半单环但 A^e 不是 Artin 半单环, 取一个非内射的左 A^e-模 X 即可. 设 $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 是 2 元域. 命 $\Bbbk = \mathbb{F}(x^2)$ 是 $\mathbb{F}[x^2]$ 的商域, 它是有理函数域 $A = \mathbb{F}(x)$ 的子域. 现在 A 可自然视作 $\Bbbk$ 代数, 并且 A 作为域自然是 Artin 单环. 下面说明 $A \otimes_{\Bbbk} A$ 有非零幂零元来得到 A^e 不是 Artin 半单环. 考虑 $y = x \otimes 1 - 1 \otimes x \in A$, 易验证 $\{1, x\}$ 是 $\Bbbk$-线性无关的, 所以 $y \neq 0$. 而

$$y^2 = (x \otimes 1 - 1 \otimes x)^2 = x^2 \otimes 1 - 1 \otimes x^2 = 1 \otimes x^2 - 1 \otimes x^2 = 0$$

说明 y 是 A^e 的非零幂零元, 所以 A^e 不是半素环, 那么更不会是 Artin 半单环.

Corollary 1.240 ([Krä07]). 设 A 是域 K 上代数, 那么 $\text{l.gl.dim}A^e < +\infty$ 当且仅当 $\text{p.dim}_{A^e} A < +\infty$.

Proof. 必要性来自整体维数的定义. 充分性: 注意到 A 作为左 A^e-模的投射分解也给出 A 作为右 A^e-模的投射分解, 反之亦然. 故 $\text{p.dim}_{A^e} A = \text{p.dim}_{(A^{op})^e} A^{op}$. 对 [命题1.234] 取 $B = A^{op}$ 得到 $\text{l.gl.dim}(A^e)^e < +\infty$. 于是 A^e 作为左 $(A^e)^e$-模的投射维数有限. 对 K-代数 A^e 应用 [命题1.237] 便知 $\text{l.gl.dim}A^e < +\infty$. □

Theorem 1.241 (van den Bergh 对偶, [vdB98, vdB02]). 设 A 是 K-代数且 A 是投射 K-模. 如果 A 作为左 A^e-模有有限长的有限生成投射分解, 并且存在 A-A 双模 U 满足 U 是平坦右 A-模, 且作为右 A^e-模有

$$\text{Ext}^i_{A^e}(A, A^e) = \begin{cases} U, & i = d, \\ 0, & i \neq d. \end{cases}$$

那么有自然同构 $H^i(A, -) \cong H_{d-i}(A, U \otimes_A -), \forall i \in \mathbb{N}$.

Proof. 由条件, A 是完全左 A^e-模. 应用 [命题1.219] 和 [注记1.223] 知 U 是 A 作为左 A^e-模的 d 维对偶模并且 $U \neq 0$. 这时有自然同构 $H^i(A, -) \cong \text{Tor}^{A^e}_{d-i}(U, -), \forall i \in \mathbb{N}$. 由下面的 [引理1.243] 和 [推论1.222] 可知 A 作为左 A^e-模有长度为 d 的有限生成投射分解. 类似 [推论1.224] 的证明过程, 利用 [引理1.231] 以及 U 作为右 A-模平坦得到自然同构 $\text{Tor}^{A^e}_k(U, -) \cong \text{Tor}^{A^e}_k(A, U \otimes_A -), \forall k \in \mathbb{N}$. 因此 $H^i(A, -) \cong H_{d-i}(A, U \otimes_A -), \forall i \in \mathbb{N}$. □

Remark 1.242. 通过 [推论1.224] 可知这里 A 是完全左 A^e-模的条件是必要的.

Lemma 1.243. 设 M 是完全左 R-模([命题1.195]). 则 $\text{p.dim}_R M = \sup\{i \in \mathbb{N} | \text{Ext}_R^i(M,R) \neq 0\}$.

Proof. 根据条件, 等号两边总是有限的自然数, 记 $n = \text{p.dim}_R M$. 那么存在左 R-模 N 使得 $\text{Ext}_R^n(M,N) \neq 0$. 总可选取形如 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow N \longrightarrow 0$ 的短正合列使得 F 是自由 R-模. 考虑该短正合列所诱导的 Ext 群长正合列得到 $\text{Ext}_R^n(M,F) \neq 0$. 由 [推论1.184], $\text{Ext}_R^n(M,-)$ 和任何正向集上的正向极限可交换. 特别地, $\text{Ext}_R^n(M,-)$ 和直和可交换, 这说明 $\text{Ext}_R^n(M,F) \neq 0$ 蕴含 $\text{Ext}_R^n(M,R) \neq 0$. □

Definition 1.244 (扭 Calabi-Yau 代数, [RR22]). 设 K-代数 A 满足 A 是投射 K-模. 如果 A 满足: (1) 作为左 A^e-模, A 是完全的; (2) 存在自然数 n 使得当 $i \neq n$ 时, $\text{Ext}_{A^e}^i(A,A^e) = 0$, 并且 $\text{Ext}_{A^e}^n(A,A^e)$ 上的右 A^e-模结构给出自身上的可逆 A-A 双模结构, 那么称 A 是维数为 n 的**扭 Calabi-Yau 代数**.

Remark 1.245. 如果 A 作为左 A^e-模是完全的, 那么也称 A 是**同调光滑的** [vdB02]. 例如可分代数总是同调光滑的. [注记1.235] 说明域上两个同调光滑的代数的张量积依然是同调光滑的. 同调光滑是左右对称的: 如果 A 作为左 A^e-模是完全模, 那么由任何有限生成投射左 A^e-模视作右 A^e-模后依然是有限生成投射的, 可知 A 作为右 A^e-模还是完全的. 由此易知 A 同调光滑蕴含 A^{op} 同调光滑. 且 $\text{p.dim}_{A^e} A = \text{p.dim}_{(A^{op})^e} A^{op}$.

Remark 1.246. 在导出范畴语言下我们能够给扭Calabi-Yau代数一个导出范畴版本的等价定义, 见[命题3.146].

Remark 1.247. 根据 [引理1.243], 扭 Calabi-Yau 代数的维数就是该代数的 Hochschild 维数. 因此 0 维扭 Calabi-Yau 代数 A 满足 A 是投射左 A^e-模, 即 A 是可分代数. 之后在 [定理1.255] 证明反之亦然.

Remark 1.248. 如果 A 是维数为 n 的扭 Calabi-Yau 代数并且可逆双模 $\text{Ext}_{A^e}^n(A,A^e)$ 和 A 作为 A-A 双模同构, 那么称 A 是维数为 n 的 **Calabi-Yau 代数**.

Remark 1.249. 事实上, 对 n 维扭 Calabi-Yau 代数 A, 定义中的可逆双模 $\text{Ext}_{A^e}^n(A,A^e)$ 满足作为 $Z(A)$-双模左右模结构一致, 见 [命题1.264] 的证明过程.

下面我们说明同调光滑代数的直和依然同调光滑. 首先需要

Lemma 1.250 ([MR87]). 设 $\alpha : R \to S$ 是含幺环间环同态, 那么可将 S 通过 α 视作左 R-模. 那么对任何左 S-模 M 有 $\text{p.dim}_R M \leq \text{p.dim}_S M + \text{p.dim}_R S$. 故当 S 是投射左 R-模时, 任何投射左 S-模视作 R-模也投射.

Proof. 不妨设 ${}_SM \neq 0$ 且 $\text{p.dim}_S M = n \in \mathbb{N}$. 下面对自然数 n 作归纳证明结论. 当 $n = 0$ 时, ${}_SM$ 作为某 (非零) 自由左 S-模的直和因子, 故 [命题1.122] 说明 $\text{p.dim}_R M \leq \text{p.dim}_R S$. 这证明了 $n = 0$ 时结论成立. 现在假设结论对投射维数不超过 $n-1 (n \geq 1)$ 的左 S-模成立, 那么可选取自由左 S-模 F 使得有左 S-模短正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

因为 $\text{p.dim}_S M = n \geq 1$, 所以无论 $\text{p.dim}_S F = \text{p.dim}_S K$ 或 $\text{p.dim}_S F < \text{p.dim}_S K$, 应用 [命题1.121] 都能得到 $\text{p.dim}_S K = n-1$. 因此对 ${}_SK$ 应用归纳假设得到 $\text{p.dim}_R K \leq \text{p.dim}_S K + \text{p.dim}_R S$. 将上述短正合列视作 R-模短正合列后, 根据 [命题1.121] 总有 $\text{p.dim}_R M \leq \max\{\text{p.dim}_R K, \text{p.dim}_R S\} + 1 \leq \text{p.dim}_R S + (n-1) + 1 = \text{p.dim}_R S + n$. 因此 $\text{p.dim}_R M \leq \text{p.dim}_S M + \text{p.dim}_R S$. □

Proposition 1.251 ([RR22]). 设 A, B 是域 $\Bbbk$ 上代数, 那么 $A \oplus B$ 同调光滑的充要条件是 A 和 B 都同调光滑.

Proof. 记 $R = A \oplus B$, 那么 $R^e \cong (A \otimes_{\Bbbk} A^{op}) \oplus (B \otimes_{\Bbbk} A^{op}) \oplus (A \otimes_{\Bbbk} B^{op}) \oplus (B \otimes_{\Bbbk} B^{op})$. 该标准同构把每个 $(a_1, b_1) \otimes (a_2, b_2) \in R^e$ 映至 $(a_1 \otimes a_2, b_1 \otimes a_2, a_1 \otimes b_2, b_1 \otimes b_2)$. 于是我们得到满环同态 $\alpha : R^e \to A^e, (a_1, b_1) \otimes (a_2, b_2) \mapsto a_1 \otimes a_2$ 和 $\beta : R^e \to B^e, (a_1, b_1) \otimes (a_2, b_2) \mapsto b_1 \otimes b_2$. 于是利用 α, β 可将左 A^e-模和 B^e-模视作 R^e-模. 根据前面的标准同构 $R^e \cong (A \otimes_{\Bbbk} A^{op}) \oplus (B \otimes_{\Bbbk} A^{op}) \oplus (A \otimes_{\Bbbk} B^{op}) \oplus (B \otimes_{\Bbbk} B^{op})$ 可知 A^e 和 B^e 作为 R^e-模都投射. 因此 [引理1.250] 说明任何投射左 A^e-模或投射左 B^e-模作为左 R^e-模都投射. 现在设 A 作为完全左 A^e-模和 B 作为完全左 B^e-模分别有有限长的有限生成投射分解

$$\cdots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

$$\cdots \longrightarrow Q^{-2} \longrightarrow Q^{-1} \longrightarrow Q^0 \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

那么这也是 A 和 B 作为左 R^e-模的有限生成投射分解. 注意到 $R = A \oplus B$ 现在通过 A, B 的左 R^e-模结构作为左 R^e-模就是 R 通常的左 R^e-模结构. 于是由 α, β 都是满射可知上述两个投射分解的直和作为左 R^e-模短正合列给出了 R 作为左 R^e-模的有限长的有限生成投射分解. 这证明了 R 是同调光滑的.

设 $z = (1, 0) \in A \oplus B = R$, 那么 $z \otimes z$ 是 R^e 中的中心幂等元. 并且有标准代数同构 $(z \otimes z)R^e \cong A^e$(左边的幺元就是 $z \otimes z$). 在此代数同构下, 任何左 R^e-模 X 可自然产生左 $(z \otimes z)R^e$-模 $(z \otimes z)X$. 进而 $(z \otimes z)X$ 也可以视作左 A^e-模. 于是 $(z \otimes z)R \cong A$ 作为左 $(z \otimes z)R^e$-模产生的 A 上左 A^e-模结构就是 A 上通常的左 A^e-模结构. 任何有限生成投射左 R^e-模都是某个有限生成自由 R^e-模的直和因子, 进而任何投射左 $(z \otimes z)R^e$-模也可以视作有限生成自由左 $(z \otimes z)R^e$-模的直和因子. 再注意到任何左 A^e-模 X 产生的左 $(z \otimes z)R^e$-模 $(z \otimes z)X$ 满足任何 $x \in (z \otimes z)X$ 有 $x = (z \otimes z)x$. 这些观察说明如果 R 作为左 R^e-模有有限长的有限生成投射分解:

$$\cdots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow R^e \longrightarrow 0.$$

那么就有 $A \cong (z \otimes z)R$ 作为左 $A^e \cong (z \otimes z)R^e$-模的有限生成投射分解

$$\cdots \longrightarrow (z \otimes z)P^{-2} \longrightarrow (z \otimes z)P^{-1} \longrightarrow (z \otimes z)P^0 \longrightarrow (z \otimes z)R^e \longrightarrow 0.$$

由此我们得到 A 作为左 A^e-模是完全的. 对称地, 也有 B 是完全左 B^e-模. □

之后我们将在 [定理1.255] 证明域上的 0 维扭 Calabi-Yau 代数等价于可分代数. 首先我们回顾些关于对称 Frobenius 代数的基本性质. 设 K 是含幺交换环, A 是 K-代数. 如果 A 是有限生成投射 K-模并且存在 A-A 双模同构 $A \cong \mathrm{Hom}_K(A, K)$, 则称 A 是**对称 Frobenius 代数**. 称 K-模同态 $\mathrm{tr} : A \to K$ 是 A 到 K 的**迹映射**, 如果 $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba), \forall a, b \in A$. 如果迹映射 $\mathrm{tr} : A \to K$ 满足对任何 $a \in A$, $\mathrm{tr}(aA) = 0$ 蕴含 $a = 0$, 则称 tr 是**非退化的**. 有限维代数的对称 Frobenius 性质能够用非退化迹的存在性刻画:

Lemma 1.252 ([Lam99])**.** 设 A 是域 K 上有限维代数. 那么 A 是对称 Frobenius 代数当且仅当存在 A 到 K 的非退化迹.

Proof. 必要性: 这时存在 A-A 双模同构 $\theta : A \to \mathrm{Hom}_K(A, K)$. 命 $\mathrm{tr} = \theta(1)$. 那么对任何 $a, b \in A$, 有

$$\mathrm{tr}(ab) = \theta(1)(ab) = (\theta(1)a)(b) = \theta(a)(b) = (a\theta(1))(b) = \theta(1)(ba) = \mathrm{tr}(ba).$$

这说明 $\mathrm{tr} : A \to K$ 是迹映射. 如果 $a \in A$ 满足 $\mathrm{tr}(aA) = 0$, 那么 $\theta(a) = 0$. 这迫使 $a = 0$.

充分性: 如果有非退化迹映射 tr : $A \to K$. 命 $\theta : A \to \mathrm{Hom}_K(A, K), a \mapsto \mathrm{tr}(a-)$, 这明显是 A-A 双模同态并且是单射. 现在利用 A 和 $\mathrm{Hom}_K(A, K)$ 是维数相同的有限维 K-代数得到 θ 是双射.

现在设 R 是域 K 上有限维半单代数. 根据 Wedderburn-Artin 定理, R 同构于有限多个 K 上有限维可除代数的矩阵代数的直和, 所以根据前面的讨论只需证明 $R = \mathrm{M}_n(D)$, D 是某个 K 上有限维可除代数, 的情形即可. 再结合 K-代数同构 $\mathrm{M}_n(D) \cong D \otimes_K \mathrm{M}_n(K)$, 只需证明 $R = D$ 是的情形即可. 由于 D 是有限维代数, 所以 $D/[D, D] \neq 0$. 进而存在 D 到 K 的非零迹映射, 结合 D 是单环得到该迹映射是非退化的. $\square$

Remark 1.253. 一般地, 对 K-代数 A, tr : $A \to K$ 诱导 A-A 双模同态 $A \to \mathrm{Hom}_K(A, K), a \mapsto \mathrm{tr}(a-)$. 反之, 任何 A-A 双模同态 $A \to \mathrm{Hom}_K(A, K)$ 也自然诱导 A 到 K 的迹映射. 因此研究 A 到 K 的迹映射等同于研究 A 到 $\mathrm{Hom}_K(A, K)$ 的 A-A 双模同态.

Proposition 1.254 ([Lam99])**.** 设 K 是域, 有限维 K-代数 A_1, A_2 都是对称 Frobenius 代数. 那么 $A_1 \oplus A_2$ 和 $A_1 \otimes_K A_2$ 都是对称 Frobenius 代数. 特别地, 域上的有限维半单代数都是对称 Frobenius 代数.

Proof. 根据 [引理1.252], 只需构造 $A_1 \oplus A_2$ 和 $A_1 \otimes_K A_2$ 上的非退化迹映射. 设 $\mathrm{tr}_1 : A_1 \to K$ 和 $\mathrm{tr}_2 : A_2 \to K$ 都是非退化迹. 那么 $\tau : A_1 \oplus A_2 \to K, (a_1, a_2) \mapsto \mathrm{tr}_1(a_1) + \mathrm{tr}_2(a_2)$ 明显是非退化迹. 再考虑

$$T : A_1 \otimes_K A_2 \to K, a_1 \otimes a_2 \mapsto \mathrm{tr}_1(a_1)\mathrm{tr}_2(a_2),$$

这明显是迹映射. 设 A_1 作为 K-线性空间有基 $\{u_1, ..., u_n\}$, A_2 作为 K-线性空间有基 $\{v_1, ..., v_m\}$. 可直接计算 T 关于 $A_1 \otimes_K A_2$ 的 K-基 $\{u_1 \otimes v_1, ..., u_1 \otimes v_m, u_2 \otimes v_1, ..., u_2 \otimes v_m, ..., u_n \otimes v_1, ..., u_n \otimes v_m\}$ 的判别式就是矩阵 $(\mathrm{tr}(u_i u_j))_{n\times n}$ 和 $(\mathrm{tr}(v_i v_j))_{m\times m}$ 的 Kronecker 积的行列式. 于是得到 T 是非退化迹. $\square$

Theorem 1.255 ([RR22])**.** 设 K 是域且 A 是 K-代数, 那么以下等价:
(1) A 是 0 维扭 Calabi-Yau 代数;
(2) A 是可分 K-代数;
(3) A 是 0 维 Calabi-Yau 代数.

Proof. (1)⇒(2) 和 (3)⇒(1) 都是明显的 (回忆 [注记1.247]). 现在证明 A 是可分 K-代数时, A 也是 0 维 Calabi-Yau 代数来完成证明. 这时 A^e 是有限维半单代数, 所以 [命题1.254] 说明 A^e 是对称 Frobenius 代数. 进而有 A^e-A^e 双模同构 $\mathrm{Hom}_K(A^e, K) \cong A^e$. 所以作为右 A^e-模有同构 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, A^e) \cong \mathrm{Hom}_{A^e}(A, \mathrm{Hom}_K(A^e, K)) \cong \mathrm{Hom}_K(A^e \otimes_{A^e} A, K) \cong \mathrm{Hom}_K(A, K)$. 因为 K-代数 A 的可分性也蕴含 A 是有限维半单代数, 所以也有右 A^e-模同构 $\mathrm{Hom}_K(A, K) \cong A$. 这就证明了 A 是 Calabi-Yau 代数. $\square$

Example 1.256. 设 K 是域, 那么 $A = K \oplus K$ 是交换仿射可分代数, 因此 [定理1.255] 保证了 A 是 0 维 Calabi-Yau 代数. 这也说明域上交换仿射 Calabi-Yau 代数未必是整区.

在扭 Calabi-Yau 代数的语言下, [定理1.241] 可重述为:

Theorem 1.257 ([vdB98, vdB02])**.** 设 K-代数 A 满足 A 是投射 K-模. 如果 A 是维数为 n 的扭 Calabi-Yau 代数, 如果记可逆双模 $\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A^e)$ 为 U, 那么对任何自然数 i 有自然同构 $H^i(A, -) \cong H_{n-i}(A, U \otimes_A -)$.

Remark 1.258. 对维数是 n 的 Calabi-Yau 代数 A, 有自然同构 $H^i(A, -) \cong H_{n-i}(A, -), \forall i \in \mathbb{N}$.

对 K-代数 A, 回忆 K-代数自同构 $\tau: A \to A$ 被称为**内自同构**, 如果存在可逆元 $b \in A$ 使得 $\tau(x) = bxb^{-1}, \forall x \in A$. 如果 τ 是 A 上代数自同构, 那么我们可以赋予 A 上新的左 A-模结构: 对任何 $a \in A, x \in A$, $a \cdot x = \tau(a)x$. 类似地, A 的任何代数自同构 μ 可诱导新的右 A-模结构: $x \cdot a = x\mu(a), \forall a, x \in A$. 对带有 τ 给出的左 A-模结构以及 μ 给出的右 A-模结构得到的 A 上新的 A-A 双模结构, 记相应双模为 ${}^{\tau}A^{\mu}$. 如果 τ 是 A 上恒等映射, 相应的双模 ${}^{1}A^{\mu}$ 或 A^{μ}. 如果 μ 是 A 上恒等映射, 那么 τ 对应的 A-A 双模记作 ${}^{\tau}A^{1}$ 或 ${}^{\tau}A$. 如果 μ 是 K-代数 A 上代数自同构, 那么可直接验证有双模同构 ${}^{\mu^{-1}}A^{1} \cong {}^{1}A^{\mu}$ 以及 ${}^{1}A^{\mu} \otimes_A {}^{\mu}A^{1} \cong {}^{\mu}A^{1} \otimes_A {}^{1}A^{\mu} \cong A$.

Lemma 1.259. 设 A 是 K-代数, M 是 A-A 双模满足有左 A-模同构 $A \cong M$. 那么存在 A 上 K-代数自同态 μ 使得有 A-A 双模同构 ${}^{1}A^{\mu} \cong M$.

Proof. 设有左 A-模同构 $\varphi: A \to M$. 记 $\eta = \varphi(1)$, 那么 η 是 M 作为秩为 1 的左 A-模的基. 对每个 $a \in A$, 设 $\mu(a) \in A$ 是由 $\varphi(\mu(a)) = \eta a$ 确定的元素. 等价地, $\mu(a)\eta = \eta a, \forall a \in A$. 对任何 $a, b \in A$ 有

$$\varphi(\mu(ab)) = \eta ab = \mu(a)\eta b = \mu(a)\varphi(\mu(b)) = \varphi(\mu(a)\mu(b)).$$

由此可知 μ 是 A 作为 K-代数的自同态. 容易直接验证 φ 给出双模同构 ${}^{1}A^{\mu} \cong M$. □

Remark 1.260. 如果 K-代数 A 满足存在代数自同态 μ 使得 ${}^{1}A^{\mu}$ 是可逆 A-A 双模, 那么 μ 是代数自同构: 首先注意这时有 A-A 双模同构 ${}^{1}A^{\mu} \otimes_A {}^{\mu}A^{1} \cong A$. 因此也有双模同构 ${}^{\mu}A^{1} \otimes_A {}^{1}A^{\mu} \cong A$. 设 $\eta \in {}^{\mu}A^{1} \otimes_A {}^{1}A^{\mu}$ 是 $1 \in A$ 在某个双模同构下的像. 易见存在 $x \in A$ 使得 $\eta = x \otimes 1$. 我们断言 $x \in A$ 是可逆元. 事实上, 因为 $1 \otimes 1$ 可由 η 左乘 A 中元素生成也可以由 η 右乘 A 中元素生成, 所以作为加法群 $A \otimes_A A$ 中元素, 有 $u, v \in A$ 使得 $\mu(u)x \otimes 1 = x\mu(v) \otimes 1 = 1 \otimes 1$. 所以 $x \in A$ 可逆. 由 η 是 ${}^{\mu}A^{1} \otimes_A {}^{1}A^{\mu}$ 作为秩为 1 的自由左 A-模的基得到 μ 是单射. 最后说明 μ 是满射. 任取 $b \in A$, 那么存在 $a \in A$ 使得 $(bx) \otimes 1 = a\eta$, 即在加法群 $A \otimes_A A$ 中有 $bx \otimes 1 = \mu(a)x \otimes 1$, 这说明在 A 中有 $bx = \mu(a)x$. 结合 x 在 A 中可逆得到 $b = \mu(a)$. 故 μ 是代数自同构.

Definition 1.261 (斜 Calabi-Yau 代数, [RR22]). 设 K-代数 A 满足 A 是投射 K-模. 如果 A 是 n 维扭 Calabi-Yau 代数并且存在 A 上代数自同构 μ 使得有 A-A 双模同构 $\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A^e) \cong {}^{1}A^{\mu}$, 那么称 A 是 n 维**斜 Calabi-Yau 代数**, 这里的代数自同构 μ 被称为 A 的 **Nakayama 自同构**.

Remark 1.262. 斜 Calabi-Yau 代数的 Nakayama 自同构在相差某个内自同构意义下唯一: 如果 A 是斜 Calabi-Yau 代数并且代数自同构 μ 和 τ 都是 A 的 Nakayama 自同构, 那么有 A-A 双模同构 ${}^{1}A^{\mu} \cong {}^{1}A^{\tau}$. 记该双模同构为 $\varphi: A \to A$, 那么对任何 $a, b \in A$ 有 $\varphi(a\mu(b)) = \varphi(a)\tau(b)$. φ 自然可视作 $u = \varphi(1) \in A$ 诱导的右乘变换. 事实上, u 是 A 中可逆元. 原因是 φ 是满射说明存在 $v \in A$ 使得 $\varphi(v) = 1$. 于是 $vu = 1 = u\mu(v)$. 因此可逆元 u 满足 $a\mu(b)u = au\tau(b), \forall a, b \in A$. 进而 μ 是 τ 和 u 决定的内自同构的合成. 反之, 如果 $\mu\tau^{-1}$ 是 A 上的内自同构, 即有可逆元 $u \in A$ 使得 $\mu(a)u = u\tau(a), \forall a \in A$. 命 $\varphi: A^{\mu} \to A^{\tau}, x \mapsto xu$, 那么关于 A 上通常的左 A-模结构, φ 是左 A-模同构. 对任何 $a, b \in A$, 在 A 中有 $\varphi(a\mu(b)) = a\mu(b)u = au\tau(b) = \varphi(a)\mu(b)$. 这说明 φ 给出 A-A 双模同构 ${}^{1}A^{\mu} \cong {}^{1}A^{\tau}$. 特别地, 斜 Calabi-Yau 代数是 Calabi-Yau 代数当且仅当其 Nakayama 自同构是内自同构.

Remark 1.263. 存在不是斜 Calabi-Yau 代数的扭 Calabi-Yau 代数, 见 [RR22, Example 7.2].

Proposition 1.264 ([BZ08]). 设 A 是 d 维斜 Calabi-Yau 代数并且有 Nakayama 自同构 $\mu: A \to A$. 那么 μ 限制在 $Z(A)$ 上是恒等映射. 特别地, $Z(A)$ 在 $\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A, A^e)$ 上的左作用和右作用一致.

Proof. 现在设有 A-A 双模同构 $\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A,A^e)\cong A^\mu$. 对 $z\in Z(A)$, z 在 A^μ 上的左作用来自 z 的左乘, 右作用来自 $\mu(z)$ 的右乘. 因为 $\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A,A^e)$ 上的 A-A 双模结构来自 A^e 在自身上的右乘变换给出的 A^e 上的右 A^e-模结构, 所以 $\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A,A^e)$ 作为 A-A 双模, z 在 $\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A,A^e)$ 上的右作用来自 $z\otimes 1$ 在 A^e 上的右乘变换, z 在 $\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A,A^e)$ 上的左作用来自 $1\otimes z$ 在 A^e 上的右乘变换. 因为 $z\in Z(A)$, 所以 z 在 $\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A,A^e)$ 上的左作用和右作用分别可以由 $1\otimes z$ 和 $z\otimes 1$ 在 A^e 上的右乘变换诱导. 如果我们能够说明 $\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A,(z\otimes 1)_r)=\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A,(1\otimes z)_r)$, 那么 $Z(A)$ 中元素在 $\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A,A^e)$ 上左作用和右作用相同, 由此便知 μ 在 $Z(A)$ 上的限制是恒等映射. 而由 $Z(A)$ 中元素在 A 上的左作用和右作用相同立即得到对 A 作为左 A^e-模的投射分解:

$$\cdots\longrightarrow P^{-2}\longrightarrow P^{-1}\longrightarrow P^0\longrightarrow A\longrightarrow 0,$$

由 $z\otimes 1$ 和 $1\otimes z$ 在 A 上的左乘变换 (这也是左 A^e-模同态) 诱导出的下面两个链映射是链同伦的:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[r] \arrow[d, "z\otimes 1"] & P^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "z\otimes 1"] & P^0 \arrow[r] \arrow[d, "z\otimes 1"] & A \arrow[r] \arrow[d, "z\otimes 1"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r] & P^0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[r] \arrow[d, "1\otimes z"] & P^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "1\otimes z"] & P^0 \arrow[r] \arrow[d, "1\otimes z"] & A \arrow[r] \arrow[d, "1\otimes z"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r] & P^0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

因此 $\mathrm{Hom}_{A^e}(1\otimes z,A^e)$ 和 $\mathrm{Hom}_{A^e}(z\otimes 1,A^e)$ 作为计算 $\mathrm{Ext}^\bullet_{A^e}(A,A^e)$ 的复形上的两个链映射也是链同伦的. 由此得到 $\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A,(z\otimes 1)_r)=\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A,(1\otimes z)_r)$. □

Remark 1.265. 证明过程表明 d 维扭 Calabi-Yau 代数 A 满足 $Z(A)$ 在 $\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A,A^e)$ 上的左右作用一致.

从 [命题1.264] 可知交换代数的 Calabi-Yau 性质和斜 Calabi-Yau 性质是等价的. 更进一步, 利用 Koszul 复形, 交换代数光滑性关于局部完全交的刻画以及 Hochschild-Kostant-Rosenberg 定理可证得

Theorem 1.266. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上本质有限型光滑交换代数, 且 Krull 维数是 d. 那么以下等价:
(1) 存在自然数 n 使得当 $i\neq n$ 时 $\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A,A^e)=0$, 而 $i=n$ 时有 A-A 双模同构 $\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A,A^e)\cong A$;
(2) 有 A-A 双模同构 $\Omega^d(A)\cong A$(注意 d 是满足 $\Omega^n(A)\neq 0$ 的最大自然数 n).
当上述等价命题之一成立时, 命题中的自然数 $n=d=\mathrm{p.dim}_{A^e}A$.

Remark 1.267. 一般地, 对域上本质有限型光滑交换代数 A, 总有 $\mathrm{p.dim}_{A^e}A=\mathrm{gl.dim}A=\mathrm{k.dim}A$. 如果记 d 是公共的维数值, 那么也有 $d=\max\{n\in\mathbb{N}|\Omega^n(A)\neq 0\}$. 这时 A 的代数 de Rham 上链复形为

$$0\longrightarrow A\longrightarrow \Omega^1(A)\longrightarrow \Omega^2(A)\longrightarrow\cdots\longrightarrow \Omega^d(A)\longrightarrow 0.$$

利用 [定理1.266], 我们便得到本质有限型交换代数的 Calabi-Yau 性质的等价刻画:

Proposition 1.268 (交换 Calabi-Yau 代数, [LWZ17])**.** 设 A 是域 $\Bbbk$ 上本质有限型光滑交换代数. 那么以下等价:
(1) A 是 Calabi-Yau 代数;
(2) A 是斜 Calabi-Yau 代数;
(3) A 有平凡的典范丛, 即有 A-模同构 $\Omega^d(A)\cong A$, 这里 $d=\mathrm{k.dim}A$.

Remark 1.269. 结合 [注记1.256], 我们看到域上典范丛平凡的交换仿射光滑代数未必是整区.

2 三角范畴

2.1 同伦范畴的三角结构

本节固定加性范畴 $\mathcal{A}$, 下面主要介绍 $\mathcal{A}$ 上复形范畴 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 以及同伦范畴 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 上的平移函子、复形间链映射的映射锥以及 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中的“好三角”的概念与基本特性, 这将作为三角范畴定义的公理化动机.

对任何整数 ℓ, 我们能够讨论复形的 ℓ 次平移. 具体地, 设 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 是 $\mathcal{A}$ 上复形, 定义 $X[\ell]^n = X^{n+\ell}$ 以及 $d_{X[\ell]}^n = (-1)^\ell d_X^{n+\ell}$, 于是得到 $\mathcal{A}$ 上复形 $(X[\ell]^\bullet, d_{X[\ell]}^\bullet)$, 称为复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 的 ℓ **次左平移**. 对任何 $\mathcal{A}$ 上复形间的链映射 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$, 定义 $f[\ell]^n = f^{n+\ell}, \forall n \in \mathbb{Z}$, 进而得到链映射 $f[\ell]^\bullet : X[\ell]^\bullet \to Y[\ell]^\bullet$. 于是对任何整数 ℓ, 我们得到加性函子 $[\ell] : \mathscr{C}(\mathcal{A}) \to \mathscr{C}(\mathcal{A})$, 称之为复形范畴上 ℓ **次左平移函子**. 易见 1 次左平移函子 [1] 是范畴 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 上自同构, 并有逆 $[-1]$. 对任何整数 $\ell, \mathscr{C}(\mathcal{A})$ 上平移函子满足 $[\ell] = [1]^\ell$. 如果 ℓ 是复整数, 那么复形 $(X[\ell]^\bullet, d_{X[\ell]}^\bullet)$ 通过 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 的右平移实现.

如果链映射 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ 是零伦的, 那么 $f[\ell]^\bullet : X[\ell]^\bullet \to Y[\ell]^\bullet$ 也是零伦的: 设态射族 $\{s^n : X^n \to X^{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足 $f^n = s^{n+1}d_X^n + d_X^{n-1}s^n, \forall n \in \mathbb{Z}$, 那么有 $f[\ell]^n = (-1)^\ell s^{n+\ell+1} d_{X[\ell]}^n + d_{X[\ell]}^{n-1}(-1)^\ell s^{n+\ell}$. 于是平移函子 $[\ell]$ 也能够视作同伦范畴 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 上的范畴自同构. 在平移函子的记号下, [例1.47] 中的 Hom 复形的上同调群能够有简洁的描述. 现在设 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 和 $(Y^\bullet, d_Y^\bullet)$ 都是 $\mathcal{A}$ 上复形, 那么对任何整数 n, 复形 $(\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y), d^\bullet)$ 的 n 次上闭链群 $\mathrm{Ker}d^n = \{f = (f^p)_{p\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}^n(X,Y) | d_Y^{n+p} f^p = (-1)^n f^{p+1} d_X^p\}$ 就是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y[n]^\bullet)$. 而 $(\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y), d^\bullet)$ 的 n 次上边缘链群 $\mathrm{Im}d^{n-1} = \{f = (f^p)_{p\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}^n(X,Y) |$存在$s = (s^p)_{p\in\mathbb{Z}}$使得$f^p = (d^{n-1}s)^p = d_Y^{n-1+p}s^p + (-1)^n s^{p+1} d_X^p\}$ 可以重新描述为 $\mathrm{Htp}(X^\bullet, Y[n]^\bullet)$. 于是我们得到公式

Proposition 2.1 ([ZW18]). 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 和 $(Y^\bullet, d_Y^\bullet)$ 都是 $\mathcal{A}$ 上复形. 那么对任何整数 n 有

$$H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y[n]^\bullet).$$

Remark 2.2. 该公式左边是 Hom 复形的上同调, 右边是链映射同伦等价类集. 故该公式联系着上同调和同伦. 这里使用的 Hom 复形习惯是对相应双复形的行微分添加符号, 根据 (1.6) 中的链同构, 另一种习惯定义的 Hom 复形同样有 [命题2.1] 的同构. 事实上, 如果我们考虑的 Hom 复形是通过双复形 (1.5) 定义的, 那么这里 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)$ 的微分 $d^n : \mathrm{Hom}^n(X,Y) \to \mathrm{Hom}^{n+1}(X,Y)$ 满足把 $(f^p : X^p \to Y^{p+n})_{p\in\mathbb{Z}}$ 映至 $((-1)^{n+1} d_Y^{n+p} f^p + f^{p+1} d_X^p : X^p \to Y^{n+p+1})_{p\in\mathbb{Z}}$, 由此不难看出同样有 [命题2.1] 成立.

Remark 2.3. 设 A, B 是含幺环, 那么对左 A-模复形 X 和 A-B 双模复形 Y, $\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)$ 可自然视作右 B-模复形. 这时 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ 也有自然的右 B-模结构, 这时所有零伦的链映射构成的加法子群 $\mathrm{Htp}(X^\bullet, Y^\bullet)$ 成为 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ 的右 B-子模, 所以 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ 上有自然的右 B-模结构. 于是 [命题2.1] 中的公式 $H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y[n]^\bullet)$ 也是视作右 B-模的等同. 更进一步, 如果 X 这时是 A-C 双模复形, Y 是 A-B 双模复形, 那么 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)$ 可视作 C-B 双模复形. 于是每个 $H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y))$ 是 C-B 双模, 同样, $\mathrm{Htp}(X^\bullet, Y^\bullet)$ 成为 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ 的 C-B 子模, 于是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y[n]^\bullet)$ 也有 C-B 双模结构. 因此 [命题2.1] 中的公式 $H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y[n]^\bullet)$ 的等同这时也是 C-B 双模的等同.

下面我们介绍复形间链映射决定的映射锥以及相关基本性质. 现在固定 $\mathcal{A}$ 上复形间链映射 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$. 对任何整数 n, 定义 $\mathrm{Con}(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n$ 以及态射

$$d_{\mathrm{Con}(f)}^n = \begin{pmatrix} d_{X[1]}^n & 0 \\ f[1]^n & d_Y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} : X^{n+1} \oplus Y^n \to X^{n+2} \oplus Y^{n+1},$$

易见 $(\mathrm{Con}(f)^\bullet, d^\bullet_{\mathrm{Con}(f)})$ 是复形, 称为 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ 的**映射锥**. 映射锥的 n 次微分是 $X[1]^n \oplus Y^n \to X[2]^n \oplus Y[1]^n$ 的态射. 在 [记号1.3] 下, 可直接验证 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 中有下述链映射:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : Y^\bullet \to \mathrm{Con}(f)^\bullet \text{ 以及 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} : \mathrm{Con}(f)^\bullet \to X[1]^\bullet.$$

因此我们得到 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 中链映射序列

$$X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \mathrm{Con}(f)^\bullet \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} X[1]^\bullet. \tag{2.1}$$

将 (2.1) 在同伦范畴 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中对应的态射序列称为由 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ 决定的**标准三角**. 在同伦范畴中, 容易验证 (2.1) 中任意两个相邻态射 (链映射同伦等价类) 的合成是零.

Example 2.4. 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, 那么复形 $(X^\bullet, d^\bullet_X)$ 上恒等链映射 $1^\bullet_X$ 决定的映射锥 $\mathrm{Con}(1_X)^\bullet$ 是可缩复形.

Proof. 对任何整数 n, 考虑下述态射便能够给出映射锥 $\mathrm{Con}(1_X)^\bullet$ 上恒等链映射到零链映射的同伦:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : X^{n+1} \oplus X^n \to X^n \oplus X^{n-1}.$$

□

Remark 2.5. 复形 $(X^\bullet, d^\bullet_X)$ 上恒等链映射的映射锥能够用于刻画从 $(X^\bullet, d^\bullet_X)$ 出发的链映射是零伦的. 具体地, 对任何链映射 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$, 它是零伦的当且仅当在 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 中存在链映射 $h^\bullet : \mathrm{Con}(1_X)^\bullet \to Y^\bullet$ 使得

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[rr, "\binom{1}{0}"] \arrow[dr, "f^\bullet"'] & & \mathrm{Con}(1_X)^\bullet \arrow[dl, dashed, "h^\bullet"] \\ & Y^\bullet & \end{tikzcd}$$

交换. 充分性由 [例2.4] 说明的 $\mathrm{Con}(1_X)^\bullet$ 是同伦范畴中零对象立即得到. 必要性: 如果 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ 是零伦的, 设有态射族 $\{s^n : X^n \to Y^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足 $f^n = s^{n+1}d^n_X + d^{n-1}_Y s^n, \forall n \in \mathbb{Z}$. 命 $h^n = \begin{pmatrix} s^{n+1} & f^n \end{pmatrix}$, 那么可直接验证射 $h^\bullet : \mathrm{Con}(1_X)^\bullet \to Y^\bullet$ 是满足上图交换的链映射. 因此零伦的链映射可经 $\mathrm{Con}(1_X)^\bullet$ 分解.

一般地, 称下述形式的链映射序列在 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中对应的态射序列为 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中的**三角** (**当讨论同伦范畴中的态射时, 我们取定其作为链映射等价类的一个代表元, 同伦范畴中严格的态射记号应当用链映射等价类表示**):

$$X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} X[1]^\bullet.$$

设同伦范畴 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中有三角 $X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} X[1]^\bullet$ 和 $\hat{X}^\bullet \xrightarrow{\hat{f}^\bullet} \hat{Y}^\bullet \xrightarrow{\hat{g}^\bullet} \hat{Z}^\bullet \xrightarrow{\hat{h}^\bullet} \hat{X}[1]^\bullet$. 如果由同伦范畴中的态射 $u^\bullet : X^\bullet \to \hat{X}^\bullet, v^\bullet : Y^\bullet \to \hat{Y}^\bullet$ 和 $w^\bullet : Z^\bullet \to \hat{Z}^\bullet$ 构成的三元组 $(u^\bullet, v^\bullet, w^\bullet)$ 满足

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "u^\bullet"] & Y^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "v^\bullet"] & Z^\bullet \arrow[r, "h^\bullet"] \arrow[d, "w^\bullet"] & X[1]^\bullet \arrow[d, "u[1]^\bullet"] \\ \hat{X}^\bullet \arrow[r, "\hat{f}^\bullet"] & \hat{Y}^\bullet \arrow[r, "\hat{g}^\bullet"] & \hat{Z}^\bullet \arrow[r, "\hat{h}^\bullet"] & \hat{X}[1]^\bullet \end{tikzcd}$$

(在同伦范畴中) 交换, 则称 $(u^\bullet, v^\bullet, w^\bullet)$ 是**三角间的态射**. 如果三角态射 $(u^\bullet, v^\bullet, w^\bullet)$ 中每个 (同伦范畴中的) 态射是同构, 则称 $(u^\bullet, v^\bullet, w^\bullet)$ 是**三角同构**. 前面对 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 的链映射 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$, 能够诱导 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中的标准三角 (2.1). 一个基本问题是 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ 所在的链映射等价类如果选取其他的代表元, 定义出的同伦范畴中的标准三角与 (2.1) 有何关系. 下面的 [命题2.6] 说明在同伦范畴中任何态射, 不同链映射代表元的选取定义出的标准三角是同构的. 所以同伦范畴中态射决定的标准三角在同构意义下由态射本身决定.

Proposition 2.6 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴且有同伦的链映射 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ 和 $g^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$, 并设态射族 $\{s^n : X^n \to Y^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 $f^\bullet$ 到 $g^\bullet$ 的同伦, 即 $d_Y^{n-1}s^n + s^{n+1}d_X^n = f^n - g^n, \forall n \in \mathbb{Z}$. 那么在 $\mathscr{K}(A)$ 中

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "1_X^\bullet"'] & Y^\bullet \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "1_Y^\bullet"'] & \mathrm{Con}(f)^\bullet \arrow[r, "(1\ 0)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ s^\bullet & 1\end{smallmatrix}\right)"] & X[1]^\bullet \arrow[d, "1_{X[1]}^\bullet"] \\
X^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"'] & Y^\bullet \arrow[r, "\binom{0}{1}"'] & \mathrm{Con}(g)^\bullet \arrow[r, "(1\ 0)"'] & X[1]^\bullet
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

交换并且给出上行标准三角与下行标准三角间的三角同构.

Proof. 利用态射族 $\{s^n : X^n \to Y^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 $f^\bullet$ 到 $g^\bullet$ 的同伦可直接验证

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s^\bullet & 1 \end{pmatrix} : \mathrm{Con}(f)^\bullet \to \mathrm{Con}(g)^\bullet$$

是定义合理的链映射 (且易验证是链同构), 于是由图 (2.2) 明显在 $\mathscr{K}(A)$ 中交换便知结论成立. □

现在记 $\mathcal{E}$ 是 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中所有与标准三角 (即形如 (2.1) 的三角) 同构的三角构成的类. 那么由标准三角中任意两个 (作为同伦范畴中的) 相邻态射合成是零立即得到 $\mathcal{E}$ 中的三角都满足任意两个相邻态射的合成是零.

Proposition 2.7 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, 那么上述三角类 $\mathcal{E}$ 满足:

(1) 三角类 $\mathcal{E}$ 关于 (三角) 同构封闭.

(2) 任取 $\mathcal{A}$ 上复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$, 那么三角 $X^\bullet \xrightarrow{1_X^\bullet} X^\bullet \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]^\bullet$ 在 $\mathcal{E}$ 中.

(3) 任给 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中态射 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$, $\mathcal{E}$ 中存在 $X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} X[1]^\bullet$ 的三角.

(4) 任给三角 $X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} X[1]^\bullet$, 该三角在 $\mathcal{E}$ 中当且仅当 $Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} X[1]^\bullet \xrightarrow{-f[1]^\bullet} Y[1]^\bullet$ 在 $\mathcal{E}$ 中.

(5) 如果 $X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} X[1]^\bullet$ 和 $\hat{X}^\bullet \xrightarrow{\hat{f}^\bullet} \hat{Y}^\bullet \xrightarrow{\hat{g}^\bullet} \hat{Z}^\bullet \xrightarrow{\hat{h}^\bullet} \hat{X}[1]^\bullet$ 都是 $\mathcal{E}$ 中三角且有 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中交换图:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "u^\bullet"'] & Y^\bullet \arrow[d, "v^\bullet"] \\
\hat{X}^\bullet \arrow[r, "\hat{f}^\bullet"] & \hat{Y}^\bullet
\end{tikzcd}$$

那么存在链映射 $w^\bullet : Z^\bullet \to \hat{Z}^\bullet$ 使得在 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中有交换图:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "u^\bullet"'] & Y^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "v^\bullet"] & Z^\bullet \arrow[r, "h^\bullet"] \arrow[d, dashed, "w^\bullet"] & X[1]^\bullet \arrow[d, "u[1]^\bullet"] \\
\hat{X}^\bullet \arrow[r, "\hat{f}^\bullet"] & \hat{Y}^\bullet \arrow[r, "\hat{g}^\bullet"] & \hat{Z}^\bullet \arrow[r, "\hat{h}^\bullet"] & \hat{X}[1]^\bullet
\end{tikzcd}$$

Proof. 根据 $\mathcal{E}$ 的定义便知 (1) 成立. 现在说明 (2): 由 [例2.4] 知复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 的恒等链映射 $1_X^\bullet$ 给出的同伦范畴中的标准三角同构于 $X^\bullet \xrightarrow{1_X^\bullet} X^\bullet \longrightarrow 0^\bullet \longrightarrow X[1]^\bullet$. 因此 (2) 也成立. (3) 通过取同伦范畴中态射作为链映射等价类的代表元考虑标准三角便知. 现在说明 (4), 根据 $\mathcal{E}$ 的定义易见只需处理标准三角的情形. 并且只需要证明必要性: 如果证明了任何 $\mathcal{E}$ 中三角 $X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} X[1]^\bullet$ 满足

$$Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} X[1]^\bullet \xrightarrow{-f[1]^\bullet} Y[1]^\bullet$$

也在 $\mathcal{E}$ 中. 那么当 $Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} X[1]^\bullet \xrightarrow{-f[1]^\bullet} Y[1]^\bullet$ 在 $\mathcal{E}$ 中时, 也有

$$X[1]^\bullet \xrightarrow{-f[1]^\bullet} Y[1]^\bullet \xrightarrow{-g[1]^\bullet} Z[1]^\bullet \xrightarrow{-h[1]^\bullet} X[2]^\bullet \in \mathcal{E}.$$

所以 $X[1]^\bullet \xrightarrow{f[1]^\bullet} Y[1]^\bullet \xrightarrow{g[1]^\bullet} Z[1]^\bullet \xrightarrow{h[1]^\bullet} X[2]^\bullet$ 同构于某个标准三角. 再用平移函子 $[-1]$ 作用相应的三角同构图可知 $X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} X[1]^\bullet$ 也同构于某个标准三角, 所以在 $\mathcal{E}$ 中. 根据前面的讨论, 要完成 (4) 的证明只需再验证标准三角满足必要性. 现在考虑标准三角 (2.1), 我们需要证明下述三角在 $\mathcal{E}$ 中:

$$Y^\bullet \xrightarrow{\binom{0}{1}} \mathrm{Con}(f)^\bullet \xrightarrow{(1\ 0)} X[1]^\bullet \xrightarrow{-f[1]^\bullet} Y[1]^\bullet. \tag{2.3}$$

考虑标准三角 $Y^\bullet \xrightarrow{\alpha(f)^\bullet = \binom{0}{1}} \mathrm{Con}(f)^\bullet \xrightarrow{\binom{0}{1}} \mathrm{Con}(\alpha(f))^\bullet \xrightarrow{(1\ 0)} Y[1]^\bullet$. 对每个正整数 n, 定义

$$\varphi^n = \begin{pmatrix} -f^{n+1} \\ 1_X^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} : X^{n+1} \to \mathrm{Con}(\alpha(f))^n = Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n, \psi^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \mathrm{Con}(\alpha(f))^n \to X^{n+1},$$

可直接计算验证 $\varphi^\bullet : X[1]^\bullet \to \mathrm{Con}(\alpha(f))^\bullet$ 和 $\psi^\bullet : \mathrm{Con}(\alpha(f))^\bullet \to X[1]^\bullet$ 都是定义合理的链映射并且在同伦范畴内自然诱导 $\alpha(f)^\bullet$ 的映射锥给出的标准三角与 (2.3) 同构 (三角间其余竖直态射使用恒等链映射).

最后证明 (5), 易见只需处理标准三角的情形. 现在设链映射 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ 决定的标准三角 (2.1) 和 $g^\bullet : \hat{X}^\bullet \to \hat{Y}^\bullet$ 决定的标准三角满足存在链映射 $u^\bullet : X^\bullet \to \hat{X}^\bullet$ 和 $v^\bullet : Y^\bullet \to \hat{Y}^\bullet$ 满足

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "u^\bullet"'] & Y^\bullet \arrow[d, "v^\bullet"] \\ \hat{X}^\bullet \arrow[r, "\hat{f}^\bullet"] & \hat{Y}^\bullet \end{tikzcd}$$

在同伦范畴中交换. 那么有态射族 $\{s^n : X^n \to \hat{Y}^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 使得 $v^n f^n - \hat{f}^n u^n = s^{n+1} d_X^n + d_{\hat{Y}}^{n-1} s^n, \forall n \in \mathbb{Z}$. 命

$$w^n : \begin{pmatrix} u^{n+1} & 0 \\ s^{n+1} & v^n \end{pmatrix} : X^{n+1} \oplus Y^n \to \hat{X}^{n+1} \oplus \hat{Y}^n,$$

可直接验证 $w^\bullet : \mathrm{Con}(f)^\bullet \to \mathrm{Con}(g)^\bullet$ 就是满足要求的链映射. $\square$

现在设 $\mathcal{E}$ 中有三角 $X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \to \hat{Z}^\bullet \to X[1]^\bullet, Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \to \hat{X}^\bullet \to Y[1]^\bullet$ 以及 $X^\bullet \xrightarrow{gf^\bullet} Z^\bullet \to \hat{Y}^\bullet \to X[1]^\bullet$.

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "1_X^\bullet"'] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "g^\bullet"] & \hat{Z}^\bullet \arrow[r] \arrow[d, dashed, "u^\bullet"] & X[1]^\bullet \arrow[d, "1_{X[1]}^\bullet"] \\
X^\bullet \arrow[r, "gf^\bullet"] & Z^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \hat{Y}^\bullet \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "v^\bullet"] & X[1]^\bullet \arrow[ddll] \\
& \hat{X}^\bullet \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "w^\bullet"] & & \\
\hat{Z}[1]^\bullet & Y[1]^\bullet \arrow[l] & &
\end{tikzcd}$$

我们说明存在 $\mathcal{E}$ 中三角 $\hat{Z}^\bullet \xrightarrow{u^\bullet} \hat{Y}^\bullet \xrightarrow{v^\bullet} \hat{X}^\bullet \xrightarrow{w^\bullet} \hat{Z}[1]^\bullet$ 使得上图交换. 类似 [命题2.7], 可不妨设给定的三个 $\mathcal{E}$ 中三角都是标准三角 (否则适当调整定义映射锥的链映射), 进而只需处理上图第一行是 $f^\bullet$ 给出的标准三角, 第二列是 $g^\bullet$ 给出的标准三角以及第二行是 $gf^\bullet$ 给出的标准三角的情形. 这时可直接计算验证

$$u^\bullet = \begin{pmatrix} 1_X^\bullet & \\ & g^\bullet \end{pmatrix} : \mathrm{Con}(f)^\bullet \to \mathrm{Con}(gf)^\bullet,$$

$$v^\bullet = \begin{pmatrix} f^\bullet & \\ & 1_Z^\bullet \end{pmatrix} : \mathrm{Con}(gf)^\bullet \to \mathrm{Con}(g)^\bullet,$$

$$w^\bullet = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_Y^\bullet & 0 \end{pmatrix} : \mathrm{Con}(g)^\bullet \to \mathrm{Con}(f)[1]^\bullet$$

都是定义合理的链映射并且使前面的图交换, 并可验证三角 $\mathrm{Con}(f)^\bullet \xrightarrow{u^\bullet} \mathrm{Con}(gf)^\bullet \xrightarrow{v^\bullet} \mathrm{Con}(g)^\bullet \xrightarrow{w^\bullet} \mathrm{Con}(f)[1]^\bullet$ 和 $u^\bullet$ 决定的标准三角间有自然的同构. 我们把前面的讨论总结为

Proposition 2.8 (八面体公理, [Zha15]). 设 $\mathcal{E}$ 中有三角 $X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \to \hat{Z}^\bullet \to X[1]^\bullet, Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \to \hat{X}^\bullet \to Y[1]^\bullet$ 以及 $X^\bullet \xrightarrow{gf^\bullet} Z^\bullet \to \hat{Y}^\bullet \to X[1]^\bullet$. 那么存在 $\mathcal{E}$ 中三角 $\hat{Z}^\bullet \xrightarrow{u^\bullet} \hat{Y}^\bullet \xrightarrow{v^\bullet} \hat{X}^\bullet \xrightarrow{w^\bullet} \hat{Z}[1]^\bullet$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "1_X^\bullet"'] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "g^\bullet"] & \hat{Z}^\bullet \arrow[r] \arrow[d, dashed, "u^\bullet"] & X[1]^\bullet \arrow[d, "1_{X[1]}^\bullet"] \\
X^\bullet \arrow[r, "gf^\bullet"] & Z^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \hat{Y}^\bullet \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "v^\bullet"] & X[1]^\bullet \arrow[ddll] \\
& \hat{X}^\bullet \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "w^\bullet"] & & \\
\hat{Z}[1]^\bullet & Y[1]^\bullet \arrow[l] & &
\end{tikzcd}$$

2.2 预三角范畴

本节固定加性范畴 $\mathcal{A}$. 如果加性函子 $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是范畴同构, 称 T 是 $\mathcal{A}$ 上**平移函子**. 本节介绍预三角范畴和三角范畴的基本性质. 加性范畴上的同伦范畴关于复形平移函子是经典的三角范畴, 因此下面的理论中都可

以对 $\mathcal{A}$ 代入同伦范畴、对 T 代入复形平移函子来理解. 以下固定加性范畴 $\mathcal{A}$ 上平移函子 $T:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$. 称 $\mathcal{A}$ 中下述形式的态射序列为 $(\mathcal{A},T)$ 中的一个**三角**:

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX.$$

有时为了方便也将上述三角记作 6 元组 (X,Y,Z,u,v,w).

如果 (X,Y,Z,u,v,w) 和 (X',Y',Z',u',v',w') 都是 $(\mathcal{A},T)$ 中三角, 态射三元组 (f,g,h) 如果使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[d, "T(f)"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX' \end{tikzcd}$$

则称 (f,g,h) 是**三角态射**. 如果三角态射 (f,g,h) 进一步满足 f,g,h 都是同构, 那么称该三角态射是**三角同构**.

Definition 2.9 (预三角范畴, [Zha15]). 设 $\mathcal{A}$ 是带有平移函子 T 的加性范畴, $\mathcal{E}$ 是 $(\mathcal{A},T)$ 中一些三角构成的类. 称 $(\mathcal{A},T,\mathcal{E})$ 是**预三角范畴**, 如果

- (TR1) 类 $\mathcal{E}$ 关于三角同构封闭, $\mathcal{A}$ 中任何态射 $u:X\to Y$ 可嵌入 $\mathcal{E}$ 中某个三角 (X,Y,Z,u,v,w) 中, $\mathcal{A}$ 中任何对象 X 满足 $(X,X,0,1_X,0,0)\in\mathcal{E}$;
- (TR2) 如果三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX.$ 在 $\mathcal{E}$ 中, 那么 $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY$ 也在 $\mathcal{E}$ 中;
- (TR3) 如果 (X,Y,Z,u,v,w) 和 (X',Y',Z',u',v',w') 都是 $\mathcal{E}$ 中三角, 并且有态射的交换图:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "g"'] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \end{tikzcd}$$

  那么存在 (未必唯一) 态射 $h:Z\to Z'$ 使得 (f,g,h) 成为三角态射, 即下图交换:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & TX \arrow[d, "T(f)"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX' \end{tikzcd}$$

当 $(\mathcal{A},T,\mathcal{E})$ 是预三角范畴时, 称 $\mathcal{E}$ 中三角为**好三角**.

Remark 2.10. 设 $(\mathcal{A},T,\mathcal{E})$ 是预三角范畴, 那么 $\mathcal{A}$ 中任何态射 $u:X\to Y$ 嵌入好三角的位置是任意的, 即有形如

$$T^{-1}Y \longrightarrow Z \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y,$$

$$Z \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow TZ$$

的好三角. 事实上, 由 (TR1) 知态射 $-T^{-1}u:T^{-1}X\to T^{-1}Y$ 可嵌入某好三角 $T^{-1}X \xrightarrow{-T^{-1}u} T^{-1}Y \longrightarrow Z \longrightarrow X$, 因此对该好三角应用一次 (TR2) 便得第一个形式的好三角, 再对第一个形式的好三角应用一次 (TR2) 便得到第二个形式的好三角. 所以 $u:X\to Y$ 嵌入好三角的位置是任意的.

Remark 2.11. 如果预三角范畴 $(\mathcal{A}, T, \mathcal{E})$ 中有好三角 (X, Y, Z, u, v, w), 那么 $vu = 0, wv = 0, (Tu)w = 0$. 由 (TR2) 知只需说明 $vu = 0$ 即可. 而预三角范畴的定义说明在 $\mathcal{A}$ 中存在下述形式的交换图:

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "1_Z"] & TX \arrow[r, "-Tu"] \arrow[d] & TY \arrow[d, "Tv"] \\
Z \arrow[r, "1_Z"] & Z \arrow[r] & 0 \arrow[r] & TZ
\end{tikzcd}
$$

于是 $(Tv)(Tu) = 0$, 因此 $T(vu) = 0$, 再由 T 是范畴同构得到 $vu = 0$.

Remark 2.12. 预三角范畴定义中的 (TR3) 里的态射 h 可以在任何位置上. 即如果有好三角 (X, Y, Z, u, v, w) 和 (X', Y', Z', u', v', w') 以及态射 $g : Y \to Y', h : Z \to Z'$ 使得 $hv = v'g$, 则存在态射 $f : X \to X'$ 使得下图交换:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, dashed, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[d, dashed, "Tf"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX'
\end{tikzcd}
$$

如果有好三角 (X, Y, Z, u, v, w) 和 (X', Y', Z', u', v', w') 以及态射 $f : X \to X', h : Z \to Z'$ 使得 $(Tf)w = w'h$, 那么存在态射 $g : Y \to Y'$ 使得下图交换:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, dashed, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX'
\end{tikzcd}
$$

先证明前面一种情况, 即有态射 $g : Y \to Y', h : Z \to Z'$ 使得 $hv = v'g$. 那么下图左边的方块交换并且 (TR2) 说明上下两行都是好三角:

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & TX \arrow[r, "-Tu"] & TY \arrow[d, "Tg"] \\
Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX' \arrow[r, "-Tu'"] & TY'
\end{tikzcd}
$$

应用 (TR3) 得到存在态射 $\tilde{f} : TX \to TX'$ 使得下图交换 (由于 T 是忠实满函子, 可设 $\tilde{f} = Tf$):

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & TX \arrow[r, "-Tu"] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}=Tf"'] & TY \arrow[d, "Tg"] \\
Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX' \arrow[r, "-Tu'"] & TY'
\end{tikzcd}
$$

于是由 T 是忠实函子得到 $u'f = gu$ 以及 $(Tf)w = w'h$. 现在讨论第二种情况, 即这时有态射 $f : X \to X', h : Z \to Z'$ 使得 $(Tf)w = w'h$. 那么利用 (TR2) 得到下图, 其中上下两行是好三角并且中间的方块是交换的:

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & TX \arrow[r, "-Tu"] \arrow[d, "Tf"] & TY \\
Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX' \arrow[r, "-Tu'"] & TY'
\end{tikzcd}
$$

现在应用刚刚证明的结果, 得到存在态射 $g : Y \to Y'$ 使得 $v'g = hv$ 以及 $T(gu) = T(u'f)$. 再利用 T 的忠实性得到 $gu = u'f$.

Remark 2.13. 预三角范畴定义中的 (TR1) 中对象的恒等态可以在好三角的任意位置. 即对任何 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$,

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0,$$

$$T^{-1}X \longrightarrow 0 \longrightarrow X \xrightarrow{1_X} X$$

都是好三角. 以第一个三角为例. 根据 (TR1), 有好三角 $T^{-1}X \xrightarrow{1_{T^{-1}X}} T^{-1}X \longrightarrow 0 \longrightarrow X$, 所以对该好三角应用两次 (TR1), 即顺时针旋转两次得到好三角 $0 \longrightarrow X \xrightarrow{-1_X} X \longrightarrow 0$.

Example 2.14. 根据 [命题2.7], 对任何加性范畴 $\mathcal{A}$, 同伦范畴 $(\mathscr{K}(\mathcal{A}), [1], \mathcal{E})$ 是预三角范畴, 其中 $\mathcal{E}$ 是同伦范畴中所有和链映射给出的标准三角同构的三角构成的类.

Definition 2.15 (上同调函子, [Zha15]). 设 $(\mathcal{A}, T, \mathcal{E})$ 是预三角范畴, $\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴.
(1) 加性函子 $H : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 被称为**上同调函子**, 如果 $\mathcal{A}$ 中任何好三角 (X, Y, Z, u, v, w) 导出 $\mathcal{B}$ 中长正合列:

$$\cdots \xrightarrow{H(T^{i-1}w)} H(T^iX) \xrightarrow{H(T^iu)} H(T^iY) \xrightarrow{H(T^iv)} H(T^iZ) \xrightarrow{H(T^iw)} H(T^{i+1}X) \xrightarrow{H(T^{i+1}u)} \cdots.$$

(2) 逆变加性函子 $H : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 被称为**上同调函子**, 如果 $\mathcal{A}$ 中任何好三角 (X, Y, Z, u, v, w) 导出 $\mathcal{B}$ 中长正合列:

$$\cdots \xrightarrow{H(T^{i+1}u)} H(T^{i+1}X) \xrightarrow{H(T^iw)} H(T^iZ) \xrightarrow{H(T^iv)} H(T^iY) \xrightarrow{H(T^iu)} H(T^iX) \xrightarrow{H(T^{i-1}w)} \cdots.$$

Example 2.16 ([Zha15]). 设 $(\mathcal{A}, T, \mathcal{E})$ 是预三角范畴, $W \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$. 那么 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(W, -)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, W)$ 都是 $\mathcal{A}$ 到 **Ab** 的上同调函子.

Proof. 设 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$. 是好三角, 根据 (TR2), 只需验证

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(W, X) \xrightarrow{u_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(W, Y) \xrightarrow{v_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(W, Z),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, W) \xrightarrow{v^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, W) \xrightarrow{u^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, W)$$

是加群正合列. 先证明共变情形, 由 [注记2.11] 知 $v_*u_* = 0$. 如果有态射 $g : W \to Y$ 满足 $vg = 0$, 那么下图中间的方块交换并且上下两行都是好三角:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "1_W"] & W \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & TW \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & TX
\end{tikzcd}$$

所以根据 [注记2.12], 存在态射 $f : W \to X$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "1_W"] \arrow[d, dashed, "f"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & TW \arrow[d, dashed, "Tf"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & TX
\end{tikzcd}$$

这说明 $g = u_*(f)$. 因此 u_* 和 v_* 在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(W, Y)$ 处正合. 再考虑 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, W)$ 的情形. 设 $g : Y \to W$ 满足 $u^*(g) = 0$. 这时根据 [注记2.13], 我们有下述左边第一个方块交换的图, 并且上下两行都是好三角:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] & TX \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & W \arrow[r, "1_W"] & W \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

于是根据 (TR3), 存在态射 $h: Z \to W$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & TX \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & W \arrow[r, "1_W"] & W \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

因此 $v^*(h) = g$. 进而得到 v^* 和 u^* 在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, W)$ 处正合. □

Corollary 2.17 ([Zha15]). 设 $(\mathcal{A}, T, \mathcal{E})$ 是预三角范畴. 那么:
(1) 如果 $\mathcal{A}$ 中有下述交换图满足上下两行都是好三角:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX' \end{tikzcd}$$

那么 f, g 是同构蕴含 h 也是同构.
(2) 任给态射 $u: X \to Y$, 如果有好三角 (X, Y, Z, u, v, w) 和 (X, Y, Z', u, v', w'), 那么存在同构 $h: Z \to Z'$ 使得下图交换 (即任何态射 $u: X \to Y$ 能够嵌入的好三角在三角同构意义下唯一):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1_Y"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & TX \arrow[d, "1_{TX}"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX \end{tikzcd}$$

(3) 如果有好三角 (X, Y, Z, u, v, w) 和 (X', Y', Z', u', v', w') 以及态射交换图:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX' \end{tikzcd}$$

那么存在态射 $f: X \to X'$ 使得下图交换, 并且 g 和 h 是同构蕴含 f 也是同构:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, dashed, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[d, dashed, "Tf"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX' \end{tikzcd}$$

(4) 如果有好三角 (X, Y, Z, u, v, w) 和 (X', Y', Z', u', v', w') 以及态射交换图:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX' \end{tikzcd}$$

那么存在态射 $g: Y \to Y'$ 使得下图交换, 并且 h, Tf 是同构蕴含 g 也是同构:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, dashed, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX' \end{tikzcd}$$

Proof. (1) 将函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z',-)$ 作用于给定图得到下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z',X) \arrow[r, "u_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z',Y) \arrow[r, "v_*"] \arrow[d, "g_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z',Z) \arrow[r, "w_*"] \arrow[d, "h_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z',TX) \arrow[r, "(Tu)_*"] \arrow[d, "(Tf)_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z',TY) \arrow[d, "(Tg)_*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z',X') \arrow[r, "(u')_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z',Y') \arrow[r, "(v')_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z',Z') \arrow[r, "(w')_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z',TX') \arrow[r, "(Tu')_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z',TY')
\end{tikzcd}$$

由 [例2.16] 知该图上下两行正合. 由条件以及五引理得到 h_* 是同构. 因此存在态射 $\varphi : Z' \to Z$ 使得 $h\varphi = 1_{Z'}$. 类似地, 对给定图作用 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,Z)$ 也能够得到 h 有左逆, 进而知 h 是同构.

(2) 根据 (TR3) 得到态射 h 的存在性, 再应用 (1) 得到 h 是同构.

(3) 态射 f 的存在性来自 [注记2.12], 应用 (TR2) 以及 (1) 得到当 g, h 是同构时 Tf 是同构, 故 f 也是同构.

(4) 态射 g 的存在性来自 [注记2.12], 类似 (3) 可得 h 和 Tf 是同构蕴含 g 是同构. □

Proposition 2.18 ([Zha15])**.** 设 $(\mathcal{A},T,\mathcal{E})$ 是预三角范畴. 如果 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ 是好三角, 那么

$$T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}w} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$$

也是好三角.

Proof. 现在把态射 $-T^{-1}w : T^{-1}Z \to X$ 嵌入好三角 $T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}w} X \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z$. 应用 (TR2) 得到好三角:

$$X \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z \xrightarrow{w} TX.$$

现在从 [推论2.17(4)] 得到下述三角同构:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, dashed, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "1_Z"] & TX \arrow[d, "1_{TX}"] \\
X \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z \arrow[r, "w"] & TX
\end{tikzcd}$$

由此得到下述交换图, 满足竖直方向上的态射都是同构:

$$\begin{tikzcd}
T^{-1}Z \arrow[r, "-T^{-1}w"] \arrow[d, "1_{T^{-1}Z}"] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1_Z"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[d, "1_Z"] \\
T^{-1}Z \arrow[r, "-T^{-1}w"] & X \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z
\end{tikzcd}$$

上图的第二行是好三角, 所以 $T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}w} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ 也是好三角. □

下面的命题表明好三角能够给出态射是否是同构的刻画:

Proposition 2.19 ([Zha15])**.** 设 $(\mathcal{A},T,\mathcal{E})$ 是预三角范畴, 有好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$. 那么 u 是同构的充要条件是 $Z \cong 0$.

Proof. 必要性: 如果 u 是同构, 那么下述三角同构 (应用 [推论2.17]) 保证了 $Z \cong 0$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u^{-1}"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed] & TX \arrow[d, "1_{TX}"] \\
Y \arrow[r, "1_Y"] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

充分性: 如果有同构 $Z \cong 0$, 则有交换图 (利用 [注记2.11]):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1_Y"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d] & TX \arrow[d, "Tu"] \\
Y \arrow[r, "1_Y"] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[r] & TY
\end{tikzcd}$$

应用 [推论2.17] 便知 u 是同构. □

2.3 三角范畴

Definition 2.20 (三角范畴, [Zha15]). 设 $(\mathcal{A}, T, \mathcal{E})$ 是预三角范畴, 如果还满足如下公理 (TR4):

- (TR4) 设下图的第 $1, 2$ 行和第 2 列都在 $\mathcal{E}$ 中, 那么存在态射 f, g 使得下图成为交换图并且第 3 列也在 $\mathcal{E}$ 中:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "f"] & TX \arrow[d, "1_{TX}"] \\
X \arrow[r, "vu"] & Z \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g"] & TX \arrow[d, "Tu"] \\
 & X' \arrow[r, "1_{X'}"] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d] & TY \\
 & TY \arrow[r, "Tv"] & TZ' &
\end{tikzcd}$$

那么称 $(\mathcal{A}, T, \mathcal{E})$ 是**三角范畴**.

Example 2.21. 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, 那么 [命题2.7] 和 [命题2.8] 表明 $(\mathscr{K}(\mathcal{A}), [1], \mathcal{E})$ 是预三角范畴, 其中 $\mathcal{E}$ 是同伦范畴中所有和链映射给出的标准三角同构的三角构成的类.

Definition 2.22 (三角子范畴, [Zha15]). 设 $(\mathcal{A}, T, \mathcal{E})$ 是三角范畴, $\mathcal{B}$ 是全子范畴且为加性范畴. 如果 $\mathcal{B}$ 满足:
(1) $\mathcal{B}$ 关于同构封闭;
(2) T 也是 $\mathcal{B}$ 上范畴自同构;
(3) $\mathcal{B}$ 关于扩张封闭, 即任何好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$, X, Z 在 $\mathcal{B}$ 中蕴含 Y 也在 $\mathcal{B}$ 中,
那么称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的**三角子范畴**.

Remark 2.23. 设三角范畴 $(\mathcal{A}, T, \mathcal{E})$ 有全子范畴 $\mathcal{B}$. 那么 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的三角子范畴当且仅当 $\mathcal{B}$ 关于同构封闭, 并且 $(\mathcal{B}, T, \mathcal{B} \cap \mathcal{E})$ 是三角范畴, 这里 $\mathcal{B} \cap \mathcal{E}$ 是指前三项在 $\mathcal{B}$ 中的好三角构成的类. 只需说明充分性. 如果有好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$, 满足 $X, Z \in \mathrm{ob}\mathcal{B}$, 那么应用两次 (TR2) 后由 $w : Z \to TX$ 可嵌入 $\mathcal{B} \cap \mathcal{E}$ 中好三角 (并且在三角同构意义下唯一) 立即得到 TY 和 $\mathcal{B}$ 中某个对象同构. 从而 Y 也在 $\mathcal{B}$ 中.

Remark 2.24. 如果三角范畴 $(\mathcal{A}, T, \mathcal{E})$ 的全子范畴 $\mathcal{B}$ 是加性子范畴且满足 [定义2.22] 的 (1) 和 (2), 那么 $\mathcal{B}$ 满足 (3) 当且仅当对任何好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$, 对象 X, Y 在 $\mathcal{B}$ 中蕴含 Z 也在 $\mathcal{B}$ 中. (在 $\mathcal{B}$ 满足 (1) 和 (2) 的前提下) 也等价于对任何好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$, 对象 Y, Z 在 $\mathcal{B}$ 中蕴含 X 也在 $\mathcal{B}$ 中. 这通过顺时针旋转 (TR2) 与逆时针旋转 ([命题2.18]) 不难得到.

Example 2.25. 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴. 之前定义的加性范畴 $\mathscr{K}^b(\mathcal{A}),\mathscr{K}^-(\mathcal{A}),\mathscr{K}^+(\mathcal{A})$ 是 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 的全子范畴, 但未必关于同构封闭. **所以之后当我们在三角范畴场景讨论 $\mathscr{K}^b(\mathcal{A}),\mathscr{K}^-(\mathcal{A}),\mathscr{K}^+(\mathcal{A})$ 时, 要求它们关于同伦等价封闭.** 具体地, $\mathscr{K}^b(\mathcal{A})$ 表示由所有与某个有界复形同伦等价的复形构成的 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 的全子范畴; $\mathscr{K}^+(\mathcal{A})$ 表示由所有与某个下有界复形同伦等价的复形构成的 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 的全子范畴; $\mathscr{K}^-(\mathcal{A})$ 表示由所有与某个上有界复形同伦等价的复形构成的 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 的全子范畴. 这里保留了与原先相同的记号, 新的记号下的范畴对象类与记号对应的原有范畴的对象类更多, 但**复形同伦等价类没有改变**. 因此, 当我们在 $\mathscr{K}^b(\mathcal{A}),\mathscr{K}^-(\mathcal{A}),\mathscr{K}^+(\mathcal{A})$ 的定义中要求了关于同伦等价封闭, 那么三角子范畴定义中的 (1) 自动满足. 同伦范畴 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 上的复形平移函子 [1] 分别限制在 $\mathscr{K}^b(\mathcal{A}),\mathscr{K}^-(\mathcal{A}),\mathscr{K}^+(\mathcal{A})$ 上都给出范畴自同构. 利用同伦范畴中好三角都同构于某个链映射决定标准三角将验证三角子范畴定义中的 (3) 化归为对标准三角验证, 可直接得到 $\mathscr{K}^b(\mathcal{A}),\mathscr{K}^-(\mathcal{A}),\mathscr{K}^+(\mathcal{A})$(在新的定义下) 都是 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 的三角子范畴 (以后在讨论三角范畴时默认使用这一定义).

Definition 2.26 (三角函子, [Zha15])**.** 设 $(\mathcal{A},T,\mathcal{E})$ 和 $(\mathcal{A}',T',\mathcal{E}')$ 都是三角范畴. 如果有加性函子 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{A}'$ 和自然同构 $\varphi: FT\cong T'F$ 满足对任何 $\mathcal{A}$ 中好三角 $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}TX$, 有

$$FX\xrightarrow{Fu}FY\xrightarrow{Fv}FZ\xrightarrow{\varphi_X Fw}T'FX$$

是 $\mathcal{A}'$ 中好三角, 则称 $(F,\varphi):(\mathcal{A},T,\mathcal{E})\to(\mathcal{A}',T',\mathcal{E}')$ 是**三角函子**. 有时简称 F 为三角函子. 如果三角函子 $(F,\varphi):(\mathcal{A},T,\mathcal{E})\to(\mathcal{A}',T',\mathcal{E}')$ 满足 F 是等价函子, 则称该三角函子为**三角等价**. 当两个三角范畴间存在三角等价时, 称这两个三角范畴是**三角等价的** (三角等价的拟逆函子依然是三角函子, 见 [Zha15, Theorem 1.6.1]).

Remark 2.27. 对于逆变场景, 如果 $(\mathcal{A},T,\mathcal{E})$ 和 $(\mathcal{A}',T',\mathcal{E}')$ 都是三角范畴, 称逆变加性函子 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{A}'$ 和自然同构 $\psi:(T')^{-1}F\cong FT$ 构成的 (F,ψ) 为**逆变三角函子**, 若对任何 $\mathcal{A}$ 中好三角 $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}TX$, 有

$$(T')^{-1}FX\xrightarrow{(Fw)\psi_X}FZ\xrightarrow{Fv}FY\xrightarrow{\varphi_X Fu}FX$$

是 $\mathcal{A}'$ 中好三角. 注意自然同构 $(T')^{-1}F\cong FT$ 也给出自然同构 $FT^{-1}\cong T'F$. 逆变三角函子的合成得到共变三角函子.

Notation 2.28. 之后为叙述方便, 常将三角范畴 $(\mathcal{A},T,\mathcal{E})$ 的平移函子 T 记作 [1].

2.4 同伦范畴补充

我们已经看到加性范畴 $\mathcal{A}$ 上的同伦范畴 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 有自然的三角结构 (回忆 [例2.14]), 并且 $\mathscr{K}^+(\mathcal{A}),\mathscr{K}^-(\mathcal{A})$ 以及 $\mathscr{K}^b(\mathcal{A})$ 都是三角子范畴 ([例2.25]). 本节将对加性范畴上同伦范畴的三角结构作进一步讨论.

对加性范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射序列 $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z$, 记 $X\longrightarrow X\oplus Z\longrightarrow Z$ 是标准态射序列. 如果存在下述形式的交换图满足竖直方向的态射都是同构:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[d, "\gamma"] \\ X \arrow[r] & X\oplus Z \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

则称 $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z$, 是 $\mathcal{A}$ 中**可裂短正合列** (注意这里仅要求 $\mathcal{A}$ 是加性范畴). 当 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴时, 这回到原本的可裂短正合列定义 (回忆 [注记1.38]). 于是我们也能够类似 Abel 范畴的情形对加性范畴上的复形考虑

可裂正合性. 为了叙述方便, 接下来 $\mathcal{A}$ 上复形 $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ 常简记为 X. 在 Abel 范畴场景我们看到可裂正合的复形短正合列在加性函子作用下依然是复形短正合列, 进而能够导出上同调对象的长正合列. 因此可裂正合能够使人们更好处理同调性质. 回忆 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中任何好三角都同构于某个链映射诱导的标准三角, 形如:

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\binom{0}{1}} \mathrm{Con}(u) \xrightarrow{(1\ 0)} X[1]. \tag{2.4}$$

我们将构造 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中与 (2.4) 三角同构的三角满足前三项构成 (复形) 可裂短正合列. 这依赖于映射筒的构造.

Definition 2.29 (映射筒, [Zha15])**.** 设 $u : X \to Y$ 是 $\mathcal{A}$ 上复形间的链映射. 对每个整数 n, 定义

$$(\mathrm{Cyl}(u))^n = X^{n+1} \oplus Y^n \oplus X^n,$$

$$d^n = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 & 0 \\ u^{n+1} & d_Y^n & 0 \\ -1_{X^{n+1}} & 0 & d_X^n \end{pmatrix} : X^{n+1} \oplus Y^n \oplus X^n \to X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1},$$

得到的复形 $((\mathrm{Cyl}(u))^\bullet, d^\bullet)$ 称为 u 的**映射筒**.

Remark 2.30. 对链映射 $u : X \to Y$, 考虑 $(-1, 0) : \mathrm{Con}(u)[-1] \to X$, 那么 $\mathrm{Cyl}(u)$ 就是链映射 $(-1, 0)$ 的映射锥. 因此映射筒作为特殊的映射锥自然产生好三角

$$\mathrm{Con}(u)[-1] \xrightarrow{(-1\ 0)} X \xrightarrow{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} \mathrm{Cyl}(u) \xrightarrow{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}} \mathrm{Con}(u). \tag{2.5}$$

将 (2.5) 顺时针旋转得到好三角

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} \mathrm{Cyl}(u) \xrightarrow{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}} \mathrm{Con}(u) \xrightarrow{(1\ 0)} X[1]. \tag{2.6}$$

易见 (2.6) 前三项构成复形的可裂短正合列. 称 (2.6) 为映射筒诱导的好三角.

Remark 2.31. 链映射 $u : X \to Y$ 诱导的好三角 (2.6) 和 (2.4)(在同伦范畴中) 是三角同构的. 命 $(0, 1, u) : \mathrm{Cyl}(u) \to Y$, 那么可直接验证它是同伦等价 (诱导三角同构) 且有同伦逆

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} : Y \to \mathrm{Cyl}(u).$$

Theorem 2.32 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 是 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中好三角. 那么对任何整数 n, 有

$$H^n(X) \xrightarrow{H^n(u)} H^n(Y) \xrightarrow{H^n(v)} H^n(Z)$$

是 $\mathcal{A}$ 中正合列.

Proof. 由同伦范畴中好三角的定义和 [注记2.31], $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 三角同构于形如 (2.6) 的好三角. 设有链映射 $u' : X' \to Y'$ 使得给定好三角与 $\mathrm{Cyl}(u')$ 诱导的好三角同构. (2.6) 的前三项是复形可裂短正合列, 所以由同伦范畴中的同构 (即复形间的同伦等价) 在上同调函子作用下是 $\mathcal{A}$ 中同构立即得到结果. □

由于预三角范畴中的好三角在顺时针旋转 (TR2) 和逆时针旋转 ([命题2.18]) 下依然是好三角, 所以由 [定理2.32] 立即得到同伦范畴版本的同调代数基本定理.

Theorem 2.33 (同伦范畴版本同调代数基本定理, [Zha15]). 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 是 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中好三角. 那么有 $\mathcal{A}$ 中长正合列 (并且链接同态关于链映射同伦等价类是自然的):

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(Z) \longrightarrow H^n(X) \xrightarrow{H^n(u)} H^n(Y) \xrightarrow{H^n(v)} H^n(Z) \longrightarrow H^{n+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

Remark 2.34. 从 [定理2.33] 易知对 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$, u 是拟同构的充要条件是 Z 是正合复形.

2.5 复形分解补充

对具有足够多投射对象的 Abel 范畴, 任何对象有投射分解并且在同伦意义下唯一 (回忆 [命题1.105]); 对具有足够多内射对象的 Abel 范畴, 任何对象也有内射分解并且在同伦意义下唯一 (回忆 [命题1.107]). 在复形范畴, 我们也能够对复形讨论投射分解: 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的的 Abel 范畴, 把 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 中每项都是投射对象的复形称为**投射复形** (并非复形范畴中的投射对象). 如果 $\mathcal{A}$ 上复形 X 有投射复形 P 和拟同构 $s: P \to X$, 则称拟同构 s 是 X 的**投射分解**. 如果投射分解定义中 X 和 P 都是上有界的, 则称该投射分解是 X 的**上有界投射分解**. 通常的投射分解可以自然视作复形的投射分解: 如果 $\mathcal{A}$ 中对象 X 有投射分解

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} X \longrightarrow 0$$

那么我们得到下述复形间的拟同构, 满足上下两行都是上有界复形, 并且这里把 X 视作集中在 0 次的复形:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

对于有足够多投射对象的 Abel 范畴, 上有界复形也总存在上有界投射分解:

Theorem 2.35 ([Zha15]). 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴且 X 是 $\mathcal{A}$ 上的上有界复形. 那么存在上有界投射复形和链映射 $f: P \to X$ 使得 f 是拟同构且每个分量 f^i 是 epic 态. 如果进一步 $\mathcal{A}$ 中任何对象的投射维数有限并且 X 是有界复形, 那么 P 也可以取到有界投射复形.

Proof. 因为 X 是上有界复形, 所以存在整数 m 使得 $X^t = 0, \forall t \geq m+1$. 这时 X 形如:

$$\cdots \longrightarrow X^{m-2} \xrightarrow{d^{m-2}} X^{m-1} \xrightarrow{d^{m-1}} X^m \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots.$$

因为 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象, 所以存在投射对象 P^m 和 epic 态 $f^m: P^m \to X^m$. 考虑 f^m 和 d^{m-1} 的拉回:

$$\begin{tikzcd}
Y^{m-1} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & P^m \arrow[d, "f^m"] \\
X^{m-1} \arrow[r, "d^{m-1}"] & X^m
\end{tikzcd}$$

由 [命题1.136] 知 g 也是 epic 态. [推论1.144] 说明 $\mathrm{Coker}h$ 到 $\mathrm{Coker}d^{m-1}$ 的标准态射是 monic 态.

再由 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象得到存在 epic 态 $p^{m-1}: P^{m-1} \to Y^{m-1}$ 满足 P^{m-1} 是投射对象. 定义 $d_P^{m-1} = hp^{m-1}$ 以及 $f^{m-1} = gp^{m-1}$. 那么 f^{m-1} 也是 epic 态. 考虑下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
P^m \arrow[r] \arrow[d, "f^m"'] & \mathrm{Coker}h \arrow[d] \\
X^m \arrow[r] & \mathrm{Coker}d^{m-1}
\end{tikzcd}$$

那么利用下行态射是 epic 态得到 $\mathrm{Coker}h$ 到 $\mathrm{Coker}d^{m-1}$ 的标准态射是同构. 注意到 $\mathrm{Coker}h$ 给出 d_P^{m-1} 的余核, 所以 f^m 导出同构 $H^m(P) \cong H^m(X)$. 这里 P 表示复形 $0 \longrightarrow P^{m-1} \xrightarrow{d_P^{m-1}} P^m \longrightarrow 0$.

epic 态 $p^{m-1}: P^{m-1} \to Y^{m-1}$ 也诱导下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}d_P^{m-1} \arrow[r] \arrow[d] & P^{m-1} \arrow[r, "d_P^{m-1}"] \arrow[d, "p^{m-1}"] & P^m \arrow[d, "1_{P^m}"] \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}h \arrow[r] & Y^{m-1} \arrow[r, "h"] & P^m
\end{tikzcd}$$

根据五引理 (回忆 [推论1.45]) 可知 $\mathrm{Ker}d_P^{m-1}$ 到 $\mathrm{Ker}h$ 的标准态射是 epic 态. 而 [命题1.136] 保证

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}h \arrow[r] \arrow[d, "\overline{g}"'] & Y^{m-1} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & P^m \arrow[d, "f^m"] \\
\mathrm{Ker}d^{m-1} \arrow[r] & X^{m-1} \arrow[r, "d^{m-1}"] & X^m
\end{tikzcd}$$

中态射 $\overline{g}: \mathrm{Ker}h \to \mathrm{Ker}d^{m-1}$ 是同构. 所以 f^{m-1} 诱导的标准态射 $\mathrm{Ker}d_P^{m-1} \to \mathrm{Ker}d^{m-1}$ 是 epic 态.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}d_P^{m-1} \arrow[r] \arrow[d] & P^{m-1} \arrow[r, "d_P^{m-1}"] \arrow[d, "p^{m-1}"'] & P^m \arrow[d, "1_{P^m}"] \\
\mathrm{Ker}h \arrow[r] \arrow[d, "\overline{g}"'] & Y^{m-1} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & P^m \arrow[d, "f^m"] \\
\mathrm{Ker}d^{m-1} \arrow[r] & X^{m-1} \arrow[r, "d^{m-1}"] & X^m
\end{tikzcd}$$

现在假设我们已经构造好一族 epic 态 $\{f^p\}_{p \geq n}$, 对应下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}d_P^n \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f}^n"'] & P^n \arrow[r, "d_P^n"] \arrow[d, "f^n"'] & P^{n+1} \arrow[r, "d_P^{n+1}"] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
\mathrm{Ker}d^n \arrow[r] & X^n \arrow[r, "d^n"] & X^{n+1} \arrow[r, "d^{n+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

满足上下两行相邻态射的合成为零, 对每个 $p \geq n+1$, f^{n+1} 诱导同构 $H^p(P) \cong H^p(X)$ 并且 f^n 诱导的标准态射 $\overline{f}^n: \mathrm{Ker}d_P^n \to \mathrm{Ker}d^n$ 是 epic 态. 下面我们将构成投射对象 P^{n-1}, 态射 $d_P^{n-1}: P^{n-1} \to P^n$, $f^{n-1}: P^{n-1} \to X^{n-1}$ 满足下图交换, f^{n-1} 是 epic 态且 f^n 导出同构 $H^n(P) \cong H^n(X)$ 并有 epic 态 $\overline{f}^{n-1}: \mathrm{Ker}d_P^{n-1} \to \mathrm{Ker}d^{n-1}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}d_P^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f}^{n-1}"'] & P^{n-1} \arrow[r, "d_P^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & P^n \arrow[r, "d_P^n"] \arrow[d, "f^n"'] & P^{n+1} \arrow[r, "d_P^{n+1}"] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
\mathrm{Ker}d^{n-1} \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r] & X^n \arrow[r, "d^n"] & X^{n+1} \arrow[r, "d^{n+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

来归纳地完成上有界投射分解 $f:P\to X$ 存在性的证明.

现在由态射的核的定义, 微分 $d^{n-1}:X^{n-1}\to X^n$ 经 $\mathrm{Ker}d^n$ 分解:

$$\begin{tikzcd}
X^{n-1} \arrow[rr, "d^{n-1}"] \arrow[dr, "\overline{d}^{n-1}"'] & & X^n \\
& \mathrm{Ker}d^n \arrow[ur, "\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

于是可考虑 $\overline{d}^{n-1}:X^{n-1}\to\mathrm{Ker}d^n$ 和 epic 态 $\overline{f}^n:\mathrm{Ker}d_P^n\to\mathrm{Ker}d^n$ 的拉回:

$$\begin{tikzcd}
Y^{n-1} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Ker}d_P^n \arrow[d, "\overline{f}^n"] \\
X^{n-1} \arrow[r, "\overline{d}^{n-1}"] & \mathrm{Ker}d^n
\end{tikzcd}$$

因为 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象, 所以存在 epic 态 $p^{n-1}:P^{n-1}\to Y^{n-1}$ 满足 P^{n-1} 是投射对象.

$$\begin{tikzcd}
Y^{n-1} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Ker}d_P^n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\overline{f}^n"] & P^n \arrow[d, "f^n"] \\
X^{n-1} \arrow[r, "\overline{d}^{n-1}"] & \mathrm{Ker}d^n \arrow[r, "\iota"] & X^n
\end{tikzcd}$$

命 $d_P^{n-1}=ihp^{n-1}:P^{n-1}\to P^n$ 以及 $f^{n-1}=gp^{n-1}:X^{n-1}\to X^n$ 得到下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
P^{n-1} \arrow[r, "d_P^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & P^n \arrow[r, "d_P^n"] \arrow[d, "f^n"'] & P^{n+1} \arrow[r, "d_P^{n+1}"] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
X^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] & X^n \arrow[r, "d^n"] & X^{n+1} \arrow[r, "d^{n+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

易见 $d_P^nd_P^{n-1}=0$ 以及拉回的性质保证 g 是 epic 态 (因为 $\overline{f}^n$ 也是 epic 态), 从而 f^{n-1} 也是 epic 态.

注意到 $\mathrm{Coker}\overline{d}^{n-1}$ 给出上同调对象 $H^n(X)$. 所以有标准态射 $\mathrm{Coker}h\to H^n(X)$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
Y^{n-1} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Ker}d_P^n \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f}^n"] & \mathrm{Coker}h \arrow[d] \\
X^{n-1} \arrow[r, "\overline{d}^{n-1}"] & \mathrm{Ker}d^n \arrow[r] & \mathrm{Coker}\overline{d}^{n-1}=H^n(X)
\end{tikzcd}$$

现在 $\overline{f}^n$ 是 epic 态保证了标准态射 $\mathrm{Coker}h\to H^n(X)$ 也是 epic 态. 而 [推论1.144] 保证了标准态射 $\mathrm{Coker}h\to H^n(X)$ 是 monic 态, 进而得到 $\overline{f}^n$ 诱导的标准态射 $\mathrm{Coker}h\to H^n(X)$ 是同构. 因为 p^{n-1} 是 epic 态, 所以 $hp^{n-1}:P^{n-1}\to\mathrm{Ker}d_P^n$ 的余核给出 h 的余核, 这一观察说明 $\mathrm{Coker}h\cong\mathrm{Ker}d_P^n/\mathrm{Im}d_P^{n-1}$.

$$\begin{tikzcd}
P^{n-1} \arrow[r, "p^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & Y^{n-1} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Ker}d_P^n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\overline{f}^n"] & P^n \arrow[d, "f^n"] \\
X^{n-1} \arrow[r, "1_{X^{n-1}}"] & X^{n-1} \arrow[r, "\overline{d}^{n-1}"] & \mathrm{Ker}d^n \arrow[r, "\iota"] & X^n
\end{tikzcd}$$

所以 $\overline{f}^n$ 诱导标准态射 $H^n(P)\to H^n(X)$ 是同构, 其中 P 表示复形

$$0\longrightarrow P^{n-1}\xrightarrow{d_P^{n-1}}P^n\xrightarrow{d_P^n}P^{n+1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow P^m\longrightarrow 0.$$

现在再说明标准态射 $\overline{f}^{n-1}:\mathrm{Ker}d_P^{n-1}\to\mathrm{Ker}d^{n-1}$ 是 epic 态. 注意到有交换图 (上下两行正合):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}d_P^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & P^{n-1} \arrow[r, "d_P^{n-1}"] \arrow[d, "p^{n-1}"] & P^n \arrow[d, "1_{P^n}"] \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(ih) \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, "ih"] & P^n
\end{tikzcd}$$

因为 p^{n-1} 是 epic 态, 故应用五引理得到标准态射 $\mathrm{Ker}d_P^{n-1}\to\mathrm{Ker}(ih)$ 是 epic 态.

因为 g 是 epic 态, 所以 [命题1.136] 保证了下图中的标准态射 g' 是同构:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}h \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g'"'] & Y^{n-1} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Ker}d_P^n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\overline{f}^n"] & P^n \arrow[d, "f^n"] \\
\mathrm{Ker}\overline{d}^{n-1} \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "\overline{d}^{n-1}"] & \mathrm{Ker}d^n \arrow[r, "\iota"] & X^n
\end{tikzcd}$$

注意 i 是 monic 态保证了 h 的核给出 ih 的核, 所以 g 诱导的态射 $g':\mathrm{Ker}(ih)\to\mathrm{Ker}\overline{d}^{n-1}$ 是同构.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}d_P^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & P^{n-1} \arrow[r, "d_P^{n-1}"] \arrow[d, "p^{n-1}"] & P^n \arrow[d, "1_{P^n}"] \\
\mathrm{Ker}h=\mathrm{Ker}(ih) \arrow[r] \arrow[d, "g'"'] & Y^{n-1} \arrow[r, "ih"] \arrow[d, "g"] & P^n \arrow[d, "f^n"] \\
\mathrm{Ker}d^{n-1} \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] & X^n
\end{tikzcd}$$

现在上述交换图第一列态射的合成就是 $f^{n-1}:P^{n-1}\to X^{n-1}$ 诱导的标准态射 $\overline{f}^{n-1}:\mathrm{Ker}d_P^{n-1}\to\mathrm{Ker}d^{n-1}$. 作为 epic 态和同构的合成, $\overline{f}^{n-1}$ 自然也是 epic 态. 于是我们得到对上有界复形 X 总存在上有界投射分解 $f:P\to X$. 特别地, 当 X 是有界复形时, P 只有有限多个上同调对象非零 (因为拟同构).

现在设 $\mathcal{A}$ 满足任何对象投射维数有限以及 X 是有界复形. 设 X 满足 $X^k=0,\forall k\le n-1$. 这时前面构造过程的 Y^{n-1} 可选取为 $\mathrm{Ker}\overline{f}^n$ 并且 $h:Y^{n-1}\to\mathrm{Ker}d_P^n$ 是 $\overline{f}^n$ 的核. 可设 $\mathrm{Ker}f^{n-1}$ 有有限长的投射分解:

$$\cdots\longrightarrow P^{n-2}\longrightarrow P^{n-1}\xrightarrow{\zeta}\mathrm{Ker}\overline{f}^n\longrightarrow 0.$$

那么根据前面关于 P 的构造, 我们能够得到有界投射复形:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{n-2} \arrow[r] & P^{n-1} \arrow[rr, "d_P^{n-1}"] \arrow[dr, "\zeta"'] & & P^n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P^m \arrow[r] & 0 \\
 & & & \mathrm{Ker}\overline{f}^n \arrow[ur, "ih"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

现在 ih 是 monic 态, 所以 $\mathrm{Ker}d_P^{n-1}\cong\mathrm{Ker}\zeta=\mathrm{Im}d_P^{n-2}$, 这说明该有界投射复形满足 $H^k(P)=0,\forall k\le n-1$. 所以我们得到拟同构:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & P^{n-1} \arrow[r, "d_P^{n-1}"] \arrow[d] & P^n \arrow[r] \arrow[d, "f^n"] & \cdots \arrow[r] & P^m \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X^n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X^m \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由此也得到有界复形 X 的有限投射分解 $f:P\to X$. $\square$

Remark 2.36. 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴, X 是 $\mathcal{A}$ 上的上有界复形. 那么 [定理2.35] 的证明过程说明当 X 满足 $X^k=0,\forall k\geq m+1$ 时, 构造的投射分解 $f:P\to X$ 也能选取为满足 $P^k=0,\forall k\geq m+1$.

Remark 2.37. 如果 R 是左 Noether 环, X 是每项均为有限生成左 R-模的上有界复形. 那么重复 [定理2.35] 的讨论, 并结合 [注记1.135] 得到 X 的上有界投射分解 P 可以取到每项都是有限生成投射 R-模.

Proposition 2.38 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴, C 是 $\mathcal{A}$ 上正合复形, P 是投射复形. 那么:
(1) 如果 P 上有界, 那么 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(P,C)=0$.
(2) 如果 C 上有界, 那么 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(P,C)=0$.

Proof. 无论 C 是上有界还是 P 是上有界, 重复 [命题1.105] 关于同伦唯一性的讨论即可. □

Corollary 2.39 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴. 那么:
(1) 设 P 是上有界投射复形, 那么任何拟同构 $c:X\to Y$ 诱导加群同构 $c_*:\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(P,X)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(P,Y)$.
(2) 设 P 是投射复形, $c:X\to Y$ 是上有界复形间拟同构. 则 $c_*:\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(P,X)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(P,Y)$ 是同构.

Proof. 设拟同构 $c:X\to Y$ 由映射锥给出的标准三角是 $X\xrightarrow{c}Y\longrightarrow C\longrightarrow X[1]$, 易见当 X,Y 都是上有界复形时, C 也上有界. 因为 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(P,-)$ 是上同调函子 (回忆 [例2.16]), 所以有加群长正合列

$$\cdots\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(P,C[-1])\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(P,X)\xrightarrow{c_*}\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(P,Y)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(P,C)\longrightarrow\cdots$$

所以由 [推论2.39] 知 (1) 和 (2) 都成立. □

Corollary 2.40 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴, X 是复形且 P 是上有界投射复形. 如果 $c:X\to P$ 是拟同构, 那么存在链映射 $f:P\to X$ 使得 cf 与 P 上恒等链映射同伦等价.

Proof. 用 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(P,-)$ 作用给定拟同构再应用 [推论2.39] 即可. □

现在我们能够说明对于具有足够多投射对象的 Abel 范畴中上有界投射复形间的拟同构是同伦等价.

Corollary 2.41 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴, $u:P\to Q$ 是上有界投射复形间的拟同构, 则 u 是同伦等价.

Proof. 根据 [推论2.40], 存在链映射 $v:Q\to P$ 使得 uv 同伦于 Q 上恒等链映射. 再对 v 应用 [推论2.40] 可得存在链映射 $w:P\to Q$ 使得 vw 同伦于 P 上恒等链映射. 因此 v 是同伦等价. 进而 u 也是同伦等价. □

下面的 [推论2.42] 保证了上有界复形的上有界投射分解在同伦等价下唯一.

Corollary 2.42 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴, X 是 $\mathcal{A}$ 上的上有界复形. 那么 X 总存在上有界投射分解. 并且如果 $\alpha:X\to Y$ 是上有界复形间的同伦等价, $c_X:P\to X$ 和 $c_Y:Q\to Y$ 都是上有界投射分解, 那么存在唯一的同伦等价 $u:P\to Q$ 使得 $\alpha c_X=c_Yu$, 即有下述交换图:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "c_X"] \arrow[d, "u"'] & X \arrow[d, "\alpha"] \\ Q \arrow[r, "c_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

Proof. 上有界投射分解的存在性来自 [定理2.35]. 对拟同构 $c_Y : Q \to Y$ 作用 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(P, -)$ 后通过 [推论2.39] 可得加群同构 $(c_Y)_* : \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(P, Q) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(P, Y)$ 可得存在唯一的链映射 $u : P \to Q$ 使得 $\alpha c_X = c_Y u$. 由 c_x, α 以及 c_Y 都是拟同构可得 u 也是拟同构. 所以应用 [推论2.41] 便知 u 是同伦等价. □

对偶地, 对具有足够多内射对象的 Abel 范畴, 我们也能够将上述关于投射分解的讨论得到相应内射分解的版本. 以下考虑的 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 要求有足够多的内射对象. 如果复形 I 的每项都是内射对象, 则称 I 是**内射复形**. 如果复形 X 满足有拟同构 $s : X \to I$, 这里 I 是内射复形, 则称 s 是 X 的**内射分解**. 如果下有界复形 X 存在内射分解 $s : X \to I$ 满足 I 是下有界内射复形, 则称 s 是**下有界内射分解**. $\mathcal{A}$ 中对象 X 的内射分解可通过将 X 视作集中在 0 次部分的下有界复形视作特殊的复形的下有界内射分解. 用推出和内射对象的性质可证:

Theorem 2.43 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的 Abel 范畴且 X 是 $\mathcal{A}$ 上的下有界复形. 那么存在下有界内射复形 I 和链映射 $f : X \to I$ 使得 f 是拟同构且每个分量 f^i 是 monic 态. 如果进一步 $\mathcal{A}$ 中任何对象的内射维数有限并且 X 是有界复形, 那么 I 也可以取到有界内射复形.

与投射情形对偶地, 也能得到 [命题2.38], [推论2.39], [推论2.40], [推论2.41] 和 [推论2.42] 的内射版本.

Proposition 2.44 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的 Abel 范畴, C 是 $\mathcal{A}$ 上正合复形, I 是内射复形. 那么:
(1) 如果 I 下有界, 那么 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(C, I) = 0$.
(2) 如果 C 下有界, 那么 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(C, I) = 0$.

Corollary 2.45 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的 Abel 范畴. 那么:
(1) 设 I 是下有界内射复形, 那么任何拟同构 $c : X \to Y$ 诱导加群同构 $c^* : \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(Y, I) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X, I)$.
(2) 设 I 是内射复形, $c : X \to Y$ 是下有界复形间拟同构. 则 $c^* : \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(Y, I) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X, I)$ 是同构.

Corollary 2.46 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的 Abel 范畴, X 是复形且 I 是下有界内射复形. 如果 $c : I \to X$ 是拟同构, 那么存在链映射 $f : X \to I$ 使得 fc 与 I 上恒等链映射同伦等价.

Corollary 2.47 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的 Abel 范畴, $u : I \to J$ 是下有界内射复形间的拟同构, 则 u 是同伦等价.

Corollary 2.48 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的 Abel 范畴, X 是 $\mathcal{A}$ 上的下有界复形. 那么 X 总存在下有界内射分解. 并且如果 $\alpha : X \to Y$ 是下有界复形间的同伦等价, $c_X : X \to I$ 和 $c_Y : Y \to J$ 分别是 X 和 Y 的下有界内射分解, 那么存在唯一的同伦等价 $u : I \to J$ 使得 $uc_X = c_Y\alpha$.

总结一下, 对于有足够多投射对象的 Abel 范畴, 任何上有界复形总存在上有界投射分解并且投射分解在同伦等价意义下唯一; 对于有足够多内射对象的 Abel 范畴, 任何下有界复形总存在下有界内射分解并且内射分解在同伦等价意义下唯一. 下面我们引入些新的记号. 以下设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴.

如果 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴, 记 $\mathscr{K}^-(\mathcal{P})$ 是所有上有界投射复形构成的 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 的全子范畴, $\mathscr{K}^{-,b}(\mathcal{P})$ 表示只有有限多个上同调对象非零的上有界投射复形构成的 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 的全子范畴; $\mathscr{K}^b(\mathcal{P})$ 是所有有界投射复形构成的全子范畴. 上有界投射复形间链映射诱导的映射锥依然是上有界投射复形, 所以利用链映射诱导的标准三角 (重复 [命题2.7] 的讨论) 我们可以像 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 一样赋予 $\mathscr{K}^-(\mathcal{P})$ 上三角结构. 从 [定理2.33] 知 $\mathscr{K}^{-,b}(\mathcal{P})$ 中两个复形间链映射诱导的映射锥也在 $\mathscr{K}^{-,b}(\mathcal{P})$ 中, 因此 $\mathscr{K}^{-,b}(\mathcal{P})$ 也有自然的三角结构. 事实上, 从 [命题2.7] 的证明过程我们也可以看出 $\mathscr{K}^-(\mathcal{P}), \mathscr{K}^{-,b}(\mathcal{P}), \mathscr{K}^b(\mathcal{P})$ 上有自然的三角结构.

如果 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的 Abel 范畴, 记 $\mathscr{K}^+(\mathcal{I})$ 是下有界内射复形的同伦范畴; $\mathscr{K}^{+,b}(\mathcal{I})$ 是只有有限多个上同调对象非零的下有界内射复形构成的同伦范畴; $\mathscr{K}^b(\mathcal{I})$ 是有界内射复形构成的同伦范畴. 从 [命题2.7] 的证明过程不难看出 $\mathscr{K}^+(\mathcal{I}), \mathscr{K}^{+,b}(\mathcal{I}), \mathscr{K}^b(\mathcal{I})$ 上有自然的三角结构.

3 导出范畴

3.1 乘法系与局部化

Definition 3.1 (乘法系, [Zha15]). 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, S 是 $\mathcal{A}$ 中一些态射构成的类. 称 S 为 $\mathcal{A}$ 的**乘法系**, 如果

- (FR1) S 关于态射的合成封闭并且任何 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 满足 $1_X \in S$;
- (FR2) 对任何 S 中态射 $s: X \to Y$ 和 $\mathcal{A}$ 中态射 $f: Z \to Y$, 存在 $\mathcal{A}$ 中态射 $g: W \to X$ 和 S 中态射 $t: W \to Z$ 使得有下述交换图:
$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & X \arrow[d, "s"] \\ Z \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$
对偶地, 对 S 中任何态射 $s: X \to Y$ 和 $\mathcal{A}$ 中态射 $f: X \to Z$, 存在态射 $g: Y \to W$ 和 S 中态射 $t: Z \to W$ 使得有下述交换图:
$$\begin{tikzcd} W & Y \arrow[l, "g"'] \\ Z \arrow[u, "t"] & X \arrow[l, "f"] \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd}$$
- (FR3) $\mathcal{A}$ 中任何态射 $f, g: X \to Y$ 和 S 中态射 $s: Y \to W$ 如果满足 $sf = sg$, 那么存在 S 中态射 $t: W' \to X$ 使得 $ft = gt$. 对偶地, $\mathcal{A}$ 中任何态射 $f, g: X \to Y$ 和 S 中态射 $s: W \to X$ 如果满足 $fs = gs$, 那么存在 S 中态射 $t: Y \to W'$ 使得 $tf = tg$.

Remark 3.2. 乘法系定义中 (FR1) 类似环的局部化理论中乘闭子集的要求, 并且每个对象的恒等态在乘法系中说明乘法系总非空. (FR2) 类似于要求乘闭子集满足右 Ore 条件和左 Ore 条件. (FR3) 类似于非交换局部化中 “正则性” 条件, 和右/左 Ore 条件一起保证非交换环关于乘闭子集的右/左局部化的存在性.

Remark 3.3. 如果加性范畴 $\mathcal{A}$ 的乘法系 S 满足 $fh \in S$ 和 $kf \in S$ 能保证 $f \in S$, 则称 S 是**饱和的**.

如果加性范畴 $\mathcal{A}$ 有乘法系 S, 对态射 $f: W \to Y$ 和 S 中态射 $s: W \to X$, 称二元组 (f, s) 为 X 到 Y 的一个 (关于乘法系 S 的) **右分式**. 右分式 (f, s) 能够用图表示为: $X \xleftarrow{s} W \xrightarrow{f} Y$. 设 $\mathscr{F}(X, Y)$ 是 X 到 Y 所有 (关于给定乘法系 S 的) 右分式构成的类, 如下定义 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上的二元关系: $(a, r) \sim (b, s)$ 当且仅当存在下述形式的交换图, 其中 $u \in S$:
$$\begin{tikzcd} & W_1 \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "a"] & \\ X & Z \arrow[l, "u"'] \arrow[r, "u'"] \arrow[u, "i"] \arrow[d, "h"'] & Y \\ & W_2 \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$
二元关系 $\sim$ 明显是自反且对称的, 可直接利用 (FR2) 和 (FR3) 验证 $\sim$ 满足传递性, 进而得到 $\sim$ 是类 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上的等价关系, 于是我们能够考虑每个 X 到 Y 的右分式所在的等价类. 将每个 X 到 Y 的右分式 (b, s) 所在的等价类记作 bs^{-1}. 如果 $X, Y, Z \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 并且有 X 到 Y 的右分式等价类 ar^{-1} 以及 Y 到 Z 的右分式等价类

bs^{-1}, 并设 a 的始对象是 W_1, b 的始对象是 W_2, 那么根据 (FR2), 存在 S 中态射 $t :\to W_3 \to W_1$ 和 $\mathcal{A}$ 中态射 $c : W_3 \to W_2$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
 & & W_3 \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "c"] & & \\
 & W_1 \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "a"] & & W_2 \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "b"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

于是我们得到右分式 (bc, rt), 用该右分式所在的等价类来定义 ar^{-1} 和 bs^{-1} 的合成, 可通过乘法系定义验证合成的定义合理性以及合成具有结合律. 现在记 X 到 Y 的所有右分式等价类构成的类为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}S^{-1}}(X,Y)$. 如果 $\mathcal{A}$ 和乘法系 S 满足对任何 $X,Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}S^{-1}}(X,Y)$ 是集合, 那么前面的讨论表明这时我们能定义出一个新的范畴 $\mathcal{A}S^{-1}$: 对象类就是 $\mathrm{ob}\mathcal{A}$; 任何对象 $X,Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}S^{-1} = \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 对应集合 (这是我们的假设)$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}S^{-1}}(X,Y)$; 用前面右分式等价类的合成定义态射的合成.

Definition 3.4 (商范畴, [Zha15]). 设加性范畴 $\mathcal{A}$ 和乘法系 S 满足对任何 $\mathcal{A}$ 中对象 X,Y, X 到 Y 的右分式等价类全体都构成集合. 那么称上述定义出的范畴 $\mathcal{A}S^{-1}$ 是 $\mathcal{A}$ 关于 S 的**商范畴**.

Remark 3.5. 以后当讨论加性范畴关于乘法系的商范畴时, 我们默认假设给定两个对象间右分式等价类全体是集合. 如果商范畴 $\mathcal{A}S^{-1}$ 中有态射 $ar^{-1}, bs^{-1} : X \to Y$, 那么这两个态射作为右分式等价类能够取到具有相同公分母的代表元: 设 a 作为 $\mathcal{A}$ 中态射的始对象为 W_1, b 的始对象为 W_2, 那么根据 (FR2), 存在 $\mathcal{A}$ 中态射 $s' : W_3 \to W_1$ 和 S 中态射 $r' : W_3 \to W_2$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
W_3 \arrow[r, "s'"] \arrow[d, "r'"'] & W_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "r"] & Y \\
W_2 \arrow[r, "s"] \arrow[d, "b"'] & X & \\
Y & &
\end{tikzcd}$$

那么 $(br')(sr')^{-1} = bs^{-1}$ 以及 $ar^{-1} = (as')(rs')^{-1}$. 因此 $sr' = rs'$ 能够作为 s,r 的公分母. 于是可设 $ar^{-1} = a't^{-1}, bs^{-1} = b's^{-1}$, 并可定义合理地置 $bs^{-1} + ar^{-1} = (a'+b')t^{-1}$. 对固定的 $X,Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}S^{-1}$, 容易验证 X 到 Y 的形如 $0s^{-1}$ 和 $0t^{-1}$ 的元素一致, X 到 Y 右分式等价类间的加法具有结合律并且任何 $ar^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}S^{-1}}(X,Y)$ 满足在前面的加法运算下 $ar^{-1} + 0s^{-1} = 0s^{-1} + ar^{-1} = ar^{-1}$. 并且 $(-a)r^{-1} = a(-r)^{-1}$ 满足 $ar^{-1} + (-a)r^{-1} = 0r^{-1}$. 因此 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}S^{-1}}(X,Y)$ 是加法群. 可直接验证对任何 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}S^{-1}$, 在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}S^{-1}}(X,X)$ 中有 $1_X 1_X^{-1} = ss^{-1}$, 对任何终对象为 X 的 S 中态射 s 成立. 对任何 X 到 Y 的右分式等价类 ar^{-1}, 如果 $s \in S$ 的终对象和态射 a 的始对象一致, 那么有 $ar^{-1} = (as)(rs)^{-1}$. 也可直接验证 $as^{-1} = (a1^{-1})(1s^{-1})$ 并且右分式等价类的加法关于合成具有分配律. 于是根据加性范畴的定义立即得到加性范畴 $\mathcal{A}$ 关于乘法系 S 的商范畴 $\mathcal{A}S^{-1}$ 构成加性范畴.

Remark 3.6. 设 A, B 是含幺环, X 是左 A-模复形, Y 是 A-B 双模复形, S 是 $\mathscr{K}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ 中的乘法系满足 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(A\text{-}\mathbf{Mod})S^{-1}}(X,Y)$ 是集合, 那么这时可用 Y 上右模结构自然赋予 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(A\text{-}\mathbf{Mod})S^{-1}}(X,Y)$ 上右模结构. 更进一步, 如果 C 也是含幺环, X 是 A-C 双模复形, 那么也能自然赋予 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(A\text{-}\mathbf{Mod})S^{-1}}(X,Y)$ 上的 C-B 模结构.

设 $\mathcal{A}S^{-1}$ 是加性范畴 $\mathcal{A}$ 关于乘法系 S 的商范畴. 那么 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{A}S^{-1}$ 有标准函子 $\lambda_S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}S^{-1}$ 满足 $\lambda_S(X) = X, \forall X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 以及对任何 $\mathcal{A}$ 中态射 $f : X \to Y$, $\lambda_S(f) = f1^{-1}$. λ_S 当然是加性函子, 并且

Lemma 3.7 ([Zha15])**.** 上述加性函子 $\lambda_S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}S^{-1}$ 将 S 中态射映至同构.

Proof. 设 $s : X \to Y \in S$, 需要说明 $s/1 : X \to Y$ 是同构, 容易直接验证 $s/1$ 有逆 $1/s : Y \to X$. □

类似于 (非) 交换环论中的局部化, 范畴的局部化也有相应泛性质.

Proposition 3.8 ([Zha15])**.** 前述加性函子 $\lambda_S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}S^{-1}$ 满足对任何加性函子 $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 如果 G 把 S 中态射映至 $\mathcal{B}$ 中同构, 那么存在唯一的加性函子 $\overline{G} : \mathcal{A}S^{-1} \to \mathcal{B}$ 使得 (关于函子的) 下图交换:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "\lambda_S"] \arrow[dr, "G"'] & & \mathcal{A}S^{-1} \arrow[dl, dashed, "\overline{G}"] \\ & \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

Proof. 定义 $\overline{G} : \mathcal{A}S^{-1} \to \mathcal{B}$ 满足将每个对象 X 映至 GB, 每个态射 $as^{-1} : X \to Y$ 映至 $G(a)G(s)^{-1} : GX \to GY$. 利用右分式等价的定义以及 $G(S)$ 中态射均可逆容易验证 $\overline{G}$ 是定义合理的加性函子, 且 $\overline{G}\lambda_S = G$. 因为 $as^{-1} = (a1^{-1})(1s^{-1})$, 所以 $\overline{G}$ 一旦存在则唯一. □

Remark 3.9. 该命题表明 $\mathcal{A}S^{-1}$(在可定义的前提下) 是将 S 中态射变为同构的“最小”加性范畴.

Example 3.10 (同伦范畴中的拟同构, [Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 记 S 是同伦范畴 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中的拟同构全体构成的态射类, 那么 S 是加性范畴 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 的乘法系. S 明显还是饱和乘法系.

Proof. S 明显满足 (FR1). 现在设 $s : X \to Y$ 是复形间拟同构, $f : Z \to Y$ 是复形间链映射. 根据 [注记2.10], s 可嵌入某个好三角: $X \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{g} E \longrightarrow X[1]$. 态射 $gf : Z \to S$ 也可以嵌入某个好三角:

$$W \xrightarrow{t} Z \xrightarrow{gf} E \longrightarrow W[1].$$

现在应用 [注记2.12] 得到存在态射 $u : W \to X$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "t"] \arrow[d, dashed, "u"'] & Z \arrow[r, "gf"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "1_S"] & W[1] \arrow[d, dashed, "u[1]"] \\ X \arrow[r, "s"] & Y \arrow[r, "g"] & E \arrow[r] & X[1] \end{tikzcd}$$

由 [注记2.34], s 作为拟同构保证 E 是正合复形, 进而也有 $t \in S$. 为了完成 (FR2) 的验证, 还需说明对任何拟同构 $s : X \to Y$ 和链映射 $f : X \to Z$, 存在链映射 g 和拟同构 t 使得 $tf = gs$. 现在把 f 嵌入好三角:

$$W \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Z \longrightarrow W[1].$$

再把 $sh : W \to Y$ 嵌入好三角 $W \xrightarrow{hs} Y \xrightarrow{g} V \longrightarrow W[1]$. 由 (TR3) 知存在链映射 $t : Z \to V$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "1_W"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, dashed, "t"'] & W[1] \arrow[d, "1_{W[1]}"] \\ W \arrow[r, "sh"] & Y \arrow[r, "g"] & V \arrow[r] & W[1] \end{tikzcd}$$

对上图应用 [定理2.33] 以及五引理便知 t 诱导各次上同调对象间的态射都是同构. 所以 t 是拟同构. 由此得到 S 满足 (FR2). 最后说明 S 满足 (FR3). 设链映射 $f : X \to Y$ 满足存在拟同构 $s : Y \to Z$ 使得 $sf = 0$, 需要证明存在以 X 为终对象的拟同构 t 使得 $ft = 0$. 应用 [注记2.10] 把拟同构 $s : Y \to Z$ 嵌入好三角 $W \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{s} Z \longrightarrow W[1]$. 因为 s 是拟同构, 所以 [注记2.34] 保证了 W 是正合复形. 对前面得到的好三角应用 [例2.16] 得到正合列: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,W) \xrightarrow{h_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \xrightarrow{s_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Z)$. 因为链映射 $f : X \to Y$ 满足 $sf = 0$, 所以存在链映射 $k : X \to W$ 使得 $hk = f$. 将 $k : X \to W$ 嵌入好三角:

$$H \xrightarrow{t} X \xrightarrow{k} W \longrightarrow H[1].$$

那么由 W 是正合复形得到 t 是拟同构. 并注意 [注记2.11] 说明 $kt = 0$, 所以 $ft = 0$. 对偶地, 利用逆变 Hom 函子是上同调函子也容易验证如果链映射 $f : X \to Y$ 满足存在拟同构 $s : Z \to X$ 使得 $fs = 0$, 那么存在拟同构 $t : Y \to W$ 使得 $tf = 0$. 因此 (FR3) 成立, 我们得到 S 是 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 的乘法系. □

Remark 3.11. 在 [例2.25] 中我们看到 $\mathscr{K}^b(\mathcal{A}), \mathscr{K}^-(\mathcal{A}), \mathscr{K}^+(\mathcal{A})$ 都是 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 的三角子范畴. 因此 [例3.10] 的证明过程也说明了对 $\mathscr{K}^b(\mathcal{A}), \mathscr{K}^-(\mathcal{A}), \mathscr{K}^+(\mathcal{A})$ 中的每个加性范畴, 其中的拟同构全体构成乘法系.

依然设 S 是加性范畴 $\mathcal{A}$ 中的乘法系. 前面利用右分式构造商范畴 $\mathcal{A}S^{-1}$, 我们也可以用左分式的语言构造商范畴 $S^{-1}\mathcal{A}$. 对 $\mathcal{A}$ 中态射 $f : X \to W$ 和 $s : Y \to W$, 称二元组 (s, f) 为 X 到 Y 的一个**左分式**.

$$X \xrightarrow{f} W \xleftarrow{s} Y$$

Remark 3.12. 可以如下记忆左/右分式的箭头图. 在商范畴 $\mathcal{A}S^{-1}$ 中, X 到 Y 的右分式诱导态射 $fs^{-1} : X \to Y$. 这可以视作 s 的"逆"与 f 的合成. 因此这时 s 的终对象为 X, f 的终对象为 Y 且 s 和 f 有相同始对象. 对偶地, 之后我们要构造的商范畴 $S^{-1}\mathcal{A}$ 中, 左分式诱导的 X 到 Y 的 (在商范畴中的) 态射形如 $s^{-1}f : X \to Y$. 这可以理解为 f 和 s 的"逆"的合成. 因此 f 有始对象 X, s 有始对象 Y, f 的终对象和 s 的终对象相同.

左分式间也可以类似右分式情形定义等价关系: 给定左分式 (r, a) 和 (s, b), 定义 $(r, a) \sim (s, b)$ 当且仅当存在下述形式的交换图, 其中 $t \in S$:

$$\begin{tikzcd}
 & W_1 \arrow[d] & \\
X \arrow[ur, "a"] \arrow[r] \arrow[dr, "b"'] & Z & Y \arrow[ul, "r"'] \arrow[l, "t"'] \arrow[dl, "s"] \\
 & W_2 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

可以直接验证这确实是等价关系, 将 X 到 Y 的左分式 (s, f) 所在的等价类记作 $s^{-1}f$.

我们可以定义左分式等价类的合成. 如果 $r^{-1}a : X \to Y$ 和 $s^{-1}b : Y \to Z$ 都是左分式等价类. 设为

$$\begin{tikzcd}
 & W_1 & & W_2 & \\
X \arrow[ur, "a"] & & Y \arrow[ul, "r"'] \arrow[ur, "b"] & & Z \arrow[ul, "s"']
\end{tikzcd}$$

根据 (FR2), 存在下述形式的交换图满足 $t \in S$:

$$\begin{tikzcd} & & & W & & \\ & W_1 \arrow[urr, dashed, "f"] & & & W_2 \arrow[ul, "t"'] & \\ X \arrow[ur, "a"] & & Y \arrow[ul, "r"'] \arrow[urr, "b"] & & & Z \arrow[ul, "s"'] \end{tikzcd}$$

由此得到 X 到 Z 的左分式 (ts, fa), 用 $(ts)^{-1}(fa)$ 来定义左分式等价类 $r^{-1}a$ 和 $s^{-1}b$ 的合成. 可以直接验证左分式等价类的合成是定义合理的 (不依赖于左分式代表元的选取) 并且左分式等价类关于合成具有结合律. 也可以类似右分式等价类情形通过说明公分母存在性定义左分式等价类的加法. 对 $X, Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 记 X 到 Y 所有左分式等价类构成的类为 $\mathrm{Hom}_{S^{-1}\mathcal{A}}(X, Y)$. 如果 $\mathrm{Hom}_{S^{-1}\mathcal{A}}(X, Y)$ 是集合, 那么 $\mathrm{Hom}_{S^{-1}\mathcal{A}}(X, Y)$ 上有加法群结构, 以及 [注记3.5] 关于右分式讨论结论的对偶版本.

与 $\mathcal{A}S^{-1}$ 对偶地, 要求对 $\mathcal{A}$ 中所有对象 X, Y, X 到 Y 的左分式等价类全体构成的类 $\mathrm{Hom}_{S^{-1}\mathcal{A}}(X, Y)$ 是集合. 用 $\mathcal{A}$ 的对象类定义 $S^{-1}\mathcal{A}$ 的对象类, 任何 $X, Y \in \mathrm{ob}S^{-1}\mathcal{A}$, X 到 Y 的态射集定义为 $\mathrm{Hom}_{S^{-1}\mathcal{A}}(X, Y)$. 用左分式等价类的合成定义态射的合成后能够得到范畴 $S^{-1}\mathcal{A}$. 也称为 $\mathcal{A}$ 关于乘法系 S 的**商范畴**. 也有局部化函子 $\mu_S : \mathcal{A} \to S^{-1}\mathcal{A}$ 满足 μ_S 将 S 中态射映至 $S^{-1}\mathcal{A}$ 中同构. 如果还有加性范畴 $\mathcal{B}$ 和加性函子 $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 满足 G 把 S 中态射映至 $\mathcal{B}$ 中同构, 则存在唯一的加性函子 $\overline{G} : \mathcal{A}S^{-1} \to \mathcal{B}$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "\mu_S"] \arrow[dr, "G"'] & & S^{-1}\mathcal{A} \arrow[dl, dashed, "\overline{G}"] \\ & \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

从左分式构造的商范畴的上述观察, 以及 [命题3.8], 我们立即得到

Proposition 3.13 ([Zha15]). 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, 有乘法系 S 满足 $S^{-1}\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}S^{-1}$ 都是范畴. 那么存在唯一的 (加性) 范畴同构 $F : \mathcal{A}S^{-1} \to S^{-1}\mathcal{A}$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "\lambda_S"] \arrow[dr, "\mu_S"'] & & \mathcal{A}S^{-1} \arrow[dl, dashed, "F"] \\ & S^{-1}\mathcal{A} & \end{tikzcd}$$

Remark 3.14. 对 $\mathcal{A}$ 中任何态射 $f : X \to Y$, 命题中的范畴同构 G 满足 $G(f1_X^{-1}) = 1_Y^{-1}f$.

当讨论左分式构造的商范畴时, 我们也默认假设定义它的态射类都是集合. 对于饱和乘法系处的局部化, 有

Proposition 3.15 ([Zha15]). 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, S 是饱和相容乘法系, $\lambda_S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}S^{-1}$ 是局部化函子. $f : X \to Y$ 是 $\mathcal{A}$ 中态射. 那么 $f1_X^{-1} : X \to Y$ 是 $\mathcal{A}S^{-1}$ 中同构的充要条件是 $f \in S$.

Proof. 充分性来自 [引理3.7], 下证必要性. 设 $f1_X^{-1} : X \to Y$ 的逆是 $hs^{-1} : Y \to X$:

$$Y \xleftarrow{s} W \xrightarrow{h} X$$

由 $(f1_X^{-1})(hs^{-1}) = 1_Y$ 得到 $(fh)s^{-1} = 1_Y$. 于是存在态射 $i : Z \to W$ 使得 $fhi \in S$.

从 [命题3.13] 指出的加性范畴同构可知 $1_Y^{-1}f : X \to Y$ 是 $S^{-1}\mathcal{A}$ 中的同构, 设逆为 $s^{-1}h$. 对偶前面的讨论也能得到存在能与 h 合成的态射 t 使得 $thf \in S$. 现在利用 S 的饱和性得到 $f \in S$. $\square$

在本节最后我们指出当 $\mathcal{A}$ 是模范畴时, $\mathscr{K}(\mathcal{A}),\mathscr{K}^-(\mathcal{A}),\mathscr{K}^+(\mathcal{A}),\mathscr{K}^b(\mathcal{A})$ 关于相应拟同构全体构成的乘法系 ([例3.10])S 满足 $\mathcal{A}S^{-1}$ 和 $S^{-1}\mathcal{A}$ 的态射类都是集合, 见 [Wei94, Proposition 10.4.4].

3.2 相容乘法系与 Verdier 商

当 $\mathcal{A}$ 是加性范畴时, 可以考虑在乘法系处的局部化. 因此一个基本问题是当 $\mathcal{A}$ 进一步是三角范畴时, 商范畴 $\mathcal{A}S^{-1}$ 是否有自然的三角结构使得局部化函子 $\lambda_S:\mathcal{A}\to\mathcal{A}S^{-1}$ 成为三角函子? 为此需要

Definition 3.16 (相容乘法系, [Zha15])**.** 设 $(\mathcal{A},[1],\mathcal{E})$ 是三角范畴, S 是 $\mathcal{A}$ 中乘法系. 称 S 是**饱和的**, 如果满足:

- (FR4) 对任何 $s\in S$ 有 $s[1]\in S$;
- (FR5) 对任何下述形式满足上下两行是好三角, 左边方块交换, 第一列和第二列态射在 S 中的交换图:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1] \end{tikzcd}$$

存在 S 中态射 $h:Z\to Z'$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h'"'] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1] \end{tikzcd}$$

对三角范畴 $(\mathcal{A},[1],\mathcal{E})$ 和相容乘法系 S, 由 S 在 $[1]$ 作用下封闭, 范畴自同构 $[1]:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 根据 [命题3.8], 可导出范畴自同构 $\mathcal{A}S^{-1}\to\mathcal{A}S^{-1}$ 满足把每个对象 X 对应到 $X[1]$, 态射 $fs^{-1}:X\to Y$ 对应到 $f[1](s[1])^{-1}:X\to Y$. 将该 $\mathcal{A}S^{-1}$ 上的范畴自同构依然记作 $[1]$. 在此记号下, $(fs^{-1})[1]=f[1](s[1])^{-1}$.

Theorem 3.17 ([Zha15])**.** 设 $(\mathcal{A},[1],\mathcal{E})$ 是三角范畴, S 是饱和相容乘法系. 那么:
(1) 定义 $\mathcal{E}'$ 是 $\mathcal{A}S^{-1}$ 中所有和"$\mathcal{A}$ 中好三角在局部化函子下的像"同构的三角构成的类. 那么 $(\mathcal{A}S^{-1},[1],\mathcal{E}')$ 是三角范畴并使 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{A}S^{-1}$ 的局部化函子成为三角函子. $\mathcal{A}S^{-1}$ 上的该三角结构也是使得局部化函子成为三角函子唯一的三角结构.
(2) 任给三角范畴 $\mathcal{B}$ 和三角函子 $G:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, 如果 G 把 S 中态射都映至 $\mathcal{B}$ 中同构, 则存在唯一的三角函子 $\overline{G}:\mathcal{A}S^{-1}\to\mathcal{B}$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "\lambda_S"] \arrow[dr, "G"'] & & \mathcal{A}S^{-1} \arrow[dl, dashed, "\overline{G}"] \\ & \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

(3) 如果进一步 S 是饱和乘法系, 那么对 $\mathcal{A}$ 中态射 f, $\lambda_S(f)$ 是同构当且仅当 $f\in S$.

Proof. (1) 根据 $\mathcal{E}'$ 的定义便知任何 $X\in\mathrm{ob}\mathcal{A}S^{-1}$ 满足有 $\mathcal{E}'$ 中三角: $X\xrightarrow{1_X}X\longrightarrow 0\longrightarrow X[1]$. 因此要证明 $(\mathcal{A}S^{-1},[1],\mathcal{E}')$ 满足 (TR1) 还需说明任何商范畴中的态射 $us^{-1}:X\to Y$ 可嵌入某个 $\mathcal{E}'$ 中三角. 记 $u:U\to Y$, 那么 u 可嵌入 $\mathcal{A}$ 中某好三角 $U\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}U[1]$. 故 $\mathcal{E}'$ 中有三角:

$$U\xrightarrow{u1_U^{-1}}Y\xrightarrow{v1_Y^{-1}}Z\xrightarrow{w1_Z^{-1}}U[1].$$

进而 $\mathcal{E}'$ 中的下述三角同构保证了 us^{-1} 可嵌入某 $\mathcal{E}'$ 中三角:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "us^{-1}"] \arrow[d, "1s^{-1}"] & Y \arrow[r, "v1_Y^{-1}"] \arrow[d, "1_Y"] & Z \arrow[r, "(s[1]w)1_Z^{-1}"] \arrow[d, "1_Z"] & X[1] \arrow[d, "(1s^{-1})[1]"] \\
U \arrow[r, "u1_U^{-1}"] & Y \arrow[r, "v1_Y^{-1}"] & Z \arrow[r, "w1_Z^{-1}"] & U[1]
\end{tikzcd}$$

于是我们得到 $(\mathcal{A}S^{-1}, [1], \mathcal{E}')$ 满足 (TR1). 因为 $\mathcal{A}$ 中好三角满足顺时针旋转, 所以在局部化函子下的像也满足顺时针旋转, 由此易知 $(\mathcal{A}S^{-1}, [1], \mathcal{E}')$ 满足 (TR2). 同样地, $(\mathcal{A}S^{-1}, [1], \mathcal{E}')$ 满足 (TR4) 直接来自 $\mathcal{E}'$ 的定义和 $\mathcal{A}$ 满足 (TR4). 要验证 $(\mathcal{A}S^{-1}, [1], \mathcal{E}')$ 满足 (TR3) 只需要对标准三角, 即 $\mathcal{A}$ 中好三角在局部化函子下的像讨论即可. 设有下述交换图, 其中上下两行都来自 $\mathcal{A}$ 中好三角:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u1^{-1}"] \arrow[d, swap, "fs^{-1}"] & Y \arrow[r, "v1^{-1}"] \arrow[d, swap, "gt^{-1}"] & Z \arrow[r, "w1^{-1}"] & X[1] \arrow[d, "(fs^{-1})[1]"] \\
X' \arrow[r, "u'1^{-1}"] & Y' \arrow[r, "v'1^{-1}"] & Z' \arrow[r, "w'1^{-1}"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

设图中右分式等价类有代表元:

$$X \xleftarrow{s} X'' \xrightarrow{f} X', \qquad Y \xleftarrow{t} Y'' \xrightarrow{g} Y'.$$

现在有态射 $us : X'' \to Y$ 和 S 中态射 $t : Y'' \to Y$, 应用 (FR2) 得到存在 S 中态射 $s' : \tilde{X}'' \to X''$ 和 $\mathcal{A}$ 中态射 $u'' : \tilde{X}'' \to Y''$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}'' \arrow[r, "s'"] \arrow[d, swap, "u''"] & X'' \arrow[d, "us"] \\
Y'' \arrow[r, "t"] & Y
\end{tikzcd}$$

进而由下面的交换图得到 $(gt^{-1})(u1_X^{-1}) = (gu'')(ss')^{-1}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & \tilde{X}'' \arrow[dl, swap, "ss'"] \arrow[dr, "u''"] & & \\
 & X \arrow[dl, swap, "1_X"] \arrow[dr, "u"] & & Y'' \arrow[dl, swap, "t"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Y'
\end{tikzcd}$$

因此有 $(gu'')(ss')^{-1} = (u'f)s^{-1}$. 于是有下述交换图满足 $ss'k \in S$:

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{X}'' \arrow[dl, swap, "ss'"] \arrow[dr, "gu''"] & \\
X & W \arrow[l, swap, "ss'k"] \arrow[r, "gu''k"] \arrow[u, "k"] \arrow[d, "l"] & Y' \\
 & X'' \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, swap, "u'f"] &
\end{tikzcd}$$

现在 $usl = uss'k = tu''k$, 所以有下述交换图满足上下两行都是 $\mathcal{A}$ 中好三角:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "u''k"] \arrow[d, "sl"'] & Y'' \arrow[r, "c"] \arrow[d, "t"] & Z'' \arrow[r] & W[1] \arrow[d, "sl[1]"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}$$

应用 $\mathcal{A}$ 满足 (TR3) 以及 (FR5) 得到存在 S 中态射 $a : Z'' \to Z$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "u''k"] \arrow[d, "sl"'] & Y'' \arrow[r, "c"] \arrow[d, "t"] & Z'' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "a"'] & W[1] \arrow[d, "sl[1]"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}$$

从 $u'fl = gu''k$ 得到存在态射 $b : Z'' \to Z'$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "u''k"] \arrow[d, "fl"'] & Y'' \arrow[r, "c"] \arrow[d, "g"] & Z'' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "b"'] & W[1] \arrow[d, "fl[1]"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

注意 $a \in S$, 所以 $ba^{-1} : Z \to Z'$. 断言 $(ba^{-1})(v1^{-1}) = (v'1^{-1})(gt^{-1})$: 事实上, 这直接来自 $\mathcal{A}S^{-1}$ 中的交换图:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "1t^{-1}"] \arrow[d, "v1^{-1}"'] & Y'' \arrow[r, "g1^{-1}"] \arrow[d, "c1^{-1}"] & Y' \arrow[d, "v'1^{-1}"] \\
Z \arrow[r, "1a^{-1}"] & Z'' \arrow[r, "b1^{-1}"] & Z'
\end{tikzcd}$$

因此我们得到在 $\mathcal{A}S^{-1}$ 中有下述交换图, 进而得到 $(\mathcal{A}S^{-1}, [1], \mathcal{E}')$ 满足 (TR3):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u1^{-1}"] \arrow[d, "fs^{-1}"'] & Y \arrow[r, "v1^{-1}"] \arrow[d, "gt^{-1}"'] & Z \arrow[r, "w1^{-1}"] \arrow[d, "ba^{-1}"] & X[1] \arrow[d, "(fs^{-1})[1]"] \\
X' \arrow[r, "u'1^{-1}"] & Y' \arrow[r, "v'1^{-1}"] & Z' \arrow[r, "w'1^{-1}"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

至此我们得到 $\mathcal{A}$ 关于相容乘法系局部化得到的商范畴 $\mathcal{A}S^{-1}$ 上有自然的三角范畴结构. 根据 $\mathcal{A}S^{-1}$ 上三角结构的构造易知局部化函子这时成为三角函子. 如果 $\mathcal{E}''$ 也满足 $(\mathcal{A}S^{-1}, [1], \mathcal{E}'')$ 是三角范畴并使得局部化函子成为三角函子, 那么由局部化函子把 $\mathcal{A}$ 中好三角映至 $\mathcal{E}''$ 中三角得到 $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}''$. 任给 $\mathcal{A}S^{-1}$ 中态射 $fs^{-1} : X \to Y$, 设 f 的始对象是 W, 则有下述交换图满足竖直方向的态射都是 $\mathcal{A}S^{-1}$ 中同构:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "fs^{-1}"] \arrow[d, "1s^{-1}"'] & Y \arrow[d, "1_Y"] \\
W \arrow[r, "f1^{-1}"] & Y
\end{tikzcd}$$

现在由给定态射嵌入的好三角在同构意义下唯一可知 $\mathcal{E}''$ 中好三角都同构于 $\mathcal{A}$ 中某个好三角在局部化函子下的像, 因此也有 $\mathcal{E}' \supseteq \mathcal{E}''$. 这就证明了 $\mathcal{E}'$ 是满足 $(\mathcal{A}S^{-1}, [1], \mathcal{E}')$ 成为三角范畴且局部化函子是三角函子唯一的三

角结构. 这就证明了 (1). 下面证明 (2): 现在 (1) 说明局部化函子 $\lambda_S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}S^{-1}$ 是三角函子. 现在任给三角范畴 $\mathcal{B}$ 和三角函子 $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 根据 [命题3.8], 存在唯一的加性函子 $\overline{G} : \mathcal{A}S^{-1} \to \mathcal{B}$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "\lambda_S"] \arrow[dr, "G"'] & & \mathcal{A}S^{-1} \arrow[dl, dashed, "\overline{G}"] \\ & \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

易见 $\overline{G}$ 把 $\mathcal{A}$ 中好三角在 λ_S 下的像都映至 $\mathcal{B}$ 中好三角. 记 T 是 $\mathcal{B}$ 上平移函子, 那么有自然同构 $\varphi : G[1] \cong TG$. 同样由 φ 可给出 $\overline{G}[1] \cong T\overline{G}$. 由此易知 $\overline{G}$ 是 $\mathcal{A}S^{-1}$ 到 $\mathcal{B}$ 的三角函子. (3) 来自 [命题3.15]. □

因此如果三角范畴 $\mathcal{A}$ 关于相容乘法系 S 有商范畴 $\mathcal{A}S^{-1}$, 那么 $\mathcal{A}S^{-1}$ 上有自然的三角结构使得局部化函子 $\lambda_S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}S^{-1}$ 成为三角函子并具有 [定理3.17(2)] 意义下关于三角函子的泛性质. 通常将三角范畴关于相容乘法系的局部化得到的商范畴 (也是三角范畴) 称为 **Verdier 商**.

Example 3.18 (同伦范畴中拟同构乘法系, [Zha15]). 从 [例3.10] 中我们看到 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上同伦范畴 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中拟同构全体构成的态射类 S 是 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 的饱和乘法系. 由拟同构的定义立即看到 S 满足 (FR4). (FR5) 明显来自 (TR3), [定理2.33] 中链接态射具有的自然性以及五引理. 所以 S 是三角范畴 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 的饱和相容乘法系. 由 [注记3.11] 也容易看出 $\mathscr{K}^b(\mathcal{A}), \mathscr{K}^-(\mathcal{A}), \mathscr{K}^+(\mathcal{A})$ 每个三角范畴中的拟同构全体构成饱和相容乘法系.

3.3 导出范畴

固定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, 从 [例3.18] 知对 $\mathscr{K}(\mathcal{A}), \mathscr{K}^b(\mathcal{A}), \mathscr{K}^-(\mathcal{A}), \mathscr{K}^+(\mathcal{A})$, 如果分别记其中的拟同构全体构成的类是 Q, Q_b, Q_-, Q_+, 那么 Q_* 构成 $\mathscr{K}^*(\mathcal{A})$ 的饱和相容乘法系, 这里 $* \in \{\varnothing, b, -, +\}$.

Definition 3.19 (导出范畴, [Zha15]). 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $* \in \{\varnothing, b, -, +\}$, Q_* 是 $\mathscr{K}^*(\mathcal{A})$ 所有拟同构构成的饱和相容乘法系. 如果 $\mathscr{K}(\mathcal{A})Q^{-1}$ 存在, 称为 $\mathcal{A}$ 的**导出范畴**, 记作 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$; 如果 $\mathscr{K}^b(\mathcal{A})Q_b^{-1}$ 存在, 称为 $\mathcal{A}$ 的**有界导出范畴**, 记作 $\mathscr{D}^b(\mathcal{A})$; 如果 $\mathscr{K}^-(\mathcal{A})Q_-^{-1}$ 存在, 称为 $\mathcal{A}$ 的**上有界导出范畴**, 记作 $\mathscr{D}^b(\mathcal{A})$; 如果 $\mathscr{K}^+(\mathcal{A})Q_+^{-1}$ 存在, 称为 $\mathcal{A}$ 的**下有界导出范畴**, 记作 $\mathscr{D}^+(\mathcal{A})$. $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 均为三角范畴 ([定理3.17]).

Remark 3.20. 当 $\mathcal{A}$ 是模范畴时, 对 $* \in \{\varnothing, b, -, +\}$, $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 都存在, 见 [Wei94, Proposition 10.4.4].

Remark 3.21. Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上同伦范畴 $\mathscr{K}^*(\mathcal{A})$ 上的平移函子诱导 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 上范畴自同构.

Remark 3.22. 对 $* \in \{\varnothing, b, -, +\}$, 有局部化函子 $\lambda^* : \mathscr{K}^*(\mathcal{A}) \to \mathscr{D}^*(\mathcal{A})$. $\mathscr{K}^*(\mathcal{A})$ 中任何链映射 (等价类)$f : X \to Y$ 在局部化函子作用下对应 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 中态射 (右分式等价类)$f1_X^{-1} : X \to Y$. 根据 [命题3.15], $\lambda^*(f)$ 是同构的充要条件是 f 是复形间拟同构. 根据右分式等价性的定义, $\lambda^*(f) = 0$ 的充要条件是存在拟同构 $s : X' \to X$ 使得 fs 同伦于零 (链映射). 由左分式等价性定义知 $\lambda^*(f) = 0$ 的充要条件是存在拟同构 $s : Y \to Y'$ 使得 sf 同伦于零. 由此可知: 设 $\alpha = fs^{-1} : X \to Y$ 是 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 中态射. 那么 $\alpha = 0$(在导出范畴中) 的充要条件是存在拟同构 t 使得 ft 同伦于零. 对 $* \in \{\varphi, b, -, +\}$, 根据 [命题1.96], 对任何整数 n, 上同调函子 H^n 可以视作 $\mathscr{K}^*(\mathscr{A})$ 到 $\mathscr{A}$ 的加性函子并且把 Q_* 中态射映至同构, 所以由 [命题3.8] 得到存在唯一的加性函子 $\mathscr{H}^n : \mathscr{D}^*(\mathscr{A}) \to \mathscr{A}$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{K}^*(\mathscr{A}) \arrow[rr, "\lambda^*"] \arrow[dr, "H^n"'] & & \mathscr{D}^*(\mathscr{A}) \arrow[dl, dashed, "\mathscr{H}^n"] \\ & \mathscr{A} & \end{tikzcd}$$

特别地, 如果 $\mathscr{C}^*(\mathcal{A})$ 中复形间的链映射 $f,g:X\to Y$ 满足 $\lambda^*(f)=\lambda^*(g)$, 那么 $\mathscr{H}^n(f)=\mathscr{H}^n(g)$. 任取 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中态射 $\alpha=fs^{-1}:X\to Y$, 那么 $\mathscr{H}^n(\alpha)=H^n(f)(H^n(s))^{-1}$.

Remark 3.23. 设 $\alpha=fs^{-1}:X\to Y$ 是 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 中态射. 那么 α 是 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 中同构的充要条件是 f 是拟同构. 因为 $s1^{-1}$ 总是 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 中同构, 所以 α 是 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 中同构的充要条件是 $f1^{-1}$(这里 1 的始对象是 s 和 f 公共的始对象) 是 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 中同构. 而根据 [注记3.22] 这等价于 f 是拟同构. 所以两个 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 中复形 X,Y 如果在 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 中同构, 那么 $H^n(X)\cong H^n(Y),\forall n\in\mathbb{Z}$. 故上同调对象是导出范畴的同构不变量.

Remark 3.24. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴且有导出范畴 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$, 那么 $X\in\mathrm{ob}\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 是零对象的充要条件是 X 是正合复形. 充分性是明显的, 这时 X 到零复形的零链映射给出拟同构. 必要性: 这时 [注记3.23] 表明 X 的各次上同调对象均为零, 所以 X 是正合复形 ([注记1.56]).

Proposition 3.25. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴且有导出范畴 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$, $\alpha=fs^{-1}:X\to Y$ 是 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 中态射. 那么 α 是 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 中同构的充要条件是对任何整数 n 有 $\mathscr{H}^n(\alpha):H^n(X)\to H^n(Y)$ 是 $\mathcal{A}$ 中同构.

Proof. 根据 [注记3.23], 这里 $\mathscr{H}^n(\alpha)=H^n(f)(H^n(s))^{-1},\forall n\in\mathbb{Z}$. 故可知 $\mathscr{H}^n(\alpha)$ 对所有的整数 n 是同构等价于对所有的整数 n, $H^n(f)$ 是同构. 这等价于 f 是拟同构, 故由 [注记3.23] 便得结论. □

下面的命题使我们能把握导出范畴中好三角——本质上来自复形短正合列.

Proposition 3.26 ([Zha15]). 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴并且有导出范畴 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$, 这里 $*\in\{\varnothing,b,-,+\}$. 设

$$0\longrightarrow X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\longrightarrow 0$$

是 $\mathcal{A}$ 上复形短正合列. 那么存在 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 中的态射 $h:Z\to X[1]$(注意是导出范畴中的态射) 使得

$$X\xrightarrow{f1^{-1}}Y\xrightarrow{g1^{-1}}Z\xrightarrow{h}X[1]$$

是 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 中好三角. 反之, 对 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 中任何好三角都同构于某个这种方式产生的好三角.

Proof. 任给复形短正合列 $0\longrightarrow X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\longrightarrow 0$, 回忆链映射 f 产生好三角 (2.6) 满足该好三角的前三项构成复形的可裂短正合列. 于是我们得到复形的下述交换图, 满足上下两行正合:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "1_X"'] & \mathrm{Cyl}(f) \arrow[r] \arrow[d, "{(0,1,f)}"'] & \mathrm{Con}(f) \arrow[r] \arrow[d, "{(0,g)}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

从 [注记2.31] 得到 $(0,1,f)$ 是拟同构, 所以由同调代数基本定理和五引理易得 $(0,g)$ 也是拟同构.

现在 (2.6) 可设为 $X\longrightarrow\mathrm{Cyl}(f)\longrightarrow\mathrm{Con}(f)\xrightarrow{w}X[1]$. 记 $s=(0,1,f),t=(0,g)$ 都是拟同构. 于是在 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 中有下述交换图满足竖直方向都是同构:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "1_X"'] & \mathrm{Cyl}(f) \arrow[r] \arrow[d, "s1^{-1}"'] & \mathrm{Con}(f) \arrow[r, "w1^{-1}"] \arrow[d, "t1^{-1}"'] & X[1] \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f1^{-1}"] & Y \arrow[r, "g1^{-1}"] & Z \arrow[r, "wt^{-1}"] & X[1]
\end{tikzcd}$$

因此如果选取 $h=wt^{-1}:Z\to X[1]$, 便有好三角 $X\xrightarrow{f1^{-1}}Y\xrightarrow{g1^{-1}}Z\xrightarrow{h}X[1]$. 反之, $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 中的好三角都同构于映射筒产生的好三角 (2.6), 而 (2.6) 的前三项作为复形可裂短正合列自然也是可裂短正合列. □

由 [命题3.26] 以及同伦范畴版本同调代数基本定理 ([定理2.33]) 立即得到:

Theorem 3.27. 设 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 满足 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 存在, 并且有下述交换图满足上下两行是某好三角的前三项:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\downarrow \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' \end{array}$$

那么对任何整数 n, 下图交换并且上下两行正合:

$$\begin{array}{ccccc} H^n(X) & \xrightarrow{\mathscr{H}^n(u)} & H^n(Y) & \xrightarrow{\mathscr{H}^n(v)} & H^n(Z) \\ {\scriptstyle\mathscr{H}^n(\alpha)}\downarrow & & {\scriptstyle\mathscr{H}^n(\beta)}\downarrow & & {\scriptstyle\mathscr{H}^n(\gamma)}\downarrow \\ H^n(X') & \xrightarrow{\mathscr{H}^n(u')} & H^n(Y') & \xrightarrow{\mathscr{H}^n(v')} & H^n(Z') \end{array}$$

Example 3.28 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴并且有导出范畴 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$, 这里 $* \in \{\varnothing, b, -, +\}$. 那么对任何 $\mathcal{A}$ 上复形 X, 根据 [例1.60] 和 [注记1.61], 在 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中有好三角: $X_{\geq n} \longrightarrow X \longrightarrow X_{\leq n-1} \longrightarrow X_{\geq n}[1]$ 和

$$\tau_{\leq n}X \longrightarrow X \longrightarrow \tau_{\geq n+1}X \longrightarrow \tau_{\leq n}X[1].$$

把 X^n 视作集中在 n 次位置的复形, 那么也有自然的复形短正合列

$$0 \longrightarrow X_{\geq n+1} \longrightarrow X_{\geq n} \longrightarrow X^n \longrightarrow 0,$$

因此由 [命题3.26], 这产生 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中的好三角 $X_{\geq n+1} \longrightarrow X_{\geq n} \longrightarrow X^n \longrightarrow X_{\geq n+1}[1]$.

因为 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中对象可自然视作集中在 0 次部分的复形, 进而导出 $\mathcal{A}$ 到 $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ 的标准函子, 这明显是忠实的满 (加性) 函子. 设 $\mathcal{A}$ 有导出范畴 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$, 这里 $* \in \{\varnothing, b, -, +\}$. 那么我们同样可以得到标准函子 $\mathscr{D}_0 : \mathcal{A} \to \mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 将 $\mathcal{A}$ 中每个对象对应到集中在 0 次位置的复形, 对象间的态射 $f : X \to Y$ 也自然视作链映射诱导的右分式等价类 $f1^{-1} : X \to Y$(视作复形间链映射的右分式等价类). 我们有

Proposition 3.29 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴并且有导出范畴 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$, 这里 $* \in \{\varnothing, b, -, +\}$. 那么标准函子 $\mathscr{D}_0 : \mathcal{A} \to \mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 是忠实的满函子. 即 $\mathscr{A}$ 可自然嵌入导出范畴 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$.

Proof. 任取 $X, Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 要证 $\mathscr{D}_0 : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^*(\mathcal{A})}(\mathscr{D}_0(X), \mathscr{D}_0(Y))$ 是双射. 如果态射 $f : X \to Y$ 满足 $\mathscr{D}_0(f) = 0$, 那么 [注记3.22] 说明 f 所诱导的 0 次上同调对象间态射是零态射, 因此 $f = 0$, 这说明 $\mathscr{D}_0$ 是单射. 现在任取导出范畴中的态射 $\alpha = as^{-1} : \mathscr{D}_0(X) \to \mathscr{D}_0(Y)$, 那么可表示为下图:

$$\mathscr{D}_0(X) \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{a} \mathscr{D}_0(Y)$$

现在 $H^0(s) : H^0(Z) \to H^0(\mathscr{D}_0(X)) \cong X$ 是拟同构且 $H^0(a) : H^0(Z) \to H^0(\mathscr{D}_0(Y)) \cong Y$. 记 $v : X \to H^0(\mathscr{D}_0(X))$ 和 $u : H^0(\mathscr{D}_0(Y)) \to Y$. 并记 $\tau_{\leq 0}Z$ 是复形 Z 的左温和截断 (回忆 [定义1.60]), $i : \tau_{\leq 0}Z \to Z$ 是标

准链映射, 则有交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "a"'] & & \tau_{\leq 0}Z \arrow[ll, "i"'] \arrow[rr, "i"] \arrow[d] & & Z \arrow[dr, "s"] & \\
\mathscr{D}_0(Y) & & & H^0(Z) \arrow[dl, "H^0(a)"] \arrow[dr, "H^0(s)"'] & & & \mathscr{D}_0(X) \arrow[dll, "v"] \\
 & & H^0(\mathscr{D}_0(Y)) \arrow[ull, "u"] & & H^0(\mathscr{D}_0(X)) & &
\end{tikzcd}$$

因此我们也得到了下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & \\
\mathscr{D}_0(X) & \tau_{\leq 0}Z \arrow[l, "si"'] \arrow[r, "ai"] \arrow[u, "i"] \arrow[d, "si"'] & \mathscr{D}_0(Y) \\
 & \mathscr{D}_0(X) \arrow[ul, "1"] \arrow[ur, "uH^0(a)H^0(s)^{-1}v"'] &
\end{tikzcd}$$

因为 s 是拟同构, 所以 $H^n(Z) = 0, \forall n \leq -1$. 进而 $si : \tau_{\leq 0}Z \to \mathscr{D}_0(X)$ 也是拟同构. 所以上面的交换图说明 as^{-1} 就是 $\mathcal{A}$ 中态射 $uH^0(a)H^0(s)^{-1}v : X \to Y$ 在 $\mathscr{D}_0$ 下的像. 由此得到 $\mathscr{D}_0$ 是忠实满函子. $\square$

下面的观察由左分式等价性以及右分式等价性的定义容易验证:

Lemma 3.30 ([Zha15]). 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴且有全子范畴 $\mathcal{B}$ 以及 $\mathcal{A}$ 有乘法系 S 满足 $\mathcal{B} \cap S$ 是 $\mathcal{B}$ 的乘法系.
(1) 如果 S 满足对任何 S 中态射 $s : X' \to X$, 只要 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{B}$, 就存在 $X'' \in \mathrm{ob}\mathcal{B}$ 以及态射 $f : X'' \to X'$ 使得 $sf \in S$, 那么 $\mathcal{A}S^{-1}$ 存在蕴含 $\mathcal{B}(S \cap \mathcal{B})^{-1}$ 存在且 $\mathcal{B}(S \cap \mathcal{B})^{-1}$ 到 $\mathcal{A}S^{-1}$ 的标准函子是忠实满函子.
(2) 如果 S 满足对任何 S 中态射 $s : X \to X'$, 只要 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{B}$, 就存在 $X'' \in \mathrm{ob}\mathcal{B}$ 以及 $f : X' \to X''$ 使得 $fs \in S$, 那么 $S^{-1}\mathcal{A}$ 存在蕴含 $(S \cap \mathcal{B})^{-1}\mathcal{B}$ 存在且 $(S \cap \mathcal{B})^{-1}\mathcal{B}$ 到 $S^{-1}\mathcal{A}$ 的标准函子是忠实满函子.

Remark 3.31. 因为当范畴局部化存在时有标准范畴同构 $\mathcal{A}S^{-1} \cong S^{-1}\mathcal{A}$, 所以 (2) 也对右局部化成立.

Remark 3.32. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 这时 $\mathscr{K}^b(\mathcal{A})$ 是 $\mathscr{K}^-(\mathcal{A})$ 的全子范畴. 设 $s : X \to X'$ 是拟同构, 这里 X 是有界复形而 X' 是上有界的. 设 X' 满足 $(X')^k = 0, \forall k \geq \ell + 1$, 并由 X' 在充分小的指标处上同调对象均为零可设 $H^k(X') = 0, \forall k \leq m$. 那么下图中竖直方向的态射族给出 X' 到某个有界复形的拟同构:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & (X')^{m-1} \arrow[r] \arrow[d] & (X')^m \arrow[r] \arrow[d, "\overline{(d')^m}"] & (X')^{m+1} \arrow[r] \arrow[d, "1"] & \cdots \arrow[r] & (X')^{\ell} \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Im}(d')^m \arrow[r] & (X')^{m+1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (X')^{\ell} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

这说明对 $\mathscr{K}^-(\mathcal{A})$ 及其全子范畴 $\mathscr{K}^b(\mathcal{A})$, 拟同构全体构成的乘法系满足 (2). 类似可验证对 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 及其全子范畴 $\mathscr{K}^-(\mathcal{A})$, 拟同构全体构成的乘法系满足 (1). 类似可证 $\mathscr{K}^+(\mathcal{A})$ 及其全子范畴 $\mathscr{K}^b(\mathcal{A})$, 拟同构构成的乘法系满足 (1); $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 及其全子范畴 $\mathscr{K}^+(\mathcal{A})$, 拟同构构成的乘法系满足 (2).

由 [引理3.30] 和 [注记3.32] 我们得到:

Theorem 3.33 ([Zha15]). 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴且满足对 $* \in \{\varnothing, b, -, +\}$ 有 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 存在. 那么 $\mathscr{D}^-(\mathcal{A}), \mathscr{D}^+(\mathcal{A}), \mathscr{D}^b(\mathcal{A})$ 到 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 的标准函子 (这也是三角函子) 是忠实的满函子.

Remark 3.34. 虽然 $\mathscr{D}^-(\mathcal{A}), \mathscr{D}^+(\mathcal{A}), \mathscr{D}^b(\mathcal{A})$ 到 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 的标准函子都是嵌入函子, 但它们在嵌入函子下的像都不能直接成为 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 的三角子范畴, 因为 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中和 $\mathscr{D}^-(\mathcal{A}), \mathscr{D}^+(\mathcal{A}), \mathscr{D}^b(\mathcal{A})$ 中某些复形同构的复形未必在 $\mathscr{D}^-(\mathcal{A}), \mathscr{D}^+(\mathcal{A}), \mathscr{D}^b(\mathcal{A})$ 中. 设 $* \in \{b, -, +\}$, 对 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 关于在到 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 在标准嵌入函子下的像, 如果用同样的记号 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 记所有在 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中与标准函子下的像的复形同构的复形全体, 那么 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 便可视作无界导出范畴 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 的三角子范畴. 以后当要把 $\mathscr{D}^-(\mathcal{A}), \mathscr{D}^+(\mathcal{A}), \mathscr{D}^b(\mathcal{A})$ 视作导出范畴的三角子范畴时, 这三个范畴中的对象未必是上有界/下有界/有界复形, 而是在导出范畴中与上有界/下有界/有界复形同构的复形.

Remark 3.35. 如果 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 满足 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 存在, 那么 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 都存在, 其中 $* \in \{\varnothing, b, -, +\}$.

下面的引理使我们能够把握导出范畴中的态射.

Lemma 3.36 ([Zha15]). 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴且满足 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 存在.
(1) 如果 $\mathcal{A}$ 有足够多的投射对象, P 是上有界投射复形且 Y 是复形, 那么标准同态 $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(P, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(P, Y), f \mapsto f1^{-1}$(注意这里 f 实际上是链映射同伦等价类) 是加群同构. 特别地, 如果 Y 进一步上有界, 则有加群同构 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}^-(\mathcal{A})}(P, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^-(\mathcal{A})}(P, Y), f \mapsto f1^{-1}$.
(2) 如果 $\mathcal{A}$ 有足够多内射对象, I 是下有界内射复形且 X 是复形, 那么 $\xi : \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X, I) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X, I), f \mapsto 1^{-1}f$ 是同构. 特别地, 如果 X 进一步是下有界复形, 则该映射给出加群同构 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}^+(\mathcal{A})}(X, I) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^+(\mathcal{A})}(X, I)$.

Proof. (1) 如果 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中态射 $f : P \to Y$ 满足 $f1^{-1} = 0$, 那么 [注记3.22] 说明存在拟同构 $s : X \to P$ 使得 fs 同伦于零. 对拟同构 s 应用 [推论2.40] 得到存在拟同构 $g : P \to X$ 使得 sg 和 P 上恒等链映射同伦. 因此 $f \sim f1_P \sim fsg \sim 0$, 这说明 η 是单射. 再说明 η 是满射. 任取 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中的态射 $fs^{-1} : P \to Y$, 设对应下图:

$$P \xleftarrow{\ s\ } X \xrightarrow{\ f\ } Y$$

对拟同构 s 应用 [推论2.40] 得到存在拟同构 $g : P \to X$ 使得 sg 和 P 上恒等链映射同伦. 所以 $\eta(fg) = fs^{-1}$. 这就得到 η 是满射. 如果 Y 进一步是上有界复形, 由 [定理3.33] 便得结论.

(2) 类似于 (1), 利用 [推论2.46] 可证 ξ 是同构, 第二个结论来自 [定理3.33]. □

Remark 3.37. 根据 [注记3.6], 如果 A, B 是含幺环, P 是上有界投射左 A-模复形且 Y 是 A-B 双模复形, 那么 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(P, Y)$ 上有自然的右 B-模结构. [注记2.3] 也指出 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(P, Y)$ 上有右 B-模结构, 这时 [引理3.36(1)] 中的加群同构 η 进一步是右 B-模同构. 如果 C 也是含幺环, P 是上有界投射左 $A \otimes_{\mathbb{Z}} C^{op}$-模复形, 那么 [引理3.36(1)] 中的加群同构 η 也是 C-B 双模同构.

Corollary 3.38. 设 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 满足 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 存在且 X 是 $\mathcal{A}$ 上复形.
(1) 当 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象且 P 为 $\mathcal{A}$ 上的上有界投射复形时, 在 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中 $X \cong P$ 的充要条件是存在 (复形层面的) 拟同构 $P \to X$.
(2) 当 $\mathcal{A}$ 有足够多内射对象且 I 为 $\mathcal{A}$ 上的下有界内射复形时, 在 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中 $X \cong I$ 的充要条件是存在 (复形层面的) 拟同构 $X \to I$.

Proof. (1) 只需证明必要性. 设 $\alpha : P \to X$ 是 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中同构. 根据 [引理3.36], 存在链映射 $f : P \to X$ 使得 $\alpha = f1^{-1}$, 于是 α 是同构说明 $f : P \to X$ 是拟同构 ([注记3.23]).

(2) 只需证明必要性. 与 (1) 完全对偶地, 利用 X 到 I 在 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中同构的同构可调整为左分式 $1^{-1}g$, 这里 $g: X \to I$ 是链映射. 再由 $1^{-1}g$ 是同构迫使 $g: X \to I$ 是拟同构. $\square$

Remark 3.39. 因此在导出范畴的语言下, [定义1.194] 中的完全复形就是指在导出范畴中同构于某个有界且每项是有限生成投射模的复形. 完全模就是将该模视作集中在 0 次位置的复形后在导出范畴内同构于某个有界且每项是有限生成投射模的复形.

现在我们使用 [引理3.36] 将单边有界导出范畴实现为同伦范畴.

Theorem 3.40 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴满足导出范畴 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 存在, $\mathscr{K}^-(\mathcal{P})$ 是所有上有界投射复形构成的同伦范畴的全子范畴; $\mathscr{K}^+(\mathcal{I})$ 是所有下有界内射复形构成的全子范畴.
(1) 如果 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象, 那么 $\mathscr{K}^-(\mathcal{P})$ 到 $\mathscr{D}^-(\mathcal{A})$ 的标准函子给出三角等价 $\mathscr{K}^-(\mathcal{P}) \cong \mathscr{D}^-(\mathcal{A})$, $\mathscr{K}^{-,b}(\mathcal{P})$ 到 $\mathscr{D}^b(\mathcal{A})$ 的标准函子给出三角等价 $\mathscr{K}^{-,b}(\mathcal{P}) \cong \mathscr{D}^b(\mathcal{A})$. 若 $\mathcal{A}$ 中任何对象的投射维数有限, 则 $\mathscr{K}^b(\mathcal{P}) \cong \mathscr{D}^b(\mathcal{A})$.
(2) 如果 $\mathcal{A}$ 有足够多内射对象, 那么 $\mathscr{K}^+(\mathcal{I})$ 到 $\mathscr{D}^+(\mathcal{A})$ 的标准函子给出三角等价 $\mathscr{K}^+(\mathcal{I}) \cong \mathscr{D}^+(\mathcal{A})$, $\mathscr{K}^{+,b}(\mathcal{I})$ 到 $\mathscr{D}^b(\mathcal{A})$ 的标准函子给出三角等价 $\mathscr{K}^{+,b}(\mathcal{I}) \cong \mathscr{D}^b(\mathcal{A})$. 若 $\mathcal{A}$ 中任何对象的内射维数有限, 则 $\mathscr{K}^b(\mathcal{I}) \cong \mathscr{D}^b(\mathcal{A})$.

注意这里 $\mathscr{D}^b(\mathcal{A})$ 被视作 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 的三角子范畴 (复形未必是有界复形).

Proof. (1) 现在 $\mathscr{K}^-(\mathcal{P})$ 到 $\mathscr{D}^-(\mathcal{A})$ 的标准函子是忠实满的来自 [引理3.36], 标准函子的本质满性来自投射分解存在性 (回忆 [定理2.35]). 该标准函子作为三角函子的合成依然是三角函子. 要看到 $\mathscr{K}^{-,b}(\mathcal{P}) \cong \mathscr{D}^b(\mathcal{A})$ 只需注意到从 [注记3.32] 的讨论可知 $\mathscr{K}^{-,b}(\mathcal{P})$ 中的复形在 $\mathscr{D}^-(\mathcal{A})$ 中都同构于某个有界复形. 如果 $\mathcal{A}$ 的所有对象投射维数有限, 依然应用 [定理2.35] 便得到 $\mathscr{K}^b(\mathcal{P}) \cong \mathscr{D}^b(\mathcal{A})$.

(2) 与 (1) 的证明是完全对偶的, 利用 [引理3.40] 和 [定理2.43] 立即得到. $\square$

导出范畴的一个优势是可以将通常 Ext 群实现为导出范畴中的 Hom 集, 这简化了同调代数.

Theorem 3.41 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴具有足够多投射对象或具有足够多内射对象, 满足导出范畴 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 存在. 那么对任何 $X, Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 有加群同构 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathcal{A})}(X, Y[n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X, Y[n])$.

Proof. 如果 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象, 取 X 的投射分解 $\cdots \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$, 给出拟同构

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & P^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

应用 [引理3.36] 知 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathcal{A})}(X, Y[n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^-(\mathcal{A})}(X, Y[n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^-(\mathcal{A})}(P, Y[n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}^-(\mathcal{A})}(P, Y[n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(P, Y[n])$. 由 [命题2.1] 知 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(P, Y[n])$ 就是 Hom 复形 $\mathrm{Hom}(P, Y)$ 的 n 次上同调 (回忆 [例1.47]). 因为 Y 是集中在 0 次位置的复形, 所以直接计算知 $H^n(\mathrm{Hom}(P,Y)) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

如果 $\mathcal{A}$ 有足够多内射对象, 取 Y 的内射分解 (相应内射复形记作 I), 则有

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(\mathcal{A})}(X, Y[n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X, I[n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X, I[n]) \cong H^n(\mathrm{Hom}(X, I)) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y).$$

$\square$

Remark 3.42. 因此对一般的 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, $X, Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 可用 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X, Y[n])$ 定义 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

Remark 3.43. 设 A, B 是含幺环, X 是左 A-模且 Y 是 A-B 双模, 这时 $\mathrm{Ext}_A^n(X,Y)$ 上有自然的右 B-模结构. 结合 [注记3.37] 和 [注记2.3] 以及 [定理3.41] 的证明过程可知作为右 B-模有同构 $H^n(\mathrm{Hom}(P,Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^b(A\text{-}\mathbf{Mod})}(X, Y[n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})}(X, Y[n])$. 再由 Y 集中在 0 次位置可看出同构 $H^n(\mathrm{Hom}(P,Y)) \cong \mathrm{Ext}_A^n(X,Y)$ 也是右 B-模同构. 因此当 X 是左 A-模且 Y 是 A-B 双模时, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})}(X, Y[n])$ 不仅有自然的右 B-模结构, 作为右 B-模也有同构 $\mathrm{Ext}_A^n(X,Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})}(X, Y[n])$.

Remark 3.44. 如果 A 是域 $\Bbbk$ 上代数, X 是 A-A 双模且 Y 是 A-A 双模, 那么 $\mathrm{Ext}_A^n(X,Y)$ 可视作 A-A 双模, 类似 [注记3.43] 我们有 A-A 双模同构 $\mathrm{Ext}_A^n(X,Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})}(X, Y[n])$. 注意, 任何内射左 A^e-模也是内射右 A^e-模, 并且作为左 A-模和右 A-模都是内射的. 更一般地, 如果有含幺环同态 $R \to T$ 满足 T 是平坦左/右 R-模, 那么任何内射右/左 T-模作为右/左 R-模依然是内射的.

Example 3.45 (上同调集中在一个位置的复形拟同构于集中在一个位置的复形)**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, (X, d) 是 $\mathcal{A}$ 上复形并且有整数 n 满足 $H^k(X) = 0, \forall k \neq n$. 记 $U = H^n(X)$, 那么在 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中有同构 $U[-n] \cong X$.

Proof. 考察下述链映射, 由于 X 只有 n 次上同调可能非零, 所以下述链映射也是拟同构:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}|"] \arrow[d, "1_{X^{n-1}}"'] & \mathrm{Ker}d^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r] & X^n \arrow[r] & X^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

所以在 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中 X 与上图中上行复形 (是上有界的) 同构. 下图也给出复形间拟同构:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}|"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}d^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & U = \mathrm{Ker}d^n/\mathrm{Im}d^{n-1} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

所以在导出范畴 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中有同构 $U[-n] \cong X$. □

类似地, 使用复形的左、右温和截断 ([定义1.60]) 技术容易证明:

Example 3.46. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴满足 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 存在. 那么 $X^\bullet \in \mathrm{ob}\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 在 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中同构于某个有界复形的充要条件是存在正整数 n 使得 $H^t(X) = 0, \forall |t| \geq n$.

在 [注记3.23] 中指出完全复形就是在导出范畴中同构于某个有界且每项是有限生成投射模的复形的复形.

Definition 3.47 (伪凝聚复形, [Sta24])**.** 设 R 是含幺环, X 是左 R-模复形. 如果 X 和某个上有界且每项是有限生成自由模的左 R-模复形在 $\mathscr{D}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ 中同构, 则称 X 是**伪凝聚复形**.

Remark 3.48. 根据 [注记1.191], X 是伪凝聚复形的充要条件是 X 和某个上有界且每项是有限生成投射模的左 R-模复形在 $\mathscr{D}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ 中同构. 因此完全复形是特殊的伪凝聚复形.

Proposition 3.49 ([Sta24])**.** 设 M 是左 R-模, 那么 M 作为集中在 0 次部分的复形是伪凝聚复形当且仅当 M 是伪凝聚模.

Proof. 充分性由 [命题1.190] 直接得到. 必要性: 根据 [推论3.38], 这时存在上有界且每项是有限生成自由 R-模的复形 P 到 M 有拟同构. 于是使用 [命题1.195] 完全相同的讨论可知 M 作为 R-模存在有限生成自由分解. □

3.4 导出函子

如果 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的加性函子, 它可自然诱导复形范畴 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 到 $\mathscr{C}(\mathcal{B})$ 的加性函子以及同伦范畴 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 到 $\mathscr{K}(\mathcal{B})$ 的加性函子 (因为 F 保持链同伦关系). 因此人们自然希望 F 也能够诱导导出范畴层面的函子. 因为一般的加性函子 F 未必保持拟同构, 所以我们无法期待 F 总能诱导 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 到 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 的函子.

Definition 3.50 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴, $*\in\{\varnothing,b,-,+\}$, 且 $\mathscr{D}(\mathcal{A}),\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 都存在. 设 $F:\mathscr{K}^*(\mathcal{A})\to\mathscr{K}(\mathcal{B})$ 是三角函子. 记 $\lambda^*:\mathscr{K}^*(\mathcal{A})\to\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 和 $\lambda_{\mathcal{B}}:\mathscr{K}(\mathcal{B})\to\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 是局部化函子. 如果有三角函子 $RF:\mathscr{D}^*(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 和 $\lambda_{\mathcal{B}}F:\mathscr{K}^*(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 到 $(RF)\lambda^*:\mathscr{K}^*(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 的自然变换 $\xi:\lambda_{\mathcal{B}}F\to(RF)\lambda^*$ 使得 (RF,ξ) 具有如下泛性质: 对任何三角函子 $G:\mathscr{D}^*(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 和自然变换 $\zeta:\lambda_{\mathcal{B}}F\to G\lambda^*$, 存在唯一的自然变换 $\eta:RF\to G$ 使得对任何 $X\in\mathrm{ob}\mathscr{K}^*(\mathcal{A})$ 有下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\lambda_{\mathcal{B}}F(X) \arrow[rr, "\xi_X"] \arrow[dr, "\zeta_X"'] & & (RF)\lambda^*(X) \arrow[dl, dashed, "\eta_{\lambda^*(X)}"] \\
& G\lambda^*(X) &
\end{tikzcd}$$

则称二元组 (RF,ξ) 是三角函子 $F:\mathscr{K}^*(\mathcal{A})\to\mathscr{K}(\mathcal{B})$ 的**右导出函子** (逆变三角函子的右导出函子也是完全类似的, 区别是这里的 F 和 RF 都要求是逆变三角函子).

对三角函子 $F:\mathscr{K}^*(\mathcal{A})\to\mathscr{K}(\mathcal{B})$, 如果有三角函子 $LF:\mathscr{D}^*(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 和自然变换 $\xi:(LF)\lambda^*\to\lambda_{\mathcal{B}}F$ 具有如下泛性质: 对任何三角函子 $G:\mathscr{D}^*(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 和自然变换 $\zeta:G\lambda^*\to\lambda_{\mathcal{B}}F$ 有唯一的自然变换 $\eta:G\to LF$ 使得对任何 $X\in\mathrm{ob}\mathscr{K}^*(\mathcal{A})$ 有下图交换:

$$\begin{tikzcd}
(LF)\lambda^*(X) \arrow[rr, "\xi_X"] & & \lambda_{B}F(X) \\
& G\lambda^*(X) \arrow[ul, dashed, "\eta_{\lambda^*(X)}"] \arrow[ur, "\zeta_X"'] &
\end{tikzcd}$$

当 $*=+,-,b$ 时, 相应的导出函子 RF,LF 记作 R^+F,R^-F,R^bF 以及 L^+F,L^-F,L^bF.

Remark 3.51. 根据导出函子的泛性质定义, 导出函子一旦存在则在自然同构意义下唯一. 自然同构的三角函子其中一个三角函子有导出函子便能得到另一个三角函子也有导出函子, 并且它们的导出函子也是自然同构的.

设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴, 那么 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的加性函子总可诱导三角函子 $F:\mathscr{K}(\mathcal{A})\to\mathscr{K}(\mathcal{B})$(可直接验证这把 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 中映射锥映至 $\mathscr{K}(\mathcal{B})$ 中映射锥). 所以如果 F 把 $\mathcal{A}$ 上复形间拟同构映至 $\mathcal{B}$ 上复形间拟同构, 应用 [定理3.17] 可知存在唯一的三角函子 $\hat{F}:\mathscr{D}(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\lambda_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "F"'] & \mathscr{D}(\mathcal{A}) \arrow[d, dashed, "\hat{F}"] \\
\mathscr{K}(\mathcal{B}) \arrow[r, "\lambda_{\mathcal{B}}"] & \mathscr{D}(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

这时, 取 [定义3.50] 中 RF 为 $\hat{F}$ 且自然变换 $\xi:\lambda_{\mathcal{B}}F\to\hat{F}\lambda_{\mathcal{A}}$ 为恒等自然同构, 那么 (RF,ξ) 就是三角函子 $F:\mathscr{K}(\mathcal{A})\to\mathscr{K}(\mathcal{B})$ 的左导出函子也是右导出函子 (这里只需要 F 把拟同构映至拟同构即可).

但一般地, F 未必能保持复形间拟同构. 对于有足够多内射/投射对象的 Abel 范畴, 我们有

Theorem 3.52 (导出函子存在性定理, [Wei94]). 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴满足导出范畴 $\mathscr{D}(\mathcal{A}),\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 存在, $F:\mathscr{K}^*(\mathcal{A})\to\mathscr{K}(\mathcal{B})$ 是三角函子.
(1) 如果 $\mathcal{A}$ 有足够多的内射对象, 那么对 $*=+$, $F:\mathscr{K}^+(\mathcal{A})\to\mathscr{K}(\mathcal{B})$ 的右导出函子 R^+F 在 $\mathscr{D}^+(\mathcal{A})$ 上存在. 并且对任何下有界内射复形 I 有 $R^+F\lambda^+(I)\cong\lambda_{\mathcal{B}}F(I)$($\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 中的同构).
(2) 如果 $\mathcal{A}$ 有足够多的投射对象, 那么对 $*=-$, $F:\mathscr{K}^-(\mathcal{A})\to\mathscr{K}(\mathcal{B})$ 的左导出函子 L^-F 在 $\mathscr{D}^-(\mathcal{A})$ 上存在. 并且对任何上有界投射复形 P 有 $L^-F\lambda^-(P)\cong\lambda_{\mathcal{B}}F(P)$.

Proof. 虽然在 [定义2.26] 指出三角范畴间三角等价的拟逆函子依然是三角函子, 但 [定理3.40] 中具体的三角等价的拟逆函子依然是三角函子是明显的. 在 [定理3.40] 条件下将标准函子 $\mathscr{K}^-(\mathcal{P})\to\mathscr{D}^-(\mathcal{A})$ 记作 T^-, $\mathscr{K}^+(\mathcal{I})\to\mathscr{D}^+(\mathcal{A})$ 记作 T^+. [定理3.40] 说明 T^- 和 T^+ 都是三角等价. 取定 T^- 的拟逆 $U^-:\mathscr{D}^-(\mathcal{A})\to\mathscr{K}^-(\mathcal{P})$ 和 T^+ 的拟逆 $U^+:\mathscr{D}^+(\mathcal{A})\to\mathscr{K}^+(\mathcal{I})$, 那么 U^- 和 U^+ 都是三角等价.

(1) 设 $\mathcal{A}$ 有足够多内射对象, 那么依 [定理3.40] 现在有三角等价 $U^+:\mathscr{D}^+(\mathcal{A})\cong\mathscr{K}^+(\mathcal{I})$. 置 $R^+F:\mathscr{D}^+(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 是下述三角函子序列的合成 (注意 R^+F 事实上像取值在 $\mathscr{D}^+(\mathcal{B})$ 中):

$$\mathscr{D}^+(\mathcal{A})\xrightarrow{U^+}\mathscr{K}^+(\mathcal{I})\xrightarrow{F}\mathscr{K}(\mathcal{B})\xrightarrow{\lambda_{\mathcal{B}}}\mathscr{D}(\mathcal{B})$$

任取 $X\in\mathrm{ob}\mathscr{K}^+(\mathcal{A}), U^+\lambda^+X\in\mathrm{ob}\mathscr{K}^+(\mathcal{I})$. 所以从 [引理3.36] 得到标准同构 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^+(\mathcal{A})}(\lambda^+X,T^+U^+\lambda^+X)\cong\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}^+(\mathcal{A})}(X,U^+\lambda^+X)$. 记自然同构 $\eta:1_{\mathscr{D}^+(\mathcal{A})}\to T^+U^+$. 为构造 $\lambda_{\mathfrak{B}}F$ 到 $(R^+F)\lambda^+$ 的自然变换 ξ, 对每个 $X\in\mathrm{ob}\mathscr{K}^+(\mathcal{A})$, 有同构 $\eta_{\lambda^+X}:\lambda^+X\to T^+U^+X$. 记 $f_X:X\to U^+\lambda^+X$ 是 η_{λ^+X} 在 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^+(\mathcal{A})}(\lambda^+X,T^+U^+\lambda^+X)\cong\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}^+(\mathcal{A})}(X,U^+\lambda^+X)$ 下的像. 于是 $F(f_X):FX\to FU^+\lambda^+X$. 命 $\xi_X=\lambda_{\mathfrak{B}}F(f_X):\lambda_{\mathcal{B}}FX\to\lambda_{\mathcal{B}}FU^+\lambda^+X=(R^+F)\lambda^+X$ 利用 η 的自然性可直接验证对任何 $\mathrm{ob}\mathscr{K}^+(\mathcal{A})$ 中的态射 $h:X\to Y$ 有 $U^+\lambda^+(h)f_X=f_Yh$, 由此得到 ξ 满足对任何态射 $h:X\to Y$ 有下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
\lambda_{\mathcal{B}}FX \arrow[r, "\xi_X"] \arrow[d, "\lambda_{\mathcal{B}}F(h)"'] & (R^+F)\lambda^+X \arrow[d, "(R^+F)\lambda^+(h)"] \\
\lambda_{\mathcal{B}}FY \arrow[r, "\xi_Y"] & (R^+F)\lambda^+Y
\end{tikzcd}$$

因此 $\xi:\lambda_{\mathcal{B}}F\to(R^+F)\lambda^+$ 是自然变换.

现在任给三角函子 $G:\mathscr{D}^+(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 和自然变换 $\zeta:\lambda_{\mathcal{B}}F\to G\lambda^+$, 我们需要说明有唯一的自然变换 $\theta:R^+F\to G$ 使得任何 $X\in\mathrm{ob}\mathscr{K}^+(\mathcal{A})$ 有下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\lambda_{\mathcal{B}}F(X) \arrow[rr, "\xi_X"] \arrow[dr, "\zeta_X"'] & & (R^+F)\lambda^+(X) \arrow[dl, dashed, "\theta_{\lambda^+(X)}"] \\
& G\lambda^+(X) &
\end{tikzcd}$$

根据 f_X 的构造, $\lambda^+(f_X)=\eta_{\lambda^+X}$ 是导出范畴中的同构, 所以 [注记3.22] 说明我们可以设 η_{λ^+X} 为

$$X\xrightarrow{s}Z\xleftarrow{t}T^+U^+X$$

这里 s,t 都是拟同构且 Z 是内射复形 (利用内射分解的存在性), 因此 [推论2.46] 表明 t 在 F 作用下依然是拟同构, 从而 $\lambda_{\mathcal{B}}F(t)$ 和 $G\lambda^+(t)$ 都是 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 中的同构 (这里再指出 [推论2.47] 说明当 X 是下有界内射复形时,

$\lambda_{\mathcal{B}}F(s)$ 会是同构, 进而 ζ_X 对任何下有界的内射复形 X 是同构, 于是知对任何下有界内射复形 I, 会有导出范畴中的同构 $\lambda_{\mathcal{B}}F(I) \cong (R^+F)\lambda^+(I))$. 那么由 ζ 是自然变换立即得到下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
\lambda_{\mathcal{B}}F(X) \arrow[r, "\zeta_X"] \arrow[d, "\lambda_{\mathcal{B}}F(s)"'] & G\lambda^+(X) \arrow[d, "G\lambda^+(s)"] \\
\lambda_{\mathcal{B}}F(Z) \arrow[r, "\zeta_Z"] & G\lambda^+(Z) \\
\lambda_{\mathcal{B}}F(T^+U^+X) \arrow[r, "\zeta_{T^+U^+X}"] \arrow[u, "\lambda_{\mathcal{B}}F(t)"] & G\lambda^+(T^+U^+X) \arrow[u, "G\lambda^+(t)"']
\end{tikzcd}$$

根据 ξ_X 的定义, 有 $\lambda_{\mathcal{B}}F(t)^{-1}\lambda_{\mathcal{B}}F(s) = \xi_X$. 根据 s,t 的定义也有 $G\lambda^+(t)[G\lambda^+(s)]^{-1} = G(\eta_{\lambda^+X})$. 故上图即

$$\begin{tikzcd}
\lambda_{\mathcal{B}}F(X) \arrow[r, "\zeta_X"] \arrow[d, "\xi_X"'] & G\lambda^+(X) \arrow[d, "G(\eta_{\lambda^+X})"] \\
(R^+F)\lambda^+(X) \arrow[r, "\zeta_{T^+U^+X}"] & G\lambda^+(T^+U^+X)
\end{tikzcd}$$

所以如果定义 $\theta_{\lambda^+X} = G(\eta_{\lambda^+X})^{-1}\zeta_{T^+U^+X} : (R^+F)\lambda^+(X) = \lambda_{\mathcal{B}}F(T^+U^+X) \to G\lambda^+(X)$, 便有下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
\lambda_{\mathcal{B}}F(X) \arrow[rr, "\xi_X"] \arrow[dr, "\zeta_X"'] & & (R^+F)\lambda^+(X) \arrow[dl, "\theta_{\lambda^+(X)}"] \\
& G\lambda^+(X) &
\end{tikzcd}$$

前面已经指出 X 是下有界内射分解时 ξ_X 是同构, 所以利用任何下有界复形 X 拟同构于某个下有界内射复形 I, 考察拟同构 $X \to I$ 可得满足条件的自然变换 θ 在 $\lambda^+(X)$ 上的取值唯一, 于是可知满足条件的自然变换 θ 一定唯一. 于是知要完成证明需要得到 θ 的存在性 (即验证前面构造的自然性). 根据左分式的表达, 我们只需要验证对任何 $\mathscr{K}^+(\mathcal{A})$ 中的态射 $\varphi : X_1 \to X_2$ 有

$$\begin{tikzcd}
(R^+F)\lambda^+X_1 \arrow[r, "(R^+F)\lambda^+(\varphi)"] \arrow[d, "\theta_{\lambda^+X_1}"'] & (R^+F)\lambda^+X_2 \arrow[d, "\theta_{\lambda^+X_2}"] \\
G\lambda^+X_1 \arrow[r, "G\lambda^+(\varphi)"] & G\lambda^+X_2
\end{tikzcd}$$

交换. 记 $Y_i = T^+U^+X_i$. 那么根据 θ 的定义我们需要验证下图的交换性:

$$\begin{tikzcd}
(R^+F)\lambda^+X_1 \arrow[r, "(R^+F)\lambda^+(\varphi)"] \arrow[d, "\zeta_{Y_1}"'] & (R^+F)\lambda^+X_2 \arrow[d, "\zeta_{Y_2}"] \\
G\lambda^+Y_1 \arrow[d, "G(\eta_{\lambda^+X_1})^{-1}"'] & G\lambda^+Y_2 \arrow[d, "G(\eta_{\lambda^+X_2})^{-1}"] \\
G\lambda^+X_1 \arrow[r, "G\lambda^+(\varphi)"] & G\lambda^+X_2
\end{tikzcd}$$

首先根据 η 的自然性, 我们有交换图:

$$\begin{array}{ccc} G\lambda^+Y_1 & \xrightarrow{GT^+U^+\lambda^+(\varphi)} & G\lambda^+Y_2 \\ {\scriptstyle G(\eta_{\lambda^+X_1})^{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(\eta_{\lambda^+X_2})^{-1}} \\ G\lambda^+X_1 & \xrightarrow{G\lambda^+(\varphi)} & G\lambda^+X_2 \end{array}$$

所以只需要验证下图交换:

$$\begin{array}{ccc} (R^+F)\lambda^+X_1 & \xrightarrow{(R^+F)\lambda^+(\varphi)} & (R^+F)\lambda^+X_2 \\ {\scriptstyle \zeta_{Y_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \zeta_{Y_2}} \\ G\lambda^+Y_1 & \xrightarrow{GT^+U^+\lambda^+(\varphi)} & G\lambda^+Y_2 \end{array}$$

设 $T^+U^+\lambda^+(\varphi):Y_1\to Y_2$ 可表示为 $Y_1 \xrightarrow{f} W \xleftarrow{g} Y_2$, 其中 g 是拟同构. 根据内射分解存在性可设这里的 W 是下有界的内射复形, 并且同样由 [推论2.46] 保证 $F(g)$ 是拟同构. 事实上, 这时 $RF^+\lambda^+(\varphi)$ 可左分式表达为 $FY_1 \xrightarrow{F(f)} FW \xleftarrow{F(g)} FY_2$. 在 $\mathscr{K}^+(\mathcal{I})$ 中表达出 $U^+\lambda^+(\varphi)$ 后可直接验证 $T^+U^+\lambda^+(\varphi)=U^+\lambda^+(\varphi)$. 所以在 $\mathscr{K}^+(\mathcal{I})$ 中可将 $U^+\lambda^+(\varphi)$ 也表示为 $Y_1 \xrightarrow{f} W \xleftarrow{g} Y_2$. 所以由 R^+F 的定义立即得到 $RF^+\lambda^+(\varphi)$ 有左分式表达 $FY_1 \xrightarrow{F(f)} FW \xleftarrow{F(g)} FY_2$. 于是 $\zeta_{Y_2}(R^+F)\lambda^+(\varphi)=\zeta_{Y_2}\lambda_{\mathcal{B}}(F(g))^{-1}\lambda_{\mathcal{B}}(F(f))$. 因为 ζ 是从 $\lambda_{\mathcal{B}}F$ 到 $G\lambda^+$ 的自然变换, 所以 $\zeta_{Y_2}\lambda_{\mathcal{B}}(F(g))^{-1}=(G\lambda^+(g))^{-1}\zeta_W$. 进而

$$\zeta_{Y_2}(R^+F)\lambda^+(\varphi)=(G\lambda^+(g))^{-1}\zeta_W\lambda_{\mathcal{B}}F(f)=(G\lambda^+(g))^{-1}G\lambda^+(f)\zeta_{Y_1}=G((\lambda^+g)^{-1}(\lambda^+f))\zeta_{Y_1}=GT^+U^+\lambda^+(\varphi).$$

由此得到 θ 是自然变换, 得到 (1). (2) 的证明完全对偶, 将前面关于下有界内射复形的讨论转化成上有界投射复形的讨论可得 $F:\mathscr{K}^-(\mathcal{A})\to\mathscr{K}(\mathcal{B})$ 的左导出函子存在性. $\square$

Remark 3.53. 在定理证明中构造出的 (三角函子间的) 自然变换 $\xi:\lambda_{\mathcal{B}}F\to(R^+F)\lambda^+$ 和导出范畴上的平移函子相容: 具体地, 如果记给定三角函子 $F:\mathscr{K}^+(\mathcal{A})\to\mathscr{K}(\mathcal{B})$ 所带有的自然同构是 $\varphi:F[1]\cong\widetilde{[1]}F$, 其中 $\widetilde{[1]}$ 表示 $\mathscr{K}(\mathcal{B})$ 上的平移函子. 记 $\psi:U^+[1]\cong\widetilde{[1]}U^+$ 是三角函子 U^+ 带有的自然同构. 那么 R^+F 带有的自然同构 Θ 如下表示: 对任何 $X\in\mathrm{ob}\mathscr{D}^+(\mathcal{A})$, 对应 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 中同构 $\Theta_X=\varphi_{U^+X}F(\psi_X):R^+F(X[1])\to(R^+FX)\widetilde{[1]}$. λ_BF 带有的自然同构由 φ 诱导. 那么这里的相容表示对任何 $X\in\mathrm{ob}\mathscr{D}^+(\mathcal{A})$, 有下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \lambda_{\mathcal{B}}F(X[1]) & \xrightarrow{\xi_{X[1]}} & R^+F(X[1]) \\ {\scriptstyle \lambda_{\mathcal{B}}(\varphi_X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Theta_X} \\ (\lambda_{\mathcal{B}}FX)\widetilde{[1]} & \xrightarrow{\xi_X\widetilde{[1]}} & (R^+FX)\widetilde{[1]} \end{array}$$

根据自然变换 ξ 的构造, 证明过程中构造的 $f_X:X\to U^+X$ 满足下面的交换图:

$$\begin{array}{ccc} X[1] & \xrightarrow{f_{X[1]}} & U^+(X[1]) \\ {\scriptstyle 1_{X[1]}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_X} \\ X[1] & \xrightarrow{f_X[1]} & (U^+X)\widetilde{[1]} \end{array}$$

其中 ψ_X 是三角函子 U^+ 带上的自然同构在 X 处取值. 现在

$$\xi_X\widetilde{[1]}\lambda_{\mathcal{B}}(\varphi_X)=F(f_X)\widetilde{[1]}\varphi_X$$

$$
\begin{aligned}
&=\varphi_{U^+X}F(f_X[1])\\
&=\varphi_{U^+X}F(\psi_X f_{X[1]})\\
&=\Theta_X F(f_{X[1]})\\
&=\Theta_X \xi_{X[1]}.
\end{aligned}
$$

Example 3.54 ([Wei94, Zha15])**.** 回忆 [例1.47] 中的 Hom 复形构造: 设 X,Y 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的复形, 则有复形 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)$, 并且该构造诱导同伦范畴间的加性函子 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,-):\mathscr{K}(\mathcal{A})\to\mathscr{K}(\mathbf{Ab})$ 以及逆变加性函子 $\mathrm{Hom}^\bullet(-,X):\mathscr{K}(\mathcal{A})\to\mathscr{K}(\mathbf{Ab})$. 可直接验证 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y[1])=\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)[1]$($\mathrm{Hom}^\bullet(X[-1],Y)$ 的微分与 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y[1])$ 的微分相差一个负号; $\mathrm{Hom}^\bullet(X[1],Y)$ 的微分也和 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)[-1]$ 的微分差个负号). 并且任给复形间链映射 $f:Y\to Y'$, 我们有

$$
\mathrm{Hom}^n(X,\mathrm{Con}(f))=\prod_{p\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^p,Y^{p+n+1}\oplus(Y')^n),\mathrm{Con}^n(\mathrm{Hom}(X,f))=\mathrm{Hom}^{n+1}(X,Y)\oplus\mathrm{Hom}^n(X,Y'),
$$

利用积的标准态射, 可以验证 $\mathrm{Hom}^n(X,\mathrm{Con}(f))$ 到 $\mathrm{Con}^n(\mathrm{Hom}(X,f))$ 的标准同态族是链同构, 即有复形同构 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,\mathrm{Con}(f))\cong\mathrm{Con}^\bullet(\mathrm{Hom}(X,f))$. 并且我们能够得到下述链映射交换图:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}^\bullet(X,f)} & \mathrm{Hom}^\bullet(X,Y') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^n(X,\mathrm{Con}(f)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^\bullet(X,Y[1])\\
{\scriptstyle 1}\downarrow & & {\scriptstyle 1}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1}\\
\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}^\bullet(X,f)} & \mathrm{Hom}^\bullet(X,Y') & \longrightarrow & \mathrm{Con}^\bullet(\mathrm{Hom}(X,f)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)[1]
\end{array}
$$

所以加性函子 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,-):\mathscr{K}(\mathcal{A})\to\mathscr{K}(\mathbf{Ab})$ 也是三角函子. 对偶地可知逆变加性函子 $\mathrm{Hom}^\bullet(-,X):\mathscr{K}(\mathcal{A})\to\mathscr{K}(\mathbf{Ab})$ 也是三角函子. 特别地, 也有三角函子 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,-):\mathscr{K}^+(\mathcal{A})\to\mathscr{K}(\mathbf{Ab})$.

Remark 3.55. 从 [注记1.48] 知对左 A-模复形 X 和 A-B 双模复形 Y, $\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)$ 是右 B-模复形, 并且这时 $\mathrm{Hom}^\bullet(-,Y)$ 可视作 $\mathscr{K}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ 到 $\mathscr{K}(\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 的逆变三角函子 ([注记2.27]). 注意这时 $\mathrm{Hom}^\bullet(X[1],Y)$ 和 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)[-1]$ 的微分相差一个负号, 所以如果定义 $\varepsilon_X=\{(-1)^n:\mathrm{Hom}^n(X[1],Y)\to\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)[-1]^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, ε_X 给出复形链同构 $\mathrm{Hom}^\bullet(X[1],Y)\cong\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)[-1]$. 并且 ε 给出自然同构 $[-1]\mathrm{Hom}^\bullet(-,Y)\cong\mathrm{Hom}^\bullet(-,Y)\cdot[1]$, 右边范畴自同构 $[1]$ 和 $\mathrm{Hom}^\bullet(-,Y)$ 的合成. 因为有复形链同构 $\mathrm{Hom}^\bullet(X[1],Y)\cong\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)[-1]$, 所以对任何整数 n, 有复形链同构 $\mathrm{Hom}^\bullet(X[n],Y)\cong\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)[-n]$.

Definition 3.56 (RHom 复形, [Wei94])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的 Abel 范畴, 固定 $\mathcal{A}$ 上复形 X. 对三角函子 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,-):\mathscr{K}^+(\mathcal{A})\to\mathscr{K}(\mathbf{Ab})$ 应用 [定理3.52] 得到右导出函子 $R^+\mathrm{Hom}^\bullet(X,-):\mathscr{D}^+(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathbf{Ab})$. 对任何 $Y\in\mathrm{ob}\mathscr{D}^+(\mathcal{A})$, 记 $R^+\mathrm{Hom}^\bullet(X,-)(Y)$ 为 $\mathrm{RHom}^\bullet(X,Y)\in\mathscr{D}(\mathbf{Ab})$, 简称为 **RHom 复形**.

在导出范畴中处理复形同调具有相当高的灵活性, 因为复形在导出范畴中同构便具有同构的上同调对象.

Lemma 3.57 ([Wei94])**.** 设 $\mathcal{A}$ 有足够多内射对象, X,X' 是 $\mathcal{A}$ 上复形且 $Y\in\mathrm{ob}\mathscr{D}^+(\mathcal{A})$. 如果 X 和 X' 间有拟同构, 那么在 $\mathscr{D}(\mathbf{Ab})$ 中有 $\mathrm{RHom}^\bullet(X,Y)\cong\mathrm{RHom}^\bullet(X',Y)$.

Proof. 因为 $\mathcal{A}$ 有足够多内射对象, 所以存在下有界内射复形 I 和拟同构 $s:X\to I$(回忆 [定理2.43]). 进而在 $\mathscr{D}(\mathbf{Ab})$ 中有 $\mathrm{RHom}^\bullet(X,Y)\cong\mathrm{RHom}^\bullet(X,I)$ 以及 $\mathrm{RHom}^\bullet(X',Y)\cong\mathrm{RHom}^\bullet(X',I)$. 应用 [定理3.52], 有

$\mathrm{RHom}^\bullet(X,I)\cong\lambda_{\mathbf{Ab}}\mathrm{Hom}^\bullet(X,I)$. 设 X 和 X' 间有拟同构 $t:X\to X'$, 我们说明 $\mathrm{Hom}^\bullet(t,I):\mathrm{Hom}^\bullet(X',I)\to\mathrm{Hom}^\bullet(X,I)$ 是拟同构, 根据 [例3.54] 的逆变情形可知一旦证明 $\mathrm{Hom}^\bullet(-,I)$ 把正合复形映至正合复形便能够得到 $\mathrm{Hom}^\bullet(-,I)$ 保持拟同构 (利用映射锥导出的好三角以及 [注记2.34]), 从而 $\lambda_{\mathbf{Ab}}(\mathrm{Hom}^\bullet(t,I))$ 给出同构 $\lambda_{\mathbf{Ab}}\mathrm{Hom}^\bullet(X',I)\cong\lambda_{\mathbf{Ab}}\mathrm{Hom}^\bullet(X,I)$, 这保证了 $\mathrm{RHom}^\bullet(X,Y)\cong\mathrm{RHom}^\bullet(X',Y)$. 因此我们只需说明任何正合复形 Z 满足 $\mathrm{Hom}^\bullet(Z,I)$ 也正合, 而这从 [命题2.1] 和 [命题2.44] 立即得到. □

Remark 3.58. 对偶地, 我们也能够在 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象的前提下, 考虑逆变三角函子 $\mathrm{Hom}^\bullet(-,X):\mathscr{K}^-(\mathcal{A})\to\mathscr{K}(\mathbf{Ab})$ 的右导出函子, 类似 [定理3.52] 这时也能保证 $\mathrm{Hom}^\bullet(-,X)$ 存在右导出函子 $\mathrm{RHom}^\bullet(-,X)$. 当 $\mathcal{A}$ 既有足够多投射对象也有足够多内射对象时, 对任何上有界复形 X 和下有界复形 Y, 有 $\mathrm{RHom}^\bullet(X,-)(Y)\cong\mathrm{RHom}^\bullet(-,Y)(X)$. 证明与 [引理3.57] 是完全类似的: 取定投射分解 $s:P\to X$ 和内射分解 $t:Y\to I$, 那么可得到 $\mathrm{Hom}^\bullet(s,I)$ 和 $\mathrm{Hom}^\bullet(P,t)$ 都是拟同构. 进而得到在 $\mathscr{D}(\mathbf{Ab})$ 中有

$$\lambda_{\mathbf{Ab}}\mathrm{Hom}^\bullet(P,Y)\cong\lambda_{\mathbf{Ab}}\mathrm{Hom}^\bullet(P,I)\cong\lambda_{\mathbf{Ab}}\mathrm{Hom}^\bullet(X,I).$$

进而由 [定理3.52] 得到 $\mathrm{RHom}^\bullet(-,Y)(X)\cong\lambda_{\mathbf{Ab}}\mathrm{Hom}^\bullet(P,Y),\mathrm{RHom}^\bullet(X,-)(Y)\cong\mathrm{RHom}^\bullet(X,-)(I)$ 便得到 $\mathscr{D}(\mathbf{Ab})$ 中同构 $\mathrm{RHom}^\bullet(X,-)(Y)\cong\mathrm{RHom}^\bullet(-,Y)(X)$.

Example 3.59. 设 A,B 是含幺环, Y 是 A-B 双模复形, 则由 [注记3.55] 知有三角函子

$$\mathrm{Hom}^\bullet(-,Y):\mathscr{K}^-(A\text{-}\mathbf{Mod})\to\mathscr{K}(\mathbf{Mod}\text{-}B).$$

由 [注记3.58] 的讨论, 这时也有右导出函子 $\mathrm{RHom}^\bullet(-,Y):\mathscr{D}^-(A\text{-}\mathbf{Mod})\to\mathscr{D}(\mathbf{Mod}\text{-}B)$. 所以这时对任何上有界的左 A-模复形 X, 我们考虑的 RHom 复形 $\mathrm{RHom}^\bullet(X,Y)$ 进一步是右 B-模复形.

对 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, 只要 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 存在, 便能对 $X,Y\in\mathrm{ob}\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 定义

$$\mathrm{Ext}^i(X,Y)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X,Y[n]).$$

根据 [定理3.41], 当 $X,Y\in\mathrm{ob}\mathcal{A}$ 且 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象或有足够多内射对象时, 上述定义与通常 Ext 群一致.

Proposition 3.60 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴满足 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 存在. 那么对任何 $\mathscr{C}(\mathcal{A})$ 中短正合列

$$0\longrightarrow X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\longrightarrow 0,$$

W 也是 $\mathcal{A}$ 上复形. 那么有加群长正合列 (注意这里的 Ext 群都是对复形来定义的)

$$\cdots\longrightarrow\mathrm{Ext}^n(W,X)\longrightarrow\mathrm{Ext}^n(W,Y)\longrightarrow\mathrm{Ext}^n(W,Z)\longrightarrow\mathrm{Ext}^{n+1}(W,X)\longrightarrow\cdots$$

以及加群长正合列

$$\cdots\longrightarrow\mathrm{Ext}^n(Z,W)\longrightarrow\mathrm{Ext}^n(Y,W)\longrightarrow\mathrm{Ext}^n(X,W)\longrightarrow\mathrm{Ext}^{n+1}(Z,W)\longrightarrow\cdots.$$

Proof. 根据 [命题3.26], 这时存在 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中态射 $h:Z\to X[1]$ 使得有好三角 $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\xrightarrow{h}X[1]$. 所以利用 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(-,W)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(W,-)$ 都是上同调函子 (回忆 [例2.16]) 以及 $[n]$ 对所有整数 n 都是 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 上范畴自同构 (给出 Hom 群的加群同构) 以及这里 Ext 群的定义便知. □

Remark 3.61. 结合 [定理3.41], 导出范畴使我们能够从三角范畴角度看待 Ext 群的长正合列性质.

Remark 3.62. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴满足 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 存在. 那么对任何整数 i, j, n 和 $\mathcal{A}$ 上复形 X, Y 有 $\mathrm{Ext}^n(X[i], Y[j]) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X[i], Y[j+n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X, Y[j+n-i]) = \mathrm{Ext}^{n+j-i}(X, Y)$.

Theorem 3.63 ([Zha15])**.** 设 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 有足够多内射对象, $X \in \mathrm{ob}\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 且 $Y \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^+(\mathcal{A})$. 有加群同构

$$H^n(\mathrm{RHom}^\bullet(X, Y)) \cong \mathrm{Ext}^n(X, Y), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Proof. 由 [引理3.57] 的证明过程知如果取 Y 的下有界内射分解 $t : Y \to I$, 则有

$$H^n(\mathrm{RHom}^\bullet(X, Y)) \cong H^n(\mathrm{RHom}^\bullet(X, I)) \cong H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(X, I)).$$

由 [命题2.1], $H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(X, I)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X, I[n])$. 故由 [引理3.36] 可知

$$H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(X, I)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X, I[n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X, I[n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X, Y[n]) = \mathrm{Ext}^n(X, Y).$$

因此我们得到 $H^n(\mathrm{RHom}^\bullet(X, Y)) \cong \mathrm{Ext}^n(X, Y), \forall n \in \mathbb{Z}$. □

Remark 3.64. 对偶地, 对于有足够多投射对象的 Abel 范畴, 也能够得到类似结论. 这里仅处理模范畴的情形. 设 A, B 是含幺环, X 是左 A-模复形且 Y 是 A-B 双模复形. 根据 [例3.59], 对任何上有界的左 A-模复形 X, $\mathrm{RHom}^\bullet(X, Y)$ 是右 B-模复形, 并且对任何上有界的左 A-模投射复形 P, 有 $\mathscr{D}(\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 中同构 $\mathrm{RHom}^\bullet(P, Y) \cong \lambda_B \mathrm{Hom}^\bullet(P, Y)$. 于是对任何整数 n, 有右 B-模同构 $H^n(\mathrm{RHom}^\bullet(P, Y)) \cong H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(P, Y))$. 现在任取上有界左 A-模复形 X, 存在上有界投射左 A-模复形 P 使得 X 和 P 间有拟同构, 故有右 B-模同构 $H^n(\mathrm{RHom}^\bullet(P, Y)) \cong H^n(\mathrm{RHom}^\bullet(X, Y))$. 通过 [注记2.3] 得到右 B-模同构 $H^n(\mathrm{RHom}^\bullet(P, Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(A\text{-}\mathbf{Mod})}(P, Y[n])$. 由 [注记3.37], 作为右 B-模有同构 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(A\text{-}\mathbf{Mod})}(P, Y[n]) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(A\text{-}\mathbf{Mod})}(P, Y[n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})}(P, Y[n])$. 故

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})}(P, Y[n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})}(X, Y[n]) = \mathrm{Ext}^n(X, Y)$$

给出右 B-模同构. 于是我们得到右 B-模同构 $H^n(\mathrm{RHom}^\bullet(X, Y)) \cong \mathrm{Ext}^n(X, Y)$. 注意如果进一步 X 是左 A-模且 Y 是 A-B 双模, 那么 $\mathrm{Ext}^n(X, Y)$ 作为右 B-模也和通常的 Ext 模同构 (回忆 [注记3.43]).

Notation 3.65. 设 A, B 是含幺环, X 是左 A-模复形, Y 是 A-B 双模复形, 记 $\mathrm{RHom}^\bullet(X, Y) \in \mathrm{ob}\mathscr{D}(\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 为 $\mathrm{RHom}_A(X, Y)$, 这是右 B-模复形且对任何整数 n 有右 B-模同构 $H^n(\mathrm{RHom}_A(X, Y)) \cong \mathrm{Ext}^n(X, Y)$. 如果 X 是左 A-模且 Y 是 A-B 双模, 那么对任何整数 n 有右 B-模同构 $H^n(\mathrm{RHom}_A(X, Y)) \cong \mathrm{Ext}^n_A(X, Y)$.

总结一下, 对 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上复形 X, 有三角函子 $\mathrm{Hom}^\bullet(-, X) : \mathscr{K}^-(\mathcal{A}) \to \mathscr{K}(\mathbf{Ab})$ 和 $\mathrm{Hom}^\bullet(X, -) : \mathscr{K}^+(\mathcal{A}) \to \mathscr{K}(\mathbf{Ab})$. 那么当 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象时, 逆变三角函子 $\mathrm{Hom}^\bullet(-, X) : \mathscr{K}^-(\mathcal{A}) \to \mathscr{K}(\mathbf{Ab})$ 有右导出函子 $\mathrm{RHom}^\bullet(-, X) : \mathscr{D}^-(\mathcal{A}) \to \mathscr{D}(\mathbf{Ab})$; 当 $\mathcal{A}$ 有足够多内射对象时三角函子 $\mathrm{Hom}^\bullet(X, -) : \mathscr{K}^+(\mathcal{A}) \to \mathscr{K}(\mathbf{Ab})$ 有右导出函子 $\mathrm{RHom}^\bullet(X, -) : \mathscr{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathscr{D}(\mathbf{Ab})$. 如果 $\mathcal{A}$ 既有足够多投射对象又有足够多内射对象, 那么对任何上有界复形 X 和下有界复形 Y 有 $\mathscr{D}(\mathbf{Ab})$ 中的同构 $\mathrm{RHom}^\bullet(X, -)(Y) \cong \mathrm{RHom}^\bullet(-, Y)(X)$.

- 若 $\mathcal{A}$ 有足够多内射对象, 则对任何复形 X 和下有界复形 Y 有 $H^n(\mathrm{RHom}^\bullet(X, Y)) \cong \mathrm{Ext}^n(X, Y), \forall n \in \mathbb{Z}$.
- 若 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象, 则对任何上有界复形 X 和复形 Y 有 $H^n(\mathrm{RHom}^\bullet(X, Y)) \cong \mathrm{Ext}^n(X, Y), \forall n \in \mathbb{Z}$.

设 A,B 是含幺环, 那么对任何 A-B 双模复形 Y 产生右导出函子 $\mathrm{RHom}_A(-,Y):\mathscr{D}^-(A\textbf{-Mod})\to\mathscr{D}(\textbf{Mod-}B)$. 更进一步, 如果还有含幺环 C, 那么 A-B 双模复形 Y 产生右导出函子 $\mathrm{RHom}_A(-,Y):\mathscr{D}^-(A\textbf{-Mod-}C)\to\mathscr{D}(C\textbf{-Mod-}B)$. 这时任何上有界 A-C 双模复形 X 对应的 RHom 复形 $\mathrm{RHom}_A(X,Y)$ 是 C-B 双模复形.

Example 3.66. 设 A 是 K-代数, Ω 是 A-A 双模复形. 那么 $\mathrm{RHom}_A(\Omega,\Omega)$ 和 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(\Omega,\Omega)$ 都是 A-A 双模复形, 或等价地, 右 A^e-模复形. 这里 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(\Omega,\Omega)$ 表示使用 Ω 的右 A-模结构定义 RHom 复形.

只要 K-代数 A 是投射 K-模, 那么 A^e 作为左 A-模和右 A-模都是投射的. 特别地, 任何投射左 A^e-模作为左 A-模和右 A-模都是投射的. 更一般地, 对 K-代数 A 和 B, 只要 A 是投射 K-模, 那么 $A\otimes_K B$ 作为右 B-模投射; 只要 B 是投射 K-模, $A\otimes_K B$ 作为左 A-模投射. 因此投射左 $A\otimes_K B^{op}$-模作为左 A-模和右 B-模都投射.

Example 3.67. 设 A 是 K-代数且是投射 K-模. 如果 $\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A,A^e)=0,\forall i\neq n$, 记 $U=\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A,A^e)$, 这是右 A^e-模. 那么在 $\mathscr{D}(\textbf{Mod-}A^e)$ 中有 $U[-n]\cong\mathrm{RHom}_{A^e}(A,A^e)$(回忆 [例3.45]).

现在我们利用 [引理3.57] 把 RHom 复形也视作双函子. 对每个 $Y\in\mathrm{ob}\mathscr{D}^+(A\textbf{-Mod-}B)$, 取定内射分解 $s_Y:Y\to I$. 对固定的 $X\in\mathrm{ob}\mathscr{D}(A\textbf{-Mod-}C)$, 有三角函子 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,-):\mathscr{K}^+(A\textbf{-Mod-}B)\to\mathscr{K}(C\textbf{-Mod-}B)$ 的右导出函子 $\mathrm{RHom}_A(X,-):\mathscr{D}^+(A\textbf{-Mod-}B)\to\mathscr{D}(C\textbf{-Mod-}B)$, 同时也带上自然变换 $\xi:\lambda_{C\textbf{-Mod-}B}\mathrm{Hom}^\bullet_A(X,-)\to\mathrm{RHom}_A(X,-)\lambda_{A\textbf{-Mod-}B}:\mathscr{K}^+(A\textbf{-Mod-}B)\to\mathscr{D}(C\textbf{-Mod-}B)$. 根据 [定理3.52], 对下有界内射复形 I, ξ_I 是同构. 根据 [引理3.57] 的证明过程也知对任何 $\mathscr{K}(A\textbf{-Mod-}B)$ 中的拟同构 $t:X\to X'$ 有 $\mathrm{Hom}^\bullet(t,I)$ 是 $\mathscr{K}(C\textbf{-Mod-}B)$ 中拟同构. 这说明我们有唯一的三角函子 $\widehat{\mathrm{Hom}}^\bullet(-,I):\mathscr{D}(A\textbf{-Mod-}B)\to\mathscr{D}(C\textbf{-Mod-}B)$ 使得下图交换 (事实上, 由于 $\mathrm{Hom}^\bullet(-,I)$ 保持拟同构, $\widehat{\mathrm{Hom}}^\bullet(-,I)$ 就是 $\mathrm{Hom}^\bullet(-,I)$ 的右导出函子 $\mathrm{RHom}^\bullet(-,I)$):

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{K}(A\textbf{-Mod-}B) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}^\bullet(-,I)"'] & \mathscr{D}(A\textbf{-Mod-}B) \arrow[d, "\widehat{\mathrm{Hom}}^\bullet(-,I)"] \\
\mathscr{K}(C\textbf{-Mod-}B) \arrow[r] & \mathscr{D}(C\textbf{-Mod-}B)
\end{tikzcd}$$

虽然前面指出 $\widehat{\mathrm{Hom}}^\bullet(-,I)$ 就是 $\mathrm{RHom}^\bullet(-,I)$ 但依然使用记号 $\widehat{\mathrm{Hom}}^\bullet(-,I)$. 现在任何 $\mathscr{D}(A\textbf{-Mod-}B)$ 中态射 $\alpha:X\to X'$ 对应 $\mathscr{D}(C\textbf{-Mod-}B)$ 中态射 $\widehat{\mathrm{Hom}}^\bullet(\alpha,I):\mathrm{Hom}^\bullet(X',I)\to\mathrm{Hom}^\bullet(X,I)$. 于是对 $\alpha:X\to X'$, 存在唯一的 $\mathscr{D}(C\textbf{-Mod-}B)$ 中态射 $\mathrm{RHom}_A(\alpha,I):\mathrm{RHom}_A(X',I)\to\mathrm{RHom}_A(X,I)$ 使得

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{RHom}_A(X,I) & \mathrm{Hom}^\bullet(X,I) \arrow[l, "\xi_I^X"'] \\
\mathrm{RHom}_A(X',I) \arrow[u, "\mathrm{RHom}_A(\alpha,I)"] & \mathrm{Hom}^\bullet(X',I) \arrow[l, "\xi_I^{X'}"'] \arrow[u, "\widehat{\mathrm{Hom}}^\bullet(\alpha,I)"']
\end{tikzcd}$$

交换. 注意上图中水平方向的 (导出范畴中的) 态射关于下有界内射复形 I 有自然性. 事先取定的拟同构 $s:Y\to I$ 视作导出范畴中态射后在共变 RHom 函子作用下当然是同构, 所以存在唯一的 $\mathscr{D}(C\textbf{-Mod-}B)$ 中态射 $\mathrm{RHom}_A(\alpha,Y):\mathrm{RHom}_A(X',Y)\to\mathrm{RHom}_A(X,Y)$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{RHom}_A(X,Y) \arrow[r, "\mathrm{RHom}_A(X,s)"] & \mathrm{RHom}_A(X,I) & \mathrm{Hom}^\bullet(X,I) \arrow[l, "\xi_I^X"'] \\
\mathrm{RHom}_A(X',Y) \arrow[u, dashed, "\mathrm{RHom}_A(\alpha,Y)"] \arrow[r, "\mathrm{RHom}_A(X',s)"] & \mathrm{RHom}_A(X',I) \arrow[u, "\mathrm{RHom}_A(\alpha,I)"] & \mathrm{Hom}^\bullet(X',I) \arrow[l, "\xi_I^{X'}"'] \arrow[u, "\widehat{\mathrm{Hom}}^\bullet(\alpha,I)"']
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

所以对下有界复形 Y, 只要取定 Y 的一个下有界内射分解 $s: Y \to I$, 就能定义逆变加性函子 $\mathrm{RHom}_A(-,Y): \mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C) \to \mathscr{D}(C\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$. 事实上, 根据我们的定义有自然同构 $\mathrm{RHom}_A(-,Y) \cong \widehat{\mathrm{Hom}}^\bullet(-,I)$. 所以这里得到的逆变函子 $\mathrm{RHom}_A(-,Y): \mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C) \to \mathscr{D}(C\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 当然也是三角函子. 结合前面指出的自然同构 $\mathrm{RHom}_A(-,I) \cong \widehat{\mathrm{Hom}}^\bullet(-,I)$ 可知有自然同构 $\mathrm{RHom}_A(-,Y) \cong \mathrm{RHom}_A(-,I)$.

更进一步, 在对每个下有界 C-B 双模复形 Y 取定下有界内射分解的前提下 (这里本质上用到了考虑的模范畴有足够多内射对象), 我们能够从上述讨论构造双函子

$$\mathrm{RHom}_A(-,-): \mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)^{op} \times \mathscr{D}^+(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B) \to \mathscr{D}(C\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$$

满足对任何 A-C 双模复形 X 和下有界 A-B 双模复形 Y, 对应 C-B 双模复形 $\mathrm{RHom}_A(X,Y)$. 对固定的 Y, 前面的讨论使我们能够保证构造的 $\mathrm{RHom}_A(-,Y)$ 关于第一变量给出三角函子 (这里考虑了对偶范畴使得关于第一变量是共变的). 如果固定第一变量 X, 对拟同构 $s_Y: Y \to I$, $s_{Y'}: Y' \to J$, 因为在 $\mathscr{D}^+(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 中 s_Y 和 $s_{Y'}$ 变成同构, 所以对任何导出范畴中的态射 $\beta: Y \to Y'$, 存在导出范畴中唯一的态射 $\beta': I \to J$ 使得

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "s_Y"] \arrow[d, "\beta"'] & I \arrow[d, dashed, "\beta'"] \\ Y' \arrow[r, "s_{Y'}"] & J \end{tikzcd}$$

交换. 因此对 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中态射 $\alpha: X' \to X$ 和 $\mathscr{D}^+(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 中态射 $\beta: Y \to Y'$, 根据前面的记号, 现在 $\mathscr{D}^+(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 中有唯一的态射 $\beta': I \to J$ 使得在 $\mathscr{D}^+(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 中有上图交换. 在 [注记1.66] 指出正合的下有界内射复形可裂正合, 所以由 [命题1.68] 知正合的下有界内射复形在同伦范畴中是零对象, 所以 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,-): \mathscr{K}^+(\mathcal{I}) \to \mathscr{K}(C\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 把正合下有界内射复形映至正合复形, 特别地, 该函子保持拟同构. 所以可诱导三角函子 $\widehat{\mathrm{Hom}}^\bullet(X,-): \mathscr{D}^+(\mathcal{I}) \to \mathscr{D}(C\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$. 下面我们说明有交换图:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}^\bullet(X,I) \arrow[r, "\widehat{\mathrm{Hom}}^\bullet(X,\beta')"] \arrow[d, "\widehat{\mathrm{Hom}}^\bullet(\alpha,I)"'] & \mathrm{Hom}^\bullet(X,J) \arrow[d, "\widehat{\mathrm{Hom}}^\bullet(\alpha,J)"] \\ \mathrm{Hom}^\bullet(X',I) \arrow[r, "\widehat{\mathrm{Hom}}^\bullet(X',\beta')"] & \mathrm{Hom}^\bullet(X',J) \end{tikzcd}$$

可设 $\alpha: X' \to X$ 有左分式表示 (以下 $s: X \to W$ 是拟同构):

$$X' \xrightarrow{f} W \xleftarrow{s} X.$$

也设 $\beta': I \to J$ 有右分式表示 (以下 U 是下有界内射复形且 $t: U \to I$ 是拟同构):

$$I \xleftarrow{t} U \xrightarrow{g} J$$

因为 $\mathrm{Hom}^\bullet(s,I), \mathrm{Hom}^\bullet(s,J)$ 和 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,t), \mathrm{Hom}^\bullet(X',t)$ 都是拟同构 (由 [引理3.57] 的证明过程), 所以在导出范畴 $\mathscr{D}(C\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 中, $\widehat{\mathrm{Hom}}^\bullet(\alpha,I)$ 和 $\widehat{\mathrm{Hom}}^\bullet(\alpha,J)$ 有右分式表示

$$\mathrm{Hom}^\bullet(X,I) \xleftarrow{\mathrm{Hom}^\bullet(s,I)} \mathrm{Hom}^\bullet(W,I) \xrightarrow{\mathrm{Hom}^\bullet(f,I)} \mathrm{Hom}^\bullet(X',I),$$

$$\mathrm{Hom}^\bullet(X,J) \xleftarrow{\mathrm{Hom}^\bullet(s,J)} \mathrm{Hom}^\bullet(W,J) \xrightarrow{\mathrm{Hom}^\bullet(f,J)} \mathrm{Hom}^\bullet(X',J).$$

同时 $\widehat{\mathrm{Hom}}^{\bullet}(X,\beta')$ 和 $\widehat{\mathrm{Hom}}^{\bullet}(X',\beta')$ 有右分式表示

$$\mathrm{Hom}^{\bullet}(X,I)\xleftarrow{\mathrm{Hom}^{\bullet}(X,t)}\mathrm{Hom}^{\bullet}(X,U)\xrightarrow{\mathrm{Hom}^{\bullet}(X,g)}\mathrm{Hom}^{\bullet}(X,J),$$

$$\mathrm{Hom}^{\bullet}(X',I)\xleftarrow{\mathrm{Hom}^{\bullet}(X',t)}\mathrm{Hom}^{\bullet}(X',U)\xrightarrow{\mathrm{Hom}^{\bullet}(X',g)}\mathrm{Hom}^{\bullet}(X',J).$$

所以 $\widehat{\mathrm{Hom}}^{\bullet}(\alpha,I)$ 和 $\widehat{\mathrm{Hom}}^{\bullet}(X',\beta')$ 的合成可由下图给出:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Hom}^{\bullet}(W,U) \arrow[dl, "\mathrm{Hom}^{\bullet}(W,t)"'] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}^{\bullet}(f,U)"] & & \\
 & \mathrm{Hom}^{\bullet}(W,I) \arrow[dl, "\mathrm{Hom}^{\bullet}(s,I)"'] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}^{\bullet}(f,I)"] & & \mathrm{Hom}^{\bullet}(X',U) \arrow[dl, "\mathrm{Hom}^{\bullet}(X',t)"'] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}^{\bullet}(X',g)"] & \\
\mathrm{Hom}^{\bullet}(X,I) & & \mathrm{Hom}^{\bullet}(X',I) & & \mathrm{Hom}^{\bullet}(X',J)
\end{tikzcd}$$

这里 $\mathrm{Hom}^{\bullet}(W,t)$ 是拟同构. 同样地, $\widehat{\mathrm{Hom}}^{\bullet}(X,\beta')$ 和 $\widehat{\mathrm{Hom}}^{\bullet}(\alpha,J)$ 的合成来自下图:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Hom}^{\bullet}(W,U) \arrow[dl, "\mathrm{Hom}^{\bullet}(s,U)"'] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}^{\bullet}(W,g)"] & & \\
 & \mathrm{Hom}^{\bullet}(X,U) \arrow[dl, "\mathrm{Hom}^{\bullet}(X,t)"'] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}^{\bullet}(X,g)"] & & \mathrm{Hom}^{\bullet}(W,J) \arrow[dl, "\mathrm{Hom}^{\bullet}(s,J)"'] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}^{\bullet}(f,J)"] & \\
\mathrm{Hom}^{\bullet}(X,I) & & \mathrm{Hom}^{\bullet}(X,J). & & \mathrm{Hom}^{\bullet}(X',J)
\end{tikzcd}$$

由此可知 $\widehat{\mathrm{Hom}}^{\bullet}(X',\beta')\widehat{\mathrm{Hom}}^{\bullet}(\alpha,I)=\widehat{\mathrm{Hom}}^{\bullet}(\alpha,J)\widehat{\mathrm{Hom}}^{\bullet}(X,\beta')$. 再由图 (3.1) 的交换性, 得到

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{RHom}_A(X,Y') \arrow[rrr, "\mathrm{RHom}_A(X,s_{Y'})"] \arrow[ddd, "\mathrm{RHom}_A(\alpha,Y')"'] & & & \mathrm{RHom}_A(X,J) \arrow[ddd, "\mathrm{RHom}_A(\alpha,J)"] \\
 & \mathrm{RHom}_A(X,Y) \arrow[ul, dashed, "\mathrm{RHom}_A(X,\beta)"'] \arrow[r, dashed, "\mathrm{RHom}_A(X,s_Y)"] \arrow[d, dashed, "\mathrm{RHom}_A(\alpha,Y)"'] & \mathrm{RHom}_A(X,I) \arrow[ur, dashed, "\mathrm{RHom}_A(X,\beta')"] \arrow[d, dashed, "\mathrm{RHom}_A(\alpha,I)"] & \\
 & \mathrm{RHom}_A(X',Y) \arrow[r, dashed, "\mathrm{RHom}_A(X',s_Y)"] \arrow[dl, dashed, "\mathrm{RHom}_A(X',\beta)"] & \mathrm{RHom}_A(X',I) \arrow[dr, dashed, "\mathrm{RHom}_A(X',\beta')"'] & \\
\mathrm{RHom}_A(X',Y') \arrow[rrr, "\mathrm{RHom}_A(X',s_{Y'})"'] & & & \mathrm{RHom}_A(X',J)
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

也交换. 这说明对任何 A-C 双模复形 X 和 A-B 下有界复形 Y, 定义 (X,Y) 对应的 C-B 双模复形为 $\mathrm{RHom}_A(X,Y)$. 对任何 A-C 双模复形间的链映射 $\alpha: X'\to X$(对应 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)^{op}$ 中的态射 $\alpha: X\to X'$) 和 A-B 双模复形间的链映射 $\beta: Y\to Y'$, 对应 C-B 双模复形间的链映射 (回忆图 (3.1) 的记号):

$$\mathrm{RHom}_A(X',\beta)\mathrm{RHom}_A(\alpha,Y)=\mathrm{RHom}_A(\alpha,Y')\mathrm{RHom}_A(X,\beta),$$

记上述链映射为 $\mathrm{RHom}_A(\alpha,\beta):\mathrm{RHom}_A(X,Y)\to\mathrm{RHom}_A(X',Y')$. 注意当 $X=X'$ 且 $\alpha=1_X$ 时, 对任何态射 $\beta: Y\to Y'$ 有 $\mathrm{RHom}_A(1_X,\beta)=\mathrm{RHom}_A(X,\beta)$. 利用 (3.2) 容易验证 $\mathrm{RHom}_A(-,-):\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)^{op}\times\mathscr{D}^{+}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)\to\mathscr{D}(C\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 定义了双函子. 现在我们把前面关于 RHom 双函子的讨论总结为

Theorem 3.68 ([Wei94]). 设 A,B,C 是含幺环, 则有双函子 $\mathrm{RHom}_A(-,-):\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)^{op}\times\mathscr{D}^+(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)\to\mathscr{D}(C\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 满足对任何 A-C 双模复形 X 和下有界 A-B 双模复形 Y 有 $\mathrm{RHom}_A(-,-)(X,Y)=\mathrm{RHom}_A(X,Y)$ 并且对任何 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 中态射 $\beta:Y\to Y'$ 有

$$\mathrm{RHom}_A(1_X,\beta)=\mathrm{RHom}_A(X,\beta):\mathrm{RHom}_A(X,Y)\to\mathrm{RHom}_A(X,Y').$$

即对固定的 $X\in\mathrm{ob}\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$, 双函子 $\mathrm{RHom}_A(-,-)$ 固定第一变量为 X 后就是

$$\mathrm{RHom}_A(X,-):\mathscr{D}^+(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)\to\mathscr{D}(C\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B).$$

对固定的 $Y\in\mathrm{ob}\mathscr{D}^+(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$, 这里的函子 $\mathrm{RHom}_A(-,Y)$ 自然同构于 $\mathrm{RHom}_A(-,I)$, 其中 $t:Y\to I$ 是 Y 的下有界内射分解.

Remark 3.69. 类似 [注记3.64], 在 [定理3.68] 条件下, 对任何 A-C 双模复形 X 和下有界 A-B 双模复形 Y, $\mathrm{RHom}_A(X,Y)$ 作为 C-B 双模复形, 对任何整数 n, $H^n(\mathrm{RHom}_A(X,Y))$ 是 C-B 双模. 如果进一步要求 A,B,C 是 K-代数并且都是投射 K-模, 那么任何投射左 $A\otimes_K C^{op}$-模作为左 A-模和右 C-模都投射, 任何投射左 $A\otimes_K C^{op}$-模作为左 A-模和右 C-模也都投射. 于是对 A-C 双模 X 和 A-B 双模 Y, [定理3.41] 和 [定理3.63] 的讨论给出 C-B 双模同构 $\mathrm{Ext}^n_A(X,Y)\cong H^n(\mathrm{RHom}_A(X,Y))$.

Remark 3.70. 对偶地, 我们也能够得到双函子 $\mathrm{RHom}_A(-,-):\mathscr{D}^-(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)^{op}\times\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)\to\mathscr{D}(C\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 满足对任何上有界 A-C 双模复形 X 和 A-B 双模复形 Y 有 $\mathrm{RHom}_A(-,-)(X,Y)=\mathrm{RHom}_A(X,Y)$ 并且对 $\mathscr{D}^-(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中态射 $\alpha:X'\to X$(对应 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)^{op}$ 中 X 到 X' 的态射), 有 $\mathrm{RHom}_A(\alpha,1_Y)=\mathrm{RHom}_A(\alpha,Y):\mathrm{RHom}_A(X,Y)\to\mathrm{RHom}_A(X',Y)$. 对固定的 $X\in\mathrm{ob}\mathscr{D}^-(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$, 如果取定上有界投射分解 $s:P\to X$, 那么有自然同构 $\mathrm{RHom}_A(X,-)\cong\mathrm{RHom}_A(P,-)$. 如果把 [定理3.68] 的双函子 $\mathrm{RHom}_A(-,-)$ 限制, 得到双函子 $\mathrm{RHom}_A(-,-):\mathscr{D}^-(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)^{op}\times\mathscr{D}^+(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)\to\mathscr{D}(C\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$, 那么该双函子满足固定第一变量 X 或者固定第二变量 Y 分别与 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,-)$ 和 $\mathrm{Hom}^\bullet(-,Y)$ 的右导出函子自然同构.

特别地, 对任何下有界 A-B 双模复形 Y, 产生逆变三角函子 $\mathrm{RHom}_A(-,Y):\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)\to\mathscr{D}(C\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$. 更特殊的情况: 设 A 是域 $\Bbbk$ 上代数, Ω 是下有界 A-A 双模复形, 那么 $\mathrm{RHom}_A(-,\Omega):\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})\to\mathscr{D}(\mathbf{Mod}-A)(=\mathscr{D}(A^{op}\text{-}\mathbf{Mod}))$. 为了在 RHom 复形记号上区分考虑的是左 A-模范畴的导出范畴还是右 A-模范畴的导出范畴, 我们使用反环的左模. 这时 Ω 作为右 A-模复形能够视作左 A^{op}-模复形, 则有逆变三角函子 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega):\mathscr{D}(A^{op}\text{-}\mathbf{Mod})\to\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})$. 所以任何下有界 A-A 双模复形 Ω 能够诱导 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ 与 $\mathscr{D}(A^{op}\text{-}\mathbf{Mod})$ 间的一对逆变三角函子:

$$\mathrm{RHom}_A(-,\Omega):\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})\to\mathscr{D}(A^{op}\text{-}\mathbf{Mod}),$$

$$\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega):\mathscr{D}(A^{op}\text{-}\mathbf{Mod})\to\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}).$$

依然保持 Ω 是下有界 A-A 双模复形的假设, 那么对任何 $\Bbbk$-代数 B, [定理3.68] 使我们也能够考虑

$$\mathrm{RHom}_A(-,\Omega):\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)\to\mathscr{D}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A),$$

$$\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega):\mathscr{D}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)\to\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B).$$

Definition 3.71 (有限内射维数, [Wei94]). 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的 Abel 范畴, Y 是 $\mathcal{A}$ 上的下有界复形. 如果存在整数 n_0 使得对所有整数 $n \geq n_0$ 和 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$(视作集中在 0 次部分的复形) 有 $\mathrm{Ext}^n(X,Y)(= \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X,Y[n])) = 0$, 则称 Y 有**有限的内射维数**. 如果整数 ℓ 满足对任何 $n \geq \ell+1$ 和复形 X 有 $\mathrm{Ext}^n(X,Y) = 0$ 但存在某个 $\mathcal{A}$ 中对象 Z 使得 $\mathrm{Ext}^{\ell}(Z,Y) \neq 0$, 则称 ℓ 是 Y 的**内射维数**.

Remark 3.72. 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的 Abel 范畴, $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 视作集中在 0 次部分的复形. 那么这里 Y 作为复形内射维数的概念与 Y 作为 $\mathcal{A}$ 中对象内射维数的定义一致 (回忆 [命题1.123]).

Proposition 3.73 ([Wei94]). 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的 Abel 范畴, Y 是 $\mathcal{A}$ 上的下有界 Abel 范畴. 那么 Y 有有限内射维数的充要条件是 Y 在 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中同构于某个有界内射复形.

Proof. 充分性: 如果 Y 在 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中同构于某个有界内射复形 I, 那么对任何 $\mathcal{A}$ 上复形 X 有 $\mathrm{Ext}^n(X,Y) \cong \mathrm{Ext}^n(X,I) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X,I[n]), \forall n \in \mathbb{Z}$. 根据 [引理3.36], 有加群同构 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X,I[n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X,I[n])$. 因为 I 有界所以只要 n 充分大就有 $I[n]^k = 0, \forall k \geq -1$. 现在 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 将 X 视作集中在 0 次部分的复形, 那么当 n 充分大时便有 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X,I[n]) = 0$ 对所有 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 成立. 因此 Y 有有限内射维数.

必要性: 设 Y 有有限内射维数, 那么存在整数 n_0 使得当 $n \geq n_0$ 时对任何 $\mathcal{A}$ 中对象 X 有 $\mathrm{Ext}^n(X,Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X,Y[n]) = 0$. 用 Y 的下有界内射分解代替 Y 可不妨设 Y 自身是下有界内射复形. 那么条件表明对任何 $\mathcal{A}$ 中对象 X 和 $n \geq n_0$ 有 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X,Y[n]) = 0$. 我们断言对每个 $n \geq n_0$ 有 $H^n(Y) = 0$. 如果 $H^n(Y) \neq 0$, 那么取 $X = \mathrm{Ker}d^n$, 考虑 $\mathrm{Ker}d^n$ 到 $Y[n]$ 的标准链映射 $\iota: \mathrm{Ker}d^n \to Y[n]$ 得到 $H^n(\iota) \neq 0$, 于是知 ι 不可能与零链映射同伦. 这说明 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X,Y[n]) \neq 0$, 矛盾. 因此现在有 $H^n(Y) = 0, \forall n \geq n_0$.

现在由复形 Y 在 n_0 处的左温和截断得到拟同构

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Y^{n_0-2} \arrow[r] & Y^{n_0-1} \arrow[r] & Y^{n_0} \arrow[r] & Y^{n_0+1} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{n_0-2} \arrow[r] \arrow[u] & Y^{n_0-1} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Ker}d^{n_0} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}$$

我们再断言 $\mathrm{Ker}d^{n_0}$ 是 $\mathcal{A}$ 中内射对象, 一旦证明该断言则命题证明完整. 因为 $\mathcal{A}$ 有足够多内射对象, 所以可选取 $\mathrm{Ker}d^{n_0}$ 的内射分解 (将 J^{n_0} 视作 0 次部分, 由 J^i 定义的内射复形记作 J):

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}d^{n_0} \xrightarrow{\theta} J^{n_0} \longrightarrow J^{n_0+1} \longrightarrow \cdots$$

由此我们得到下图的拟同构:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Y^{n_0-2} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & Y^{n_0-1} \arrow[r, "d^{n_0-1}|"] \arrow[d, "1"'] & \mathrm{Ker}d^{n_0} \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{n_0-2} \arrow[r] & Y^{n_0-1} \arrow[r, "\theta(d^{n_0-1}|)"] & J^{n_0} \arrow[r] & J^{n_0+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

记上图中下行复形为 Z, 那么在 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中 $Z \cong \tau_{\leq n_0} Y \cong Y$. 特别地,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X,Y[n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X,Z[n]) = 0, \forall X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}, n \geq n_0.$$

易见只要 $\ell \geq n_0 + 1$, 就有同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X,Z[\ell]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X,J[\ell-n_0]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X,J[\ell-n_0]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X,\mathrm{Ker}d^{n_0}[\ell-n_0]).$$

所以对 $\ell \geq n_0+1$, 有 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X, \mathrm{Ker}d^{n_0}[\ell-n_0]) = 0, \forall X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$. 特别地, 对任何 $\mathcal{A}$ 中对象 X, 有

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X, \mathrm{Ker}d^{n_0}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X, \mathrm{Ker}d^{n_0}[1]) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X, \mathrm{Ker}d^{n_0}[(n_0+1)-n_0]) = 0.$$

由 X 的任意性, 根据 [命题1.117] 得到 $\mathrm{Ker}d^{n_0}$ 是 $\mathcal{A}$ 中内射对象. 所以 $\tau_{\leq n_0}Y$ 是有界内射复形. $\square$

Remark 3.74. 在有足够多内射对象的 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中, 内射维数有限的对象 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 如果视作集中在 0 次位置的复形, 那么作为下有界复形, X 也有有限内射维数. 反之, 如果 $\mathcal{A}$ 中对象 X 视作集中在 0 次位置的复形有有限内射维数, 我们也能够推出 X(在 $\mathcal{A}$ 中) 有有限长的内射分解: 设 X 在 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中与有界内射复形

$$0 \longrightarrow I^{-m} \xrightarrow{d^{-m}} I^{-m+1} \xrightarrow{d^{-m+1}} \cdots \longrightarrow I^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \longrightarrow \cdots$$

同构, 这里 $m \geq 1$. 注意上述复形满足 $H^k(I) = 0, \forall k \leq -1$, 并类似下有界正合内射复形可裂正合的讨论, 注意到 $\mathrm{Im}d^{-m}$ 也是内射对象, 可归纳地得到 $\mathrm{Im}d^{-1}$ 也是内射对象. 进而 $I^0/\mathrm{Im}d^{-1}$ 也是内射对象. 记 $\pi^0 : I^0 \to I^0/\mathrm{Im}d^{-1}$ 是标准态射, 那么我们得到拟同构:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & I^{-m} \arrow[r, "d^{-m}"] \arrow[d] & I^{-m+1} \arrow[r, "d^{-m+1}"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & I^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d] & I^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\pi^0"] & I^1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0/\mathrm{Im}d^{-1} \arrow[r, "\tilde{d}^0"] & I^1 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

所以在 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中上图两行复形同构, 下行也是内射复形, 记作 Z. 那么 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X, I) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{A})}(X, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\mathcal{A})}(X, Z)$, 这里最后一个加群同构来自 [引理3.36]. 于是 X 到 Z 存在拟同构:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0/\mathrm{Im}d^{-1} \arrow[r, "\tilde{d}^0"] & I^1 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

由 g 诱导拟同构得到 $g : X \to I^0/\mathrm{Im}d^{-1}$ 与 $\tilde{d}^0$ 在 $I^0/\mathrm{Im}d^{-1}$ 处正合, 所以得到 X 的有限长内射分解:

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{g} I^0/\mathrm{Im}d^{-1} \xrightarrow{\tilde{d}^0} I^1 \xrightarrow{d^1} \cdots.$$

或更直接地, 如果对象 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 满足作为下有界复形有有限内射维数, 那么根据定义知存在正整数 n_0 使得对任何 $n \geq n_0$ 和 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 有 $\mathrm{Ext}^n(X, Y) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X, Y) = 0$. 因此由 [命题1.123] 知作为 $\mathcal{A}$ 中对象有 $\mathrm{inj.dim}X \leq n_0 - 1$. 所以前面的讨论说明: 对有足够多内射对象的 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 作为下有界复形有有限内射维数当且仅当 X 作为 $\mathcal{A}$ 中对象的内射维数有上界.

Remark 3.75. 设 K-代数 A 满足 A 是平坦 K-模. 根据 [引理1.228], 内射左 A^e-模作为左 A-模和右 A-模都是内射模. 所以如果 A-A 双模复形 Ω 是下有界的且有有限内射维数, 那么 Ω 在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ 和 $\mathscr{D}(\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中都同构于相应导出范畴中的有界内射复形.

从 [注记3.74] 中的截断技术我们看到对 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上任何复形 X 和整数 n, 有拟同构:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}d^{n-1} \arrow[r, "\iota^{n-1}"] \arrow[d] & X^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "\pi^n"'] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "1_{X^{n+1}}"'] & X^{n+2} \arrow[r] \arrow[d, "1_{X^{n+2}}"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X^n/\mathrm{Im}d^{n-1} \arrow[r, "\tilde{d}^n"] & X^{n+1} \arrow[r] & X^{n+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

记上图中下行复形为 Y, $H^n(X)$ 视作集中在 n 次部分的复形, 那么我们有 $\mathcal{A}$ 上复形短正合列:

$$0 \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow Y \longrightarrow \tau_{\geq n+1}X \longrightarrow 0.$$

这里复形 Y 到 $\tau_{\geq n+1}X$ 如下给出:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X^n/\mathrm{Im}d^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d}^n"'] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "1_{X^{n+1}}"'] & X^{n+2} \arrow[r] \arrow[d, "1_{X^{n+2}}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Im}d^n \arrow[r] & X^{n+1} \arrow[r] & X^{n+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

因为 $\mathrm{Im}d^{n-1}$ 是 $\mathrm{Ker}d^n$ 的子对象, 所以诱导态射 $\overline{d}^n : X^n/\mathrm{Im}d^{n-1} \to \mathrm{Im}d^n$ 且 $\overline{d}^n$ 的核对象同构于 $H^n(X)$. 应用 [命题3.26] 得到: 导出范畴 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 只要存在, 那么 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中有好三角

$$H^n(X) \longrightarrow Y \longrightarrow \tau_{\geq n+1}X \longrightarrow H^n(X)[1],$$

结合前面指出的在 Y 和 $\tau_{\geq n}X$ 间有拟同构, 我们得到

Proposition 3.76 ([Hart66])**.** 设 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 满足 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 存在, n 是正整数且 $X \in \mathrm{ob}\mathscr{D}(\mathcal{A})$. 那么 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中有好三角 $H^n(X) \longrightarrow \tau_{\geq n}X \longrightarrow \tau_{\geq n+1}X \longrightarrow H^n(X)[1]$.

根据 [命题3.73] 的证明过程可知对域 $\Bbbk$ 上代数 A, 如果下有界左 A^e-模复形 Y 作为左 A-模复形和右 A-模复形都有有限内射维数, 那么 Y 在 $\mathscr{D}^+(A^e)$ 中同构于某个下有界复形 Z 满足 Z 作为左 A-模复形和右 A-模复形都是内射复形: 这时存在整数 n_0 使得对任何 $n \geq n_0$ 以及任何左 A-模 X, 任何右 A-模 X', 有 $\mathrm{Ext}^n_A({}_AX, {}_AY) = 0, \mathrm{Ext}^n_A(X'_A, Y_A) = 0$. 因此重复 [命题3.73] 必要性的讨论, 便能得到证明过程中的 $\mathrm{Ker}d^{n_0}$ 作为左 A-模和右 A-模都是内射模 (注意因为 A 在系数环上平坦, 所以内射 A^e-模也是内射 A-模, 回忆 [注记1.229]). 于是

Proposition 3.77 ([Ye92])**.** 设 A 是域 $\Bbbk$ 上代数, $Y \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^+(A^e\textbf{-Mod})$. 那么以下两条等价:
(1) 复形 Y 作为左 A-模复形和右 A-模复形都有有限内射维数.
(2) 复形 Y 在 $\mathscr{D}^+(A^e\textbf{-Mod})$ 中同构于某个有界复形 Z 满足 Z 作为左和右 A-模复形都是有界内射复形.

Proof. 已指出 [命题3.73] 必要性部分的证明保证了 (1)⇒(2) 成立. (2)⇒(1) 是 [命题3.73] 的充分性的推论. □

也可以对 [例1.75] 中复形张量积给出的加性函子 (以下 A, B, C 是含幺环, X 是 A-B 双模复形)$\mathrm{Tot}^{\oplus}(X \otimes_B -) : \mathscr{K}(B\textbf{-Mod-}C) \to \mathscr{K}(A\textbf{-Mod-}C)$ 考虑导出函子. 为与 [Wei94] 中双复形的符号统一, 对 A-B 双模复形 X

和 B-C 双模复形 Y, 用于定义全张量积复形的张量积双复形 (在这里是 A-C 双模的双复形) 为

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & X^{p-1}\otimes_B Y^{q+1} \arrow[u] \arrow[r, "d_X^{p-1}\otimes 1"] & X^p\otimes_B Y^{q+1} \arrow[u] \arrow[r, "d_X^p\otimes 1"] & X^{p+1}\otimes_B Y^{q+1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{p-1}\otimes_B Y^{q} \arrow[u, "(-1)^{p-1}\otimes d_Y^q"] \arrow[r, "d_X^{p-1}\otimes 1"] & X^p\otimes_B Y^{q} \arrow[u, "(-1)^{p}\otimes d_Y^q"] \arrow[r, "d_X^p\otimes 1"] & X^{p+1}\otimes_B Y^{q} \arrow[u, "(-1)^{p+1}\otimes d_Y^q"'] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{p-1}\otimes_B Y^{q-1} \arrow[u, "(-1)^{p-1}\otimes d_Y^{q-1}"] \arrow[r, "d_X^{p-1}\otimes 1"] & X^p\otimes_B Y^{q-1} \arrow[u, "(-1)^{p}\otimes d_Y^{q-1}"] \arrow[r, "d_X^p\otimes 1"] & X^{p+1}\otimes_B Y^{q-1} \arrow[u, "(-1)^{p+1}\otimes d_Y^{q-1}"'] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

上述双复形的全复形 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_B Y)$ 的 n 次部分为

$$\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_B Y)^n=\bigoplus_{p+q=n} X^p\otimes_B Y^q,$$

这是 A-C 双模. 全复形的微分 $d^n:\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_B Y)^n\to\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_B Y)^{n+1}$ 满足 $d^n(x^p\otimes y^q)_{p+q=n}$ 在指标 $n+1$ 处分量为 $d_X^p(x^p)\otimes y^q+(-1)^p x^p\otimes d_Y^q(y^q)$. 根据 [例1.214], 如果 X 是右 B-模且 Y 是左 B-模, 那么 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_B Y)$ 的 n 次上同调就是 $\mathrm{Tor}^B_{-n}(X,Y)$.

如果 A 是含幺环, X,Y,Z 都是 A-A 双模复形. 那么对任何整数 p,q,r, 标准 A-A 双模同构 $(X^p\otimes_A Y^q)\otimes_A Z^r\cong X^p\otimes_A(Y^q\otimes_A Z^r)$ 给出 A-A 双模复形的链同构 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_A Y)\otimes_A Z)\cong\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_A\mathrm{Tot}^{\oplus}(Y\otimes_A Z))$.

对任何 B-C 双模复形 Y, 可直接验证有标准复形链同构 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_B Y[1])\cong\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_B Y)[1]$(见 [注记1.83]. 如果平移函子作用在 X 则 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X[1]\otimes_B Y)=\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_B Y)[1]$, 不用添加符号) 进而可类似 [例3.54] 验证加性函子 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_B -):\mathscr{K}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)\to\mathscr{K}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 是三角函子. 因为模范畴有足够多投射对象, 所以 [定理3.52] 使我们能够得到左导出函子 $L^-\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_B -):\mathscr{D}^-(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)\to\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$. 特别地, 如果 $A=C=\mathbb{Z}$, 对任何含幺环 B, 有左导出函子 $L^-\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_B -):\mathscr{D}^-(B\text{-}\mathbf{Mod})\to\mathscr{D}(\mathbf{Ab})$. 于是我们能够定义

Definition 3.78 (导出张量积, [Wei94]). 设 A,B,C 是含幺环, X 是 A-B 双模复形, Y 是上有界的 B-C 双模复形. 称 $L^-\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_B -)(Y)\in\mathrm{ob}\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 为 X 和 Y 的**导出张量积复形**, 记作 $X\otimes_B^L Y$.

Remark 3.79. 这里没有对 A-B 双模复形作有界性上的要求. 类似也可以对固定的 B-C 双模复形 Y, 考虑三角函子 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(-\otimes_B Y):\mathscr{K}^-(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)\to\mathscr{K}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 来得到导出函子

$$-\otimes_B^L Y:\mathscr{D}^-(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)\to\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C).$$

利用 [命题1.216](也参见下面 [引理3.81] 的证明过程), 易知对上有界的右 B-模复形和左 B-模复形, 两种导出张量积得到的复形在导出范畴中同构.

Remark 3.80. 根据 [定理3.52], 有自然变换 $\xi:(X\otimes_B^L -)\lambda^-\to\lambda\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_B -):\mathscr{D}^-(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)\to\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 使得对任何上有界投射 B-C 双模复形 P, 有 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中的同构 $\xi_P:X\otimes_B^L P\cong\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_B P)$. 所以如果

X,Y 都是上有界复形, 通过取定 Y 的上有界投射分解 P 后得到 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中同构 $X\otimes_B^L Y\cong X\otimes_B^L P\cong \mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_B P)$, 后者由 X 的上有界条件得到也是上有界复形, 因此对上有界复形 X,Y, $X\otimes_B^L Y$ 在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中同构于某个上有界复形. 如果 A,B,C 是 K-代数满足 C 是投射 K-模, 那么自然同构 $\mathrm{Hom}_B({}_BB\otimes_K C,-)\cong \mathrm{Hom}_K({}_KC,\mathrm{Hom}_B(B,-))$ 保证了 $B\otimes_K C$ 是投射左 B-模, 由于这时 C^{op} 也是投射 K-模, 所以任何投射左 $B\otimes_K C^{op}$-模作为左 B-模依然投射.

Lemma 3.81 ([Wei94]). 设 A,B 是含幺环, X,X' 是上有界 A-B 双模复形, Y 是上有界左 B-模复形. 如果有拟同构 $s:X\to X'$, 那么在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ 中有同构 $X\otimes_B^L Y\cong X'\otimes_B^L Y$. 如果还有含幺环 C, Y 是上有界 B-C 双模, 只要 Y 是投射左 B-模复形, 就有 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中同构 $X\otimes_B^L Y\cong X'\otimes_B^L Y$.

Proof. 通过把 Y 替换为 Y 的上有界投射分解, 可不妨设 Y 是上有界左 B-模投射复形. 根据 [命题1.216], Y 是上有界投射复形保证 $\mathrm{Tot}^{\bullet}(-\otimes_B Y)$ 把正合复形映至正合复形, 于是利用 [注记2.34] 立即得到 $\mathrm{Tot}^{\bullet}(-\otimes_B Y)$ 把拟同构映至拟同构. 特别地, $\mathrm{Tot}^{\bullet}(s\otimes_B Y):\mathrm{Tot}^{\bullet}(X\otimes_B Y)\to\mathrm{Tot}^{\bullet}(X'\otimes_B Y)$ 是左 A-模复形间的拟同构. 由此得到 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ 中的同构 $\mathrm{Tot}^{\bullet}(X\otimes_B Y)\cong\mathrm{Tot}^{\bullet}(X'\otimes_B Y)$. 现在由 [注记3.80], 在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ 中有同构

$$X\otimes_B^L Y\cong\mathrm{Tot}^{\bullet}(X\otimes_B Y)\cong\mathrm{Tot}^{\bullet}(X'\otimes_B Y)\cong X'\otimes_B^L Y.$$

如果有含幺环 C 且 Y 是 B-C 双模复形满足上有界且 Y 作为左 B-模复形每项是投射模, 那么依然通过 [注记3.80], 上述导出范畴中同构 $X\otimes_B^L Y\cong\mathrm{Tot}^{\bullet}(X\otimes_B Y)$ 和 $\mathrm{Tot}^{\bullet}(X'\otimes_B Y)\cong X'\otimes_B^L Y$ 都是在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中的. 由 Y 作为左 B-模复形每项投射这里依然有 A-C 双模复形间的拟同构 $\mathrm{Tot}^{\bullet}(s\otimes_B Y):\mathrm{Tot}^{\bullet}(X\otimes_B Y)\to\mathrm{Tot}^{\bullet}(X'\otimes_B Y)$. 因此前面的讨论在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中依然成立. □

Remark 3.82. 如果 A,B,C 是 K-代数, 在 [注记3.80] 中已经指出只要 C 是投射 K-模, 就能保证投射左 $B\otimes_K C^{op}$-模作为左 B-模依然投射. 所以在 C 是投射 K-模的场景, 我们能够得到对任何上有界 A-B 双模复形 X,X' 和上有界 B-C 双模复形 Y, 只要 X 和 X' 间有 (作为 A-B 双模复形的) 拟同构, 那么在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中有同构 $X\otimes_B^L Y\cong X'\otimes_B^L Y$. 注意这时 $X\otimes_B^L Y$ 在导出范畴中同构于某个上有界复形.

Proposition 3.83. 设 R 是含幺环, X 是上有界复形满足 X 的每项是平坦右 R-模, M 是左 R-模. 那么在 $\mathscr{D}(\mathbf{Ab})$ 中有同构 $X\otimes_R^L M\cong\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_R M)$. 对称地, 如果 Y 是上有界平坦左 R-模复形, N 是右 R-模, 则有 $N\otimes_R^L Y\cong\mathrm{Tot}^{\oplus}(N\otimes_R Y)$.

Proof. 以上有界平坦右 R-模复形 X 为例. 设 $s:P\to X$ 是 X 的上有界投射分解. 那么 $\mathrm{Con}(s)$ 每项都是平坦右 R-模且上有界. 因为 s 是拟同构, 所以 [注记2.34] 保证了 $\mathrm{Con}(s)$ 是正合的上有界平坦复形. 应用 [推论1.217] 得到 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(\mathrm{Con}(s)\otimes_R M)$ 是正合复形. 再应用 [注记2.34] 便知 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(s\otimes_R M):\mathrm{Tot}^{\oplus}(P\otimes_R M)\to\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_R M)$ 是拟同构. 所以在 $\mathscr{D}(\mathbf{Ab})$ 中有同构 $X\otimes_R^L M\cong\mathrm{Tot}^{\oplus}(P\otimes_R M)\cong\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_R M)$. □

Remark 3.84. 如果 K-代数 A 是投射 K-模, X 是 A-A 双模复形满足每项作为右 A-模平坦, 那么对任何 A-A 双模 M 同样也有 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构 $X\otimes_A^L M\cong\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_A M)$.

之后也会使用 [命题3.83] 的加强版本, 这里记录为

Proposition 3.85 ([Sta24]). 设 R 是含幺环, X 是上有界复形满足 X 的每项是平坦右 R-模, Y 是上有界左 R-模复形. 那么在 $\mathscr{D}(\mathbf{Ab})$ 中有同构 $X\otimes_R^L Y\cong\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_R Y)$. 对称地, 如果 Y 是上有界平坦左 R-模复形, X 是上有界右 R-模复形, 则有 $X\otimes_R^L Y\cong\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_R Y)$.

Proof. 以 Y 是上有界平坦左 R-模复形为例. 如果 $t: Q \to Y$ 是 Y 的上有界投射分解, 那么 $\mathrm{Con}(t)$ 是上有界平坦正合的右 R-模复形. 根据 [引理1.218], $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X \otimes_R Y)$ 是正合复形, 所以 [注记2.34] 保证了 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X \otimes_R t): \mathrm{Tot}^{\oplus}(X \otimes_R Q) \to \mathrm{Tot}^{\oplus}(X \otimes_R Y)$ 也是拟同构. 从而得到 $\mathscr{D}(\mathbf{Ab})$ 中同构

$$X \otimes_R^L Y \cong X \otimes_R^L Q \cong \mathrm{Tot}^{\oplus}(X \otimes_R Q) \cong \mathrm{Tot}^{\oplus}(X \otimes_R Y).$$

□

Remark 3.86. 如果 A 是投射 K-模, 上有界 A-A 双模复形 X 和上有界 A-A 双模 Y 只要满足 X 每项是平坦右 A-模或 Y 每项是平坦左 A-模, 同样的证明过程可得 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构 $X \otimes_A^L Y \cong \mathrm{Tot}^{\oplus}(X \otimes_A Y)$.

导出张量积也能类似 RHom 一样 ([定理3.68]) 定义出双函子

$$- \otimes_B^L - : \mathscr{D}^-(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B) \times \mathscr{D}^-(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C) \to \mathscr{D}^-(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C).$$

对任何上有界复形 $Y \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^-(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$, 取定 Y 的上有界投射分解 $c_Y: P \to Y$. 根据 [命题1.216] 可知 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(- \otimes_B P): \mathscr{K}^-(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B) \to \mathscr{K}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 把拟同构映至拟同构, 因此有导出函子

$$-\widehat{\otimes}_B P: \mathscr{D}^-(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B) \to \mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C).$$

设 $\xi^X: X \otimes_B^L - \to \lambda^- \mathrm{Tot}^{\oplus}(X, -)$ 是导出函子 $X \otimes_B^L -$ 带有的自然变换, 那么对任何上有界投射 A-B 双模复形 P 有 $\xi_P^X: X \otimes_B^L P \to \lambda^- \mathrm{Tot}^{\oplus}(X, P)$ 是 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中同构. 如果 $Y' \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^-(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 被取定的上有界投射分解是 $c_{Y'}: P' \to Y'$, 那么类似 RHom 场景可验证: 对任何 $\mathscr{D}^-(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 中态射 $\alpha: X \to X'$ 和 $\mathscr{D}^-(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中态射 $\beta: Y \to Y'$, 设 $\beta': P \to P'$ 是 $\mathscr{D}^-(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中唯一 (注意 c_Y 和 $c_{Y'}$ 在导出范畴中已经成为同构) 使得下图交换的态射:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{c_Y} & Y \\ {\scriptstyle \beta'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ P' & \xrightarrow{c_{Y'}} & Y' \end{array}$$

那么有下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tot}^{\oplus}(X, P) & \xrightarrow{\mathrm{Tot}^{\oplus}(\alpha, P)} & \mathrm{Tot}^{\oplus}(X', P) \\ {\scriptstyle \mathrm{Tot}^{\oplus}(X, \beta')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tot}^{\oplus}(X', \beta')} \\ \mathrm{Tot}^{\oplus}(X, P') & \xrightarrow{\mathrm{Tot}^{\oplus}(\alpha, P')} & \mathrm{Tot}^{\oplus}(X', P') \end{array} \tag{3.3}$$

根据 $\xi_P^X, \xi_P^{X'}$ 都是导出范畴中同构, 存在唯一的态射 $\alpha \widehat{\otimes}_B^L P: X \otimes_B^L P \to X' \otimes_B^L P$ 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} X \otimes_B^L P & \xrightarrow{\alpha \widehat{\otimes}_B^L P} & X' \otimes_B^L P \\ {\scriptstyle \xi_P^X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi_P^{X'}} \\ \mathrm{Tot}^{\oplus}(X, P) & \xrightarrow{\mathrm{Tot}^{\oplus}(\alpha, P)} & \mathrm{Tot}^{\oplus}(X', P) \end{array}$$

由此我们得到唯一的态射 $\alpha\otimes^L_B Y: X\otimes^L_B Y\to X'\otimes^L_B Y$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
X\otimes^L_B Y \arrow[r, dashed, "\alpha\otimes^L_B Y"] & X'\otimes^L_B Y \\
X\otimes^L_B P \arrow[u, "X\otimes^L_B c_Y"] \arrow[r, "\alpha\widehat{\otimes}^L_B P"] \arrow[d, "\xi^X_P"'] & X'\otimes^L_B P \arrow[u, "X'\otimes^L_B c_Y"'] \arrow[d, "\xi^{X'}_P"] \\
\mathrm{Tot}^{\oplus}(X,P) \arrow[r, "\mathrm{Tot}^{\oplus}(\alpha,P)"] & \mathrm{Tot}^{\oplus}(X',P)
\end{tikzcd}$$

通过图 (3.3) 的交换性, 对任何导出范畴 $\mathscr{D}^-(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 中态射 $\alpha: X\to X'$ 和 $\mathscr{D}^-(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中态射 $\beta: Y\to Y'$, 我们得到交换图:

$$\begin{tikzcd}
X\otimes^L_B Y' \arrow[rrr, "\alpha\otimes^L_B Y'"] & & & X'\otimes^L_B Y' \\
& X\otimes^L_B Y \arrow[ul, dashed, "X\otimes^L_B\beta"'] \arrow[r, dashed, "\alpha\otimes^L_B Y"] & X'\otimes^L_B Y \arrow[ur, dashed, "X'\otimes^L_B\beta"] & \\
X\otimes^L_B P' \arrow[uu, "X\otimes^L_B c_{Y'}"] \arrow[dd, "\xi^X_{P'}"'] & X\otimes^L_B P \arrow[l, "X\otimes^L_B\beta'"] \arrow[u, dashed, "X\otimes^L_B c_Y"] \arrow[r, dashed, "\alpha\widehat{\otimes}^L_B P"] \arrow[d, dashed, "\xi^X_P"'] & X'\otimes^L_B P \arrow[r, dashed, "X'\otimes^L_B\beta'"'] \arrow[u, dashed, "X'\otimes^L_B c_Y"'] \arrow[d, dashed, "\xi^{X'}_P"] & X'\otimes^L_B P' \arrow[uu, "X'\otimes^L_B c_{Y'}"'] \arrow[dd, "\xi^{X'}_{P'}"] \\
& \mathrm{Tot}^{\oplus}(X,P) \arrow[r, dashed, "\mathrm{Tot}^{\oplus}(\alpha,P)"] \arrow[dl, dashed, "\mathrm{Tot}^{\oplus}(X,\beta')"'] & \mathrm{Tot}^{\oplus}(X',P) \arrow[dr, dashed, "\mathrm{Tot}^{\oplus}(X',\beta')"] & \\
\mathrm{Tot}^{\oplus}(X,P') \arrow[rrr, "\mathrm{Tot}^{\oplus}(\alpha,P')"] & & & \mathrm{Tot}^{\oplus}(X',P')
\end{tikzcd}$$

因此我们可定义 $\alpha\otimes^L_B\beta=(\alpha\otimes^L_B Y')(X\otimes^L_B\beta)=(X'\otimes^L_B\beta)(\alpha\otimes^L_B Y)$. 注意当 $X=X',\alpha=1_X$ 时, $1_X\otimes\beta=X\otimes^L_B\beta$. 我们把前面关于导出张量积函子的讨论总结为

Theorem 3.87 ([Wei94]). 设 A,B,C 是含幺环, 则有双函子 $-\otimes^L_B-:\mathscr{D}^-(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)\times\mathscr{D}^-(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)\to\mathscr{D}^-(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 满足对任何上有界 A-B 双模复形 X 和 B-C 双模复形 Y, $(-\otimes^L_B-)(X,Y)=X\otimes^L_B Y$ 并且对任何上有界 B-C 双模复形在 $\mathscr{D}^-(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中的态射 $\beta: Y\to Y'$ 有 $1_X\otimes^L_B\beta=X\otimes^L_B\beta$. 如果固定 $Y\in\mathrm{ob}\mathscr{D}^-(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$, 那么取定 Y 的上有界投射分解 $s:P\to Y$ 后有 $-\otimes^L_B Y\cong-\otimes^L_B P$.

Remark 3.88. 这里的双函子 $-\otimes^L_B-:\mathscr{D}^-(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)\times\mathscr{D}^-(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)\to\mathscr{D}^-(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 固定第一变量 X 或固定第二变量 Y 后分别对应的就是导出函子 $X\otimes^L_B-$ 和 $-\otimes^L_B Y$.

Remark 3.89. 设 A,B,C 是 K-代数满足都是投射 K-模, 那么这时任何投射左 $A\otimes_K B^{op}$-模作为右 B-模都是投射的, 任何投射左 $B\otimes_K C^{op}$-模作为左 B-模也是投射的. 这时对任何上有界 A-B 双模复形 X 和上有界 B-C 双模复形 Y, 在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中有同构 $(X\otimes^L_B-)(Y)\cong(-\otimes_L Y)(X)$. 于是根据 [引理3.81] 的证明过程, 对任何上有界 A-B 双模复形 X 和上有界 B-C 双模复形 Y, 只要 X 作为右 B-模复形投射或 Y 作为左 B-模复形投射, 就有 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中同构 $X\otimes^L_B Y\cong\mathrm{Tot}^{\oplus}(X\otimes_B Y)$. 例如当 $A=B$ 时, 取 $X=A$, 那么在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中有同构 $A\otimes^L_A Y\cong\mathrm{Tot}^{\oplus}(A\otimes_A Y)\cong Y$(回忆 [注记1.77]).

Remark 3.90. 在 [注记1.77] 我们看到复形作张量积具有结合律, 所以如果 K-代数 A, B, C, D 都是投射 K-模, 那么对 A-B 双模复形 X, B-C 双模复形 Y 和 C-D 双模复形 Z, 只要 X, Y, Z 全部上有界, 通过取定它们在相应复形范畴中的上有界投射分解便知在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}D)$ 中有同构 $(X \otimes_B^L Y) \otimes_C^L Z \cong X \otimes_B^L (Y \otimes_C^L Z)$, 即上有界复形关于导出张量积具有结合律.

类似于内射维数情形 ([定义3.71]), 我们能够使用导出张量积定义复形"Tor 维数有限"的概念.

Definition 3.91 (复形的 Tor 维数, [Sta24])**.** 设 R 是含幺环, X 是左 R-模复形. 如果存在正整数 n 使得对所有右 R-模 M(视作记作集中在 0 次位置的复形), 有 $H^t(M \otimes_R^L X) = 0, \forall t \geq |n|$, 则称 X 有**有限 Tor 维数**. 当 X 是右 R-模复形时, 若有正整数 n 使得对所有左 R-模 M 有 $H^t(X \otimes_R^L M) = 0, \forall t \geq |n|$, 则称 X 有**有限 Tor 维数**.

Remark 3.92. 由于右 R-模复形 X 满足在 $\mathscr{D}(\mathbf{Ab})$ 中 $X \otimes_R^L R \cong \mathrm{Tot}^{\oplus}(X \otimes_R R) \cong X$, 左 R-模复形 Y 满足在 $\mathscr{D}(\mathbf{Ab})$ 中 $R \otimes_R^L Y \cong Y$, 所以 Tor 维数有限的复形在导出范畴中同构于某个有界复形 ([例3.46]). 如果右 R-模复形 X 满足视作左 R^{op}-模复形后, X 作为左 R^{op}-模复形有有限 Tor 维数, 那么 X 作为右 R-模复形也有有限 Tor 维数: 因为这时 X 的上同调群只有有限多项非零. 同样的讨论可对 A-A 双模进行. 设 A 是投射 K-模, 那么 A-A 双模复形 X 如果作为左 A-模复形有有限 Tor 维数, 那么在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中 X 同构于某个有界复形. 如果 X 作为右 A-模复形有有限 Tor 维数, 同样可得在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中 X 同构于某个有界复形.

Lemma 3.93 ([Sta24])**.** 设含幺环 R 上右 R-模复形 X 是上有界的且每项是平坦右 R-模. 如果整数 n 满足对任何整数 $t \leq n-1$ 和左 R-模 M 有 $H^t(X \otimes_R^L M) = 0$, 则 $X^n/\mathrm{Im}d_X^{n-1}$ 是平坦右 R-模. 特别地, X 在 $\mathscr{D}(\mathbf{Mod}\text{-}R)$ 同构于 (也可直接构造下述复形与 X 之间的拟同构)

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow X^n/\mathrm{Im}d_X^{n-1} \xrightarrow{\tilde{d}_X^n} X^{n+1} \xrightarrow{d_X^{n+1}} X^{n+2} \longrightarrow \cdots$$

这是每项均为平坦右 R-模的有界复形. 对上有界每项都是平坦左 R-模的复形有相同结论.

Proof. 根据 [注记3.92] 的讨论, 取 $M = R$ 立即得到 $H^t(X) = 0, \forall t \leq n-1$. 故有正合列

$$\cdots \longrightarrow X^{n-1} \longrightarrow X^n \longrightarrow X^n/\mathrm{Im}d_X^{n-1} \longrightarrow 0.$$

该正合列给出了右 R-模 $X^n/\mathrm{Im}d_X^{n-1}$ 的平坦分解. 由条件, 对任何左 R-模 M 有

$$\mathrm{Tor}_1^R(X^n/\mathrm{Im}d_X^{n-1}, M) \cong H^{n-1}(X \otimes_R^L M) = 0.$$

所以 $X^n/\mathrm{Im}d_X^{n-1}$ 是平坦右 R-模. □

Proposition 3.94 ([Sta24])**.** 设含幺环 R 上右 R-模复形 X 是上有界的. 那么以下两条等价:
(1) X 有有限 Tor 维数.
(2) 存在有界右 R-模复形 Z 使得 Z 每项是平坦右 R-模且在 $\mathscr{D}(\mathbf{Mod}\text{-}R)$ 中有 $X \cong Z$.

Proof. (1)⇒(2): 取定 X 的上有界投射分解 P 后对 P 应用 [引理3.93] 即可. (2)⇒(1): 这时对任何整数 n 和左 R-模 M 有 $H^n(X \otimes_R^L M) \cong H^n(Z \otimes_R^L M)$. 而 Z 的每项都是平坦右 R-模保证了 $Z \otimes_R^L M \cong \mathrm{Tot}^{\oplus}(Z \otimes_R M)$(回忆 [命题3.83]). 所以通过 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(Z \otimes_R M)$ 是有界复形立即得到 X 的 Tor 维数的有限性. □

Remark 3.95. 如果 A 是 K-代数满足 A 是投射 K-模. 那么 [命题3.94] 的证明过程说明对上有界的 A-A 双模复形 X, 如果 X 作为右 A-模复形有有限 Tor 维数, 那么存在有界 A-A 双模复形 Z 使得 Z 每项是平坦右 A-模且在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有同构 $X \cong Z$. 对称地, 如果 X 作为左 A-模复形有有限 Tor 维数, 那么这里的 Z 可选取到每项是平坦左 A-模的有界 A-A 双模复形.

现在我们利用 Tor 维数来刻画完全复形.

Corollary 3.96. 设 R 是含幺环, X 是右 R-模复形. 那么以下等价:
(1) X 是完全复形.
(2) X 是伪凝聚复形且 Tor 维数有限.

Proof. (1)⇒(2) 是特殊情况, 见 [注记3.48]. (2)⇒(1): 这时可设 X 是每项为有限生成自由右 R-模的上有界复形. 并且 X 的 Tor 维数有限说明存在整数 n 使得对任何整数 $t \leq n-1$ 和左 R-模 M 有 $H^t(X \otimes_R^L M) = 0$. 于是应用 [引理3.93] 可知 X 在 $\mathscr{D}(\mathbf{Mod}\text{-}R)$ 中同构于下述有界复形, 其中 $X^n/\mathrm{Im}d_X^{n-1}$ 是平坦右 R-模:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow X^n/\mathrm{Im}d_X^{n-1} \xrightarrow{\tilde{d}_X^n} X^{n+1} \xrightarrow{d_X^{n+1}} X^{n+2} \longrightarrow \cdots.$$

注意到有正合列 $X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \longrightarrow X^n/\mathrm{Im}d_X^{n-1} \longrightarrow 0$. 这说明 $X^n/\mathrm{Im}d_X^{n-1}$ 是有有限表现的平坦模, 进而是有限生成投射模. 由此得到 X 在 $\mathscr{D}(\mathbf{Mod}\text{-}R)$ 中同构于某个有界且每项是有限生成投射模的复形. □

在 [命题1.93] 我们看到 A-A 双模复形层面也有 Hom 复形和张量积复形的“伴随链同构”. 下面我们将复形层面的链同构表达为导出范畴中的同构.

Proposition 3.97. 设 $\Bbbk$ 是域, A 是 $\Bbbk$-代数, X, Y, Z 都是 A-A 双模复形满足 X, Y 是上有界复形且 Z 是下有界复形. 那么在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有

$$\mathrm{RHom}_{A^e}(X \otimes_\Bbbk^L Y, Z) \cong \mathrm{RHom}_{A^{op}}(Y, \mathrm{RHom}_A(X, Z)),$$

$$\mathrm{RHom}_{A^e}(X \otimes_\Bbbk^L Y, Z) \cong \mathrm{RHom}_A(X, \mathrm{RHom}_{A^{op}}(Y, Z)),$$

$$\mathrm{RHom}_{A^{op}}(Y, \mathrm{RHom}_A(X, Z)) \cong \mathrm{RHom}_A(X, \mathrm{RHom}_{A^{op}}(Y, Z)).$$

Proof. 设 $P \to X$ 和 $Q \to Y$ 分别是 X, Y 作为上有界 A-A 双模复形的上有界投射分解, $Z \to I$ 是 Z 作为下有界 A-A 双模复形的下有界内射分解. 那么复形 P, Q 的每项作为单边 A-模都是投射的, 复形 I 的每项作为单边 A-模都是内射的. 并注意作为 A-A 双模复形, $\mathrm{Tot}^\oplus(X \otimes_\Bbbk Y)$ 也上有界. 因此在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有

$$\mathrm{RHom}_A(X, Z) \cong \mathrm{RHom}_A(P, I) \cong \mathrm{Hom}_A(P, I),$$

$$\mathrm{RHom}_{A^{op}}(Y, Z) \cong \mathrm{RHom}_{A^{op}}(Q, I) \cong \mathrm{Hom}_{A^{op}}(Q, I),$$

$$X \otimes_\Bbbk^L Y \cong P \otimes_\Bbbk^L Q.$$

根据 [引理1.231], $\mathrm{Tot}^\oplus(P \otimes_\Bbbk Q)$ 作为上有界 A-A 双模复形 (来自外作用) 也是投射复形. 应用 [命题1.93], 得到

$$\mathrm{RHom}_{A^e}(X \otimes_\Bbbk^L Y, Z) \cong \mathrm{RHom}_{A^e}(P \otimes_\Bbbk^L Q, I)$$

$$
\begin{aligned}
&\cong \mathrm{Hom}_{A^e}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(P\otimes_{\Bbbk} Q), I)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{A^{op}}(Q, \mathrm{Hom}_A(P, I))\\
&\cong \mathrm{RHom}_{A^{op}}(Q, \mathrm{RHom}_A(P, I))\\
&\cong \mathrm{RHom}_{A^{op}}(Y, \mathrm{RHom}_A(X, Z)).
\end{aligned}
$$

同理可证 $\mathrm{RHom}_{A^e}(X\otimes^L_{\Bbbk} Y, Z)\cong \mathrm{RHom}_A(X, \mathrm{RHom}_{A^{op}}(Y, Z))$. 最后一个同构是前两个同构的直接推论. □

[注记1.232] 中关于复形张量积的链同构也能够在导出范畴中给出导出张量积的相应结果.

Proposition 3.98 ([RR22]). 设 $\Bbbk$ 是域, A, B, C 是 $\Bbbk$-代数. X 是 B-A 双模复形, Y 是 A-A 双模复形且 Z 是 A-C 双模复形. 如果 X, Y, Z 全部是上有界复形, 那么在 $\mathscr{D}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中有同构

$$X\otimes^L_A Y\otimes^L_A Z\cong Y\otimes^L_{A^e}(Z\otimes_{\Bbbk} X)\cong (X\otimes_{\Bbbk} Z)\otimes^L_{A^e} Y.$$

我们也把 [注记1.92] 复形层面的链同构的导出范畴版本记录为

Proposition 3.99 ([RR22]). 设 R, S 是含幺环, 左 R-模复形 X 是完全复形, R-S 双模复形 Y 是上有界的. 那么在 $\mathscr{D}(\mathbf{Mod\text{-}S})$ 中有 $\mathrm{RHom}_R(X, R)\otimes^L_R Y\cong \mathrm{RHom}_R(X, Y)$.

Proof. 因为 X 是完全复形, 所以由完全复形的定义以及 [推论3.38] 知存在有界的有限生成投射左 R-模复形 P 和拟同构 $P\to X$. 因此由 $\mathrm{RHom}_R(X, R)\otimes^L_R Y\cong \mathrm{Hom}_R(P, R)\otimes_R Y$ (回忆 [命题3.85], 或直接利用 $\mathrm{Hom}_R(P, R)$ 是有界的有限生成投射复形) 和 $\mathrm{RHom}_R(X, Y)\cong \mathrm{Hom}_R(P, Y)$ 知要证明结论只需说明在 $\mathscr{D}(\mathbf{Mod}\text{-}S)$ 中有同构 $\mathrm{Hom}_R(P, R)\otimes_R Y\cong \mathrm{Hom}_R(P, Y)$. 而 [注记1.92] 中已经构造了链同构 $\mathrm{Hom}_R(P, R)\otimes_R Y\cong \mathrm{Hom}_R(P, Y)$. □

3.5 对偶复形

本节固定含幺交换环 K 上代数 A 并要求 A 是投射 K-模, 于是任何投射 A^e-模作为左/右 A-模都投射; 任何内射 A^e-模作为左/右 A-模都内射 (反之不然, 见 [注记1.238] 和 [注记1.239]). 设 Ω 是下有界 A-A 双模复形, 那么根据 [定理3.68], 对任何 K-代数 B, Ω 能够诱导逆变三角函子:

$$\mathrm{RHom}_A(-, \Omega): \mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)\to \mathscr{D}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A),$$

$$\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-, \Omega): \mathscr{D}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)\to \mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B).$$

如果设 Ω 作为左 A^e-模有下有界的内射分解 $s: Y\to I$, 那么有自然同构 $\mathrm{RHom}_A(-, \Omega)\cong \mathrm{RHom}_A(-, I)$ 以及 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-, \Omega)\cong \mathrm{RHom}_{A^{op}}(-, I)$, 注意这里 I 作为左 A-模和右 A-模都是内射模.

由于 $\mathrm{RHom}_A(-,-)$ 和 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,-)$ 都是双函子, 前面的自然同构可如下显式地写出: 对每个 $X\in \mathrm{ob}\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$, 那么 $\mathrm{RHom}_A(X, s): \mathrm{RHom}_A(X, \Omega)\to \mathrm{RHom}_A(X, I)$ 是 $\mathscr{D}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构并且对任何 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 中态射 $\alpha: X'\to X$, 有

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{RHom}_A(X, \Omega) \arrow[r, "\mathrm{RHom}_A(X,s)"] \arrow[d, "\mathrm{RHom}_A(\alpha,\Omega)"'] & \mathrm{RHom}_A(X, I) \arrow[d, "\mathrm{RHom}_A(\alpha,I)"] \\
\mathrm{RHom}_A(X', \Omega) \arrow[r, "\mathrm{RHom}_A(X',s)"] & \mathrm{RHom}_A(X', I)
\end{tikzcd}$$

交换. 所以 $\mathrm{RHom}_A(-,s)$ 给出 $\mathrm{RHom}_A(-,\Omega)$ 到 $\mathrm{RHom}_A(-,I)$ 的自然同构. 对称地, $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,s)$ 给出 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega)$ 到 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,I)$ 的自然同构. 对每个 $X\in \mathrm{ob}\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$, 记导出函子 $\mathrm{RHom}_A(X,-)$ 带有的自然变换为 $\xi^X:\lambda_{B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A}\mathrm{Hom}_A^\bullet(X,-)\to \mathrm{RHom}_A(X,-)\lambda_{A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A}$, 这里 λ 表示局部化函子. 因为 I 是下有界的 A-A 双模复形并且作为左 A-模复形是内射的, 所以 [定理3.52] 说明 $\xi_I^X:\mathrm{Hom}_A^\bullet(X,I)\to \mathrm{RHom}_A(X,I)$ 是 $\mathscr{D}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构. 于是我们得到 $\mathscr{D}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中 $\mathrm{Hom}_A^\bullet(X,I)$ 到 $\mathrm{RHom}_A(X,\Omega)$ 的同构:

$$\mathrm{Hom}_A^\bullet(X,I)\xrightarrow{\xi_I^X}\mathrm{RHom}_A(X,I)\xrightarrow{\mathrm{RHom}_A(X,s)^{-1}}\mathrm{RHom}_A(X,\Omega)$$

并且对任何 $\mathscr{K}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 中的态射 $f:X'\to X$ 有下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A^\bullet(X,I) \arrow[r, "\xi_I^X"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_A^\bullet(f,I)"'] & \mathrm{RHom}_A(X,I) \arrow[r, "\mathrm{RHom}_A(X,s)^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{RHom}_A(f,I)"'] & \mathrm{RHom}_A(X,\Omega) \arrow[d, "\mathrm{RHom}_A(f,\Omega)"] \\
\mathrm{Hom}_A^\bullet(X',I) \arrow[r, "\xi_I^{X'}"] & \mathrm{RHom}_A(X',I) \arrow[r, "\mathrm{RHom}_A(X',s)^{-1}"] & \mathrm{RHom}_A(X',\Omega)
\end{tikzcd}$$

Example 3.100. 如果这时还有 $B=A$, 那么当 $X=A$ 时, 有复形层面的链同构 $I\cong \mathrm{Hom}_A^\bullet(A,I)$: 现在对每个整数 n, $\mathrm{Hom}_A^n(A,I)$ 可与 $\mathrm{Hom}_A(A,I^n)$ 视作等同. 于是 $\mathrm{Hom}_A^\bullet(A,I)$ 的微分 $d^n:\mathrm{Hom}_A^n(A,I)\to \mathrm{Hom}_A^{n+1}(A,I)$ 就是复形 I 的微分 $d_I^n:I^n\to I^{n+1}$ 决定的标准同态

$$(d_I^n)_*:\mathrm{Hom}_A({}_AA,{}_AI^n)\to \mathrm{Hom}_A({}_AA,{}_AI^{n+1}), f\mapsto d_I^nf.$$

所以如果对每个整数 n, 定义 $\gamma^n:\mathrm{Hom}_A(A,I^n)\to I^n, f\mapsto f(1)$, 这也是 A-A 双模同构. 于是 γ 给出 $\mathrm{Hom}_A^\bullet(A,I)$ 到 I 作为 A-A 双模复形的链同构. 特别地, 结合拟同构 $s:\Omega\to I$ 得到导出范畴 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中的同构 $\Omega\cong \mathrm{Hom}_A^\bullet(A,I)$. 对偶地, $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中也有标准同构 $\Omega\cong \mathrm{Hom}_{A^{op}}^\bullet(A,I)$.

对称地, 前面已经指出 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,s)$ 给出 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega)$ 到 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,I)$ 的自然同构. 对固定的 B-A 双模复形 Z, 记 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(Z,-)$ 带有的自然变换为 $\zeta^Z:\lambda_{A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B}:\mathrm{Hom}_{A^{op}}(Z,-)\to \mathrm{RHom}_{A^{op}}(Z,-)\lambda_{A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A}$, 同样由 I 作为下有界右 A-模复形是内射复形, 根据 [定理3.52], $\zeta_I^Z:\mathrm{Hom}_{A^{op}}(Z,I)\to \mathrm{RHom}_{A^{op}}(Z,I)$ 是 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 中同构. 于是得到 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 中同构:

$$\mathrm{Hom}_{A^{op}}^\bullet(Z,I)\xrightarrow{\zeta_I^Z}\mathrm{RHom}_{A^{op}}(Z,I)\xrightarrow{\mathrm{RHom}_{A^{op}}(Z,s)^{-1}}\mathrm{RHom}_{A^{op}}(Z,\Omega)$$

并且对任何 $\mathscr{D}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中态射 $g:Z'\to Z$ 有下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{A^{op}}^\bullet(Z,I) \arrow[r, "\zeta_I^Z"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{A^{op}}^\bullet(g,I)"'] & \mathrm{RHom}_{A^{op}}(Z,I) \arrow[r, "\mathrm{RHom}_{A^{op}}(Z,s)^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{RHom}_{A^{op}}(g,I)"'] & \mathrm{RHom}_{A^{op}}(Z,\Omega) \arrow[d, "\mathrm{RHom}_{A^{op}}(g,\Omega)"] \\
\mathrm{Hom}_{A^{op}}^\bullet(Z',I) \arrow[r, "\zeta_I^{Z'}"] & \mathrm{RHom}_{A^{op}}(Z',I) \arrow[r, "\mathrm{RHom}_{A^{op}}(Z',s)^{-1}"] & \mathrm{RHom}_{A^{op}}(Z',\Omega)
\end{tikzcd}$$

对任何 A-B 双模复形 X, **下面说明 X 到 $\mathbf{Hom}_{A^{op}}^\bullet(\mathbf{Hom}_A^\bullet(X,I),I)$ 有自然的作为 A-B 双模复形链映射**, 于是借助前面的讨论我们能够得到 X 到 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(\mathrm{RHom}_A(X,\Omega),\Omega)$ 的 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 中标准态射.

Lemma 3.101. 设 K-代数 A,B 满足 A 是投射 K-模. Ω 是下有界 A-A 双模复形并有下有界内射分解 $s:\Omega\to I$, X 是 A-B 双模复形. 对每个整数 n, 如下定义映射 $\theta^n:X^n\to \mathrm{Hom}_{A^{op}}^n(\mathrm{Hom}_A^\bullet(X,I),I)$. 对 $x^n\in X^n$, $\theta^n(x^n)=$

$(\theta^n(x^n)^p)_{p\in\mathbb{Z}}$, 这里

$$\theta^n(x^n)^p : \mathrm{Hom}_A^p(X, I) = \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A(X^k, I^{k+p}) \to I^{p+n}, (g^k)_{k\in\mathbb{Z}} \mapsto (-1)^{pn} g^n(x^n).$$

那么 $\theta : X \to \mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(X, I), I)$ 是 A-B 双模复形间的链映射. 对称地, 对任何 B-A 双模复形 Z, 也有 B-A 双模复形间的链映射 $Z \to \mathrm{Hom}^\bullet_A(\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(Z, I), I)$.

Proof. 这里 $\theta^n(x^n)^p$ 明显是定义合理的右 A-模同态, 所以 θ^n 作为映射是定义合理的, 且是加群同态. 通过直接验证易知 θ^n 是 A-B 双模同态. 因此还需验证 $\theta = (\theta^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是链映射. $\theta^n(x^n)$ 在复形 $\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(X, I), I)$ 的 n 次微分作用下的 p 次分量是如下右 A-模同态:

$$\prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A(X^k, I^{k+p}) \to I^{p+n+1}, (g^k)_{k\in\mathbb{Z}} \mapsto d_I^{n+p}\theta^n(x^n)^p(g^k)_{k\in\mathbb{Z}} + (-1)^{n+1}\theta^n(x^n)^{p+1} d^p_{\mathrm{Hom}_A(X,I)}(g^k)_{k\in\mathbb{Z}}.$$

这里 $d_I^{n+p}\theta^n(x^n)^p(g^k)_{k\in\mathbb{Z}} = (-1)^{pn} d_I^{n+p} g^n(x^n) \in I^{p+n+1}$, 以及

$$d^p_{\mathrm{Hom}_A(X,I)}(g^k)_{k\in\mathbb{Z}} = \{d_I^{p+k} g^k + (-1)^{p+1} g^{k+1} d_X^k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_A^{p+1}(X, I).$$

于是

$$\begin{aligned}(-1)^{n+1}\theta^n(x^n)^{p+1} d^p_{\mathrm{Hom}_A(X,I)}(g^k)_{k\in\mathbb{Z}} &= (-1)^{n+1}(-1)^{n(p+1)}(d_I^{n+p} g^n(x^n) + (-1)^{p+1} g^{n+1}(d_X^n(x^n)))\\ &= (-1)^{np+1}(d_I^{n+p} g^n(x^n) + (-1)^{p+1} g^{n+1}(d_X^n(x^n)))\\ &= (-1)^{np+1} d_I^{n+p} g^n(x^n) + (-1)^{(n+1)p} g^{n+1}(d_X^n(x^n)).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}d_I^{n+p}\theta^n(x^n)^p(g^k)_{k\in\mathbb{Z}} + (-1)^{n+1}\theta^n(x^n)^{p+1} d^p_{\mathrm{Hom}_A(X,I)}(g^k)_{k\in\mathbb{Z}} =&(-1)^{pn} d_I^{n+p} g^n(x^n) + (-1)^{np+1} d_I^{n+p} g^n(x^n)\\ &+(-1)^{(n+1)p} g^{n+1}(d_X^n(x^n))\\ =&(-1)^{(n+1)p} g^{n+1}(d_X^n(x^n)).\end{aligned}$$

前面的计算表明 $\theta^n(x^n)$ 在 $\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(X, I), I)$ 的 n 次微分作用下的 p 次分量是 $(-1)^{(n+1)p} g^{n+1}(d_X^n(x^n))$. 而 $d_X^n(x^n) \in X^{n+1}$ 在 θ^{n+1} 作用下的 p 次分量也是 $(-1)^{(n+1)p} g^{n+1}(d_X^n(x^n))$. 所以这里定义的 A-B 双模同态族 $\theta = (\theta^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 给出了 X 到 $\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(X, I), I)$ 的链映射. □

Example 3.102. 设 A 是 K-代数, I 是 A-A 双模复形, 那么 [引理3.101] 中的标准链映射 θ 集中在 0 次部分: $\theta^0 : A \to \prod_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{A^{op}}(I^p, I^p), a \mapsto a_r$. 这里 a_r 表示 a 在 I^p 上的左乘变换. 特别地, 如果 U 是 K-代数 A 上的可逆双模, 那么对复形 $U[d]$, $\mathrm{Hom}_{A^{op}}(\mathrm{Hom}_A(A, U[d]), U[d])$ 集中在 0 次位置, 并且

$$\theta : A \to \mathrm{Hom}_{A^{op}}(\mathrm{Hom}_A(A, U[d]), U[d])$$

就是 A 到 $\mathrm{End}_{A^{op}}(U)$ 通过左乘变换导出的标准映射. 于是由 U 作为右 A-模是有限生成投射生成子, 依 Morita I 得到 θ^0 还是环同构. 因此 θ 给出集中在 0 次部分的两个 A-A 双模复形间的同构.

对称地, $A \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_{A^{op}}(A, U[d]), U[d])$ 是由 A 中元素的右乘变换导出的链映射, 它在 0 次部分就是标准映射 $A \to \mathrm{End}_A(U)$, 根据 Morita I, $A \to \mathrm{End}_A(U)$ 是反环同构.

根据 [引理3.101], 对 A-B 双模复形 X, 有作为 A-B 双模复形的标准链映射 $\theta_X: X \to \mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(X,I),I)$; 对任何 B-A 双模复形 Z, 有作为 B-A 双模复形的标准链映射 $\theta^{op}_Z: Z \to \mathrm{Hom}^\bullet_A(\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(Z,I),I)$.

由于在 $\mathscr{D}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有同构 $\mathrm{RHom}_A(X,s)^{-1}\xi^X_I: \mathrm{Hom}^\bullet_A(X,I) \to \mathrm{RHom}_A(X,\Omega)$, $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 中有同构 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(Z,s)^{-1}\zeta^Z_I: \mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(Z,I) \to \mathrm{RHom}_{A^{op}}(Z,\Omega)$, 因此我们能够得到 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 中的典范态射

$$X \xrightarrow{\theta_X} \mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(X,I),I) \xrightarrow{\cong} \mathrm{RHom}_{A^{op}}(\mathrm{RHom}_A(X,\Omega),\Omega)$$

把上述态射的合成记作 Φ^{op}_X. 对称地, 有 $\mathscr{D}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中的典范态射:

$$Z \xrightarrow{\theta^{op}_Z} \mathrm{Hom}^\bullet_A(\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(Z,I),I) \xrightarrow{\cong} \mathrm{RHom}_A(\mathrm{RHom}_{A^{op}}(Z,\Omega),\Omega)$$

上述态射的合成记作 Φ_Z. 可直接验证对任何链映射 $f: X \to X'$ 和链映射 $g: Z \to Z'$ 有下面两图交换:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\theta_X"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(X,I),I) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(f,I),I)"] & \mathrm{RHom}_{A^{op}}(\mathrm{RHom}_A(X,\Omega),\Omega) \arrow[d, "\mathrm{RHom}_{A^{op}}(\mathrm{RHom}_A(f,\Omega),\Omega)"] \\
X' \arrow[r, "\theta_{X'}"] & \mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(X',I),I) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{RHom}_{A^{op}}(\mathrm{RHom}_A(X',\Omega),\Omega)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\theta^{op}_Z"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Hom}^\bullet_A(\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(Z,I),I) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}^\bullet_A(\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(g,I),I)"] & \mathrm{RHom}_A(\mathrm{RHom}_{A^{op}}(Z,\Omega),\Omega) \arrow[d, "\mathrm{RHom}_A(\mathrm{RHom}_{A^{op}}(g,\Omega),\Omega)"] \\
Z' \arrow[r, "\theta^{op}_{Z'}"] & \mathrm{Hom}^\bullet_A(\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(Z',I),I) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{RHom}_A(\mathrm{RHom}_{A^{op}}(Z',\Omega),\Omega)
\end{tikzcd}$$

因为 I 作为左 A-模复形或右 A-模复形都是下有界内射复形, 故 $\mathrm{Hom}^\bullet_A(-,I)$ 和 $\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(-,I)$ 都保持拟同构. 由此可知对 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 中任何态射 $\alpha: X \to X'$ 和 $\mathscr{D}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中任何态射 $\beta: Z \to Z'$, 有交换图:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Phi^{op}_X"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathrm{RHom}_{A^{op}}(\mathrm{RHom}_A(X,\Omega),\Omega) \arrow[d, "\mathrm{RHom}_{A^{op}}(\mathrm{RHom}_A(\alpha,\Omega),\Omega)"] \\
X' \arrow[r, "\Phi^{op}_{X'}"] & \mathrm{RHom}_{A^{op}}(\mathrm{RHom}_A(X',\Omega),\Omega)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\Phi_Z"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathrm{RHom}_A(\mathrm{RHom}_{A^{op}}(Z,\Omega),\Omega) \arrow[d, "\mathrm{RHom}_A(\mathrm{RHom}_{A^{op}}(\beta,\Omega),\Omega)"] \\
Z' \arrow[r, "\Phi_{Z'}"] & \mathrm{RHom}_A(\mathrm{RHom}_{A^{op}}(Z',\Omega),\Omega)
\end{tikzcd}$$

总结一下, 前面的讨论使我们得到

Proposition 3.103 ([Ye92]). 保持前面的假设与记号. 那么:
(1)Φ^{op} 给出 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 上恒等函子到 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(\mathrm{RHom}_A(-,\Omega),\Omega)$ 的自然变换.
(2)Φ 给出 $\mathscr{D}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 上恒等函子到 $\mathrm{RHom}_A(\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega),\Omega)$ 的自然变换.

Remark 3.104. 对任何 A-B 双模复形 X, 定义 (回忆 [例1.81])

$$\varepsilon^n_X: \mathrm{Hom}^n_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(X[1],I),I) \to \mathrm{Hom}^n_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(X,I),I)[1], (\tau^p)_{p\in\mathbb{Z}} \mapsto ((-1)^{p+n}\tau^p)_{p\in\mathbb{Z}},$$

那么 ε 给出三角函子 $\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(-,I),I)\cdot[1]$ 到 $[1]\cdot(\mathrm{Hom}^\bullet_A(X,I),I)$ 的自然同构. 具体地, 可直接验证对任何链映射 $h: X \to X'$, 有交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(X[1],I),I) \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "(h[1])^{**}"'] & \mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(X,I),I)[1] \arrow[d, "(h^{**})[1]"] \\
\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(X'[1],I),I) \arrow[r, "\varepsilon_{X'}"] & \mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(X',I),I)[1]
\end{tikzcd}$$

于是可直接验证对任何 A-B 双模复形 X, 有下图交换 (其中的 θ_X 来自 [引理3.101]):

$$\begin{array}{ccc} X[1] & \xrightarrow{\theta_{X[1]}} & \mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(X[1],I),I) \\ {\scriptstyle 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_X} \\ X[1] & \xrightarrow{\theta_{X}[1]} & \mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(X,I),I)[1] \end{array}$$

由此可知如果 A-B 双模复形 X 满足 Φ^{op}_X 是同构, 则 $\Phi^{op}_{X[1]}$ 也是同构. 类似地, 对任何 B-A 双模复形 Z, 如果 Φ_Z 是同构, 那么 $\Phi_{Z[1]}$ 也是同构. 如果保持记号 $\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(-,I),I)$ 表示该函子所诱导 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 到自身的 (双边) 导出函子, 那么前面的讨论说明 θ 不仅给出 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 上恒等函子到 $\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(-,I),I)$ 的自然变换, 而且该自然变换与三角结构中的平移函子相容.

Example 3.105 ([Ye92]). 当 $A=B$ 时, 根据 [例3.100], 在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有同构 $\Omega\cong\mathrm{Hom}^\bullet_A(A,I)$ 和 $\Omega\cong\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(A,I)$. 所以在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有同构 $\Omega\cong\mathrm{RHom}_A(A,I)\cong\mathrm{RHom}_A(A,\Omega)$. 因此得到 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(\Omega,\Omega)\cong\mathrm{RHom}_{A^{op}}(\mathrm{RHom}_A(A,\Omega),\Omega)$, $\mathrm{RHom}_A(\Omega,\Omega)\cong\mathrm{RHom}_A(\mathrm{RHom}_{A^{op}}(A,\Omega),\Omega)$.

Definition 3.106 (对偶复形, [Ye92]). 设 K-代数 A 满足 A 是投射 K-模且 A 是双边 Noether 环. 称 $\Omega\in\mathrm{ob}\mathscr{D}^+(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 为 A 上**对偶复形**, 如果

- (DC1) 作为左 A-模复形和右 A-模复形, Ω 都有有限内射维数;
- (DC2) 作为左 A-模复形和右 A-模复形, 都有 $\oplus_{i\in\mathbb{Z}}H^i(\Omega)$ 都是有限生成 A-模;
- (DC3) [命题3.103] 意义下的典范态射 $\Phi_A: A\to\mathrm{RHom}_A(\mathrm{RHom}_{A^{op}}(A,\Omega),\Omega)\cong\mathrm{RHom}_A(\Omega,\Omega)$ 和典范态射 $\Phi^{op}_A: A\to\mathrm{RHom}_{A^{op}}(\mathrm{RHom}_A(A,\Omega),\Omega)\cong\mathrm{RHom}_{A^{op}}(\Omega,\Omega)$ 都是 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中的同构.

Remark 3.107. 根据 [命题3.77], 条件 (DC1) 等价于要求 Ω 在 $\mathscr{D}^+(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构于某个有界复形 Z 满足 Z 作为左 A-模复形和右 A-模复形都是有界内射复形. 特别地, 在 $\mathscr{D}^+(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中 Ω 同构于有界复形. 因为 A 是双边 Noether 环, 所以 (DC2) 等价于要求 Ω 只有有限多个上同调模非零, 并且每个上同调对象作为左 A-模和右 A-模都有限生成. (DC3) 说明 $\mathrm{RHom}_A(\Omega,\Omega)$ 和 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(\Omega,\Omega)$ 都是上同调集中在 0 次位置的复形. 这里再指出 (DC3) 当然保证了对偶复形一旦存在, 则对偶复形不是正合复形: 否则在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构于零复形. 这和对偶复形满足 (DC3) 产生矛盾.

Remark 3.108. A 上对偶复形的定义关于 A 和 A^{op} 是对称的, 所以双边 Noether 代数 A 的对偶复形也给出 A^{op} 的对偶复形. 对偶复形的命名的缘由: 设 A,B 是域 $\Bbbk$ 上代数且 A 是双边 Noether 代数. 记 $\mathscr{D}_{f,-}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 是所有各次上同调为有限生成左 A-模的 A-B 双模复形定义的 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 的全子范畴, $\mathscr{D}_{-,f}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 是所有各次上同调为有限生成右 A-模的 B-A 双模复形定义的 $\mathscr{D}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 的全子范畴. 利用导出范畴中好三角的刻画 ([命题3.26]) 和同调代数基本定理, 易知 $\mathscr{D}_{f,-}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 和 $\mathscr{D}_{-,f}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 都是所在导出范畴的三角子范畴 (同样利用复形短正合列诱导上同调模的长正合列不难得到这两个三角子范畴还关于直和项封闭). 如果 A 有对偶复形 $\Omega\in\mathrm{ob}\mathscr{D}^b(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$, 那么 $\mathrm{RHom}_A(-,\Omega):\mathscr{D}_{f,-}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)\to\mathscr{D}_{-,f}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 和 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega):\mathscr{D}_{-,f}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)\to\mathscr{D}_{f,-}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 定义合理并且给出 $\mathscr{D}_{f,-}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 和 $\mathscr{D}_{-,f}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 之间的范畴对偶 (见 [Ye99, Proposition 4.2]). 对于单边模范畴间的对偶结论也参见 [定理3.125] 和 [注记3.126].

Example 3.109. 设 R 是含幺环, 左 R-模 X 是有限生成投射生成子, 那么 $\mathrm{inj.dim}_R X=\mathrm{inj.dim}_R R$.

Proof. 注意到 X 作为有限生成投射左 R-模是有限生成自由左 R-模的直和因子, 故应用 [注记1.124] 便知 X 的作为左 R-模的内射维数不超过 $\text{inj.dim}_R R$. 反之, 因为 X 是生成子, 所以存在正整数 n 使得 X^n 到 R 有满同态. 结合 R 是投射模得到 $\text{inj.dim}_R R \leq \text{inj.dim}_R X$. $\square$

在进一步讨论对偶复形的基本性质前, 我们需要对 RHom 函子以及 [命题3.103] 中的自然变换有更多认识. 因此下面我们简要介绍 Way-out 函子的基本性质, 初次阅读可直接跳至刚性对偶复形的定义 ([定义3.134]).

Definition 3.110 (Way-out 函子, [Hart66]). 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴满足 $\mathscr{D}(\mathcal{A}),\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 存在.
(1) 设 $F:\mathscr{D}(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 是共变三角函子, 称 F 是 **way-out right 函子**, 如果对任给整数 n_1, 都存在整数 n_2 使得对 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中所有满足 $H^k(X)=0,\forall k<n_2$ 的复形 X, 有 $H^k(FX)=0,\forall k<n_1$.
(2) 设 $F:\mathscr{D}(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 是共变三角函子, 称 F 是 **way-out left 函子**, 如果对任给整数 n_1, 都存在整数 n_2 使得对 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中所有满足 $H^k(X)=0,\forall k>n_2$ 的复形 X, 有 $H^k(FX)=0,\forall k>n_1$.
(3) 设 $F:\mathscr{D}(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 是反变三角函子, 称 F 是 **way-out right 函子**, 如果对任给整数 n_1, 都存在整数 n_2 使得对 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中所有满足 $H^k(X)=0,\forall k>n_2$ 的复形 X, 有 $H^k(FX)=0,\forall k<n_1$.
(4) 设 $F:\mathscr{D}(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 是反变三角函子, 称 F 是 **way-out left 函子**, 如果对任给整数 n_1, 都存在整数 n_2 使得对 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中所有满足 $H^k(X)=0,\forall k<n_2$ 的复形 X, 有 $H^k(FX)=0,\forall k>n_1$.
(5) 如果共变/反变三角函子 $F:\mathscr{D}(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 既是 way-out left 又是 way-out right 函子, 那么称 F **在两个方向都 way-out**. 这里的 (1)-(5) 当然也可以对 $\mathscr{D}^*(\mathcal{A})$ 出发的三角函子定义, 其中 $*\in\{+,-,b\}$.

Remark 3.111. 可以合成共变三角函子如果都是 way-out left(right) 的, 那么它们的合成也是 way-out left(right) 的. 如果逆变三角函子 $F:\mathscr{D}(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 和逆变三角函子 $G:\mathscr{D}(\mathcal{B})\to\mathscr{D}(\mathcal{C})$ 满足 F 是 way-out right 且 G 是 way-out left, 那么 $GF:\mathscr{D}(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{C})$ 是 way-out left 的. 若 $F:\mathscr{D}(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 和逆变三角函子 $G:\mathscr{D}(\mathcal{B})\to\mathscr{D}(\mathcal{C})$ 满足 F 是 way-out left 且 G 是 way-out right, 则 $GF:\mathscr{D}(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{C})$ 是 way-out right 的.

Example 3.112. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴满足 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 存在. 那么 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 上恒等函子在两个方向都 way-out.

Example 3.113. 设 A-A 双模复形 $\Omega\in\text{ob}\mathscr{D}(A\textbf{-Mod-}A)$ 满足作为左 A-模复形和右 A-模复形都有有限内射维数 (默认 A 是投射 K-模), 则逆变三角函子 $\text{RHom}_A(-,\Omega):\mathscr{D}(A\textbf{-Mod-}A)\to\mathscr{D}(A\textbf{-Mod-}A)$ 在每个方向都 way-out. 对称地, $\text{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega):\mathscr{D}(A\textbf{-Mod-}A)\to\mathscr{D}(A\textbf{-Mod-}A)$ 在每个方向也是 way-out. 特别地, 由 [注记3.111] 知这时 $\text{RHom}_A(\text{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega),\Omega)$ 和 $\text{RHom}_{A^{op}}(\text{RHom}_A(-,\Omega),\Omega)$ 作为三角函子都是 way-out left.

Proof. 由条件, 存在有界 A-A 双模复形 Z 使得在 $\mathscr{D}(A\textbf{-Mod-}A)$ 中 $\Omega\cong Z$ 且 Z 作为左 A-模复形和右 A-模复形都是内射复形 ([命题3.77]). 因为 $\text{RHom}_A(-,\Omega)\cong\text{RHom}_A(-,Z)$, 用 Z 代替 Ω 可不妨设 Ω 是有界复形且作为左 A-模复形和右 A-模复形都是内射复形. 设有整数 $\ell<m$ 使得 $\Omega^k=0,\forall k\leq\ell-1$ 或 $k\geq m+1$, 即 Ω 形如 $0\longrightarrow\Omega^\ell\longrightarrow\Omega^{\ell+1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\Omega^{m-1}\longrightarrow\Omega^m\longrightarrow 0$. 先证明 $\text{RHom}_A(-,\Omega)$ 是 way-out right 函子, 即对任何整数 n_1, 能够构造整数 n_2 使得对 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中所有满足 $H^k(X)=0,\forall k>n_2$ 的复形 X, 有 $H^k(\text{RHom}_A(X,\Omega))=0,\forall k<n_1$. 现在对任意给定的整数 n_1, 命 $n_2=\ell-n_1-1$, 那么对任何满足 $H^k(X)=0,\forall k>n_2$ 的复形 X, 由于这时 $X\cong\tau_{\leq n_2}X$, 故由 Ω 作为左 A-模复形是下有界内射复形得到

$$\begin{aligned}H^k(\text{RHom}_A(X,\Omega))\cong&H^k(\text{Hom}_A^\bullet(X,\Omega))\\=&\text{Hom}_{\mathscr{K}(A\textbf{-Mod})}(X,\Omega[k])\\\cong&\text{Hom}_{\mathscr{D}(A\textbf{-Mod})}(X,\Omega[k])\end{aligned}$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})}(\tau_{\leq n_2}X, \Omega[k])$$
$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(A\text{-}\mathbf{Mod})}(\tau_{\leq n_2}X, \Omega[k])$$

而现在 $n_1 = \ell - n_2 - 1$ 说明当 $k < n_1$ 时, $\ell - k > n_2 + 1$, 故

$$H^k(\mathrm{RHom}_A(X, \Omega)) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(A\text{-}\mathbf{Mod})}(\tau_{\leq n_2}X, \Omega[k]) = 0, \forall k < n_1.$$

再验证 $\mathrm{RHom}_A(-, \Omega)$ 是 way-out left 函子, 即对任给整数 n_1, 都能构造整数 n_2 使得对 $\mathscr{D}(A)$ 中所有满足 $H^k(X) = 0, \forall k < n_2$ 的复形 X, 有 $H^k(\mathrm{RHom}_A(X, \Omega)) = 0, \forall k > n_1$. 对任给 n_1, 命 $n_2 = m - n_1 + 1$. 这时对满足 $H^k(X) = 0, \forall k < n_2$ 的复形 X 有 $X \cong \tau_{\geq n_2}X$. 于是当 $k > n_1$ 时, $m - k < n_2 - 1$ 以及 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(A\text{-}\mathbf{Mod})}(\tau_{\geq n_2}X, \Omega[k]) = 0$. 这说明 $H^k(\mathrm{RHom}_A(X, \Omega)) = 0, \forall k > n_1$. □

Remark 3.114. 证明过程也说明满足 [例3.113] 要求的 A-A 双模复形 Ω 诱导的逆变三角函子 $\mathrm{RHom}_A(-, \Omega) : \mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}) \to \mathscr{D}(\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 和 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-, \Omega) : \mathscr{D}(\mathbf{Mod}\text{-}A) \to \mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ 在每个方向上都 way-out.

Example 3.115. 设 A 是投射 K-模且 Ω 是有界 A-A 双模复形, 那么 $- \otimes_A^L \Omega : \mathscr{D}^-(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A) \to \mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 是 way out left 函子.

Proof. 设有界复形 Ω 形如 $0 \longrightarrow \Omega^\ell \longrightarrow \Omega^{\ell+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^{m-1} \longrightarrow \Omega^m \longrightarrow 0$. 易见对任何上有界复形 Y, 如果 $Y^k = 0, \forall k \geq t$, 那么 $H^n(\mathrm{Tot}^\oplus(Y \otimes_A \Omega)) = 0, \forall n \geq t + m + 1$. 现在任给整数 n_1, 我们说明存在整数 n_2 使得对 $\mathscr{D}(A)$ 中所有满足 $H^k(X) = 0, \forall k > n_2$ 的上有界复形 X, 有 $H^k(X \otimes_A^L \Omega) = 0, \forall k > n_1$. 命 $n_2 = n_1 - m$, 那么对任何满足 $H^k(X) = 0, \forall k > n_2$ 的上有界复形 X, 设 X 有上有界投射分解 $s : P \to X$. 那么在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有 $X \otimes_A^L \Omega \cong P \otimes_A^L \Omega \cong \mathrm{Tot}^\oplus(P \otimes_A \Omega)$. 注意到 $P \cong \tau_{\leq n_2}P$, 所以当 $k > n_1$ 时, 有 $k > m + n_2$. 于是得到 $H^k(X \otimes_A^L \Omega) \cong H^k(\mathrm{Tot}^\oplus(P \otimes_A \Omega)) = 0, \forall k > n_1$. □

回忆 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的非空全子范畴 $\mathcal{A}'$ 被称为 **Serre 子范畴**, 如果对 $\mathcal{A}$ 中任何短正合列

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0,$$

$Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$ 的充要条件是 $X, Z \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$. 这等价于要求非空全子范畴 $\mathcal{A}'$ 关于取子对象、商对象和扩张对象封闭. 特别地, Abel 范畴的 Serre 子范畴也是 Abel 子范畴 (回忆 [注记1.44]). 例如, 设 R 含幺环, 由所有 Noether 左 R-模构成的 R-**Mod** 的全子范畴便是 R-**Mod** 的 Serre 子范畴 (特别地, 左 Noether 环上有限生成模全体构成的全子范畴是 Serre 子范畴). 根据 Serre 子范畴的定义易知: 如果 $\mathcal{A}'$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Serre 子范畴, 那么对 $\mathcal{A}$ 中任何正合列 $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$, $X, Z \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$ 蕴含 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$. 于是由 [定理2.33] 我们立即看到

Proposition 3.116 ([Zha15])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴并有 Serre 子范畴 $\mathcal{A}'$, 若记 $\mathrm{ob}\mathscr{K}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}) = \{X \in \mathrm{ob}\mathscr{K}(\mathcal{A}) | H^k(X) \in \mathcal{A}', \forall k \in \mathbb{Z}\}$, 那么 $\mathrm{ob}\mathscr{K}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 决定的 $\mathrm{ob}\mathscr{K}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 的全子范畴 $\mathscr{K}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 是三角子范畴.

Remark 3.117. 如果 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 有 Serre 子范畴 $\mathcal{A}'$, $X \in \mathrm{ob}\mathscr{K}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$, 那么只要 $\mathcal{A}$ 上复形 Y 到 X 有拟同构, 自然也有 $Y \in \mathrm{ob}\mathscr{K}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$, 这一观察说明如果我们记 Q 是 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 的拟同构全体构成的饱和相容乘法系 ([例3.18]), 那么 $Q \cap \mathscr{K}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 是 $\mathscr{K}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 的饱和相容乘法系并且标准函子 $\mathscr{K}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})(Q \cap \mathscr{K}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}))^{-1} \to \mathscr{D}(\mathcal{A})$ 是忠实满三角函子. 因此 $\mathscr{K}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 对应 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 的三角子范畴 $\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}) = \{X \in \mathrm{ob}\mathscr{D}(\mathcal{A}) | H^k(X) \in \mathcal{A}', \forall k \in \mathbb{Z}\}$. 类似地, 我们能够考虑 $\mathscr{K}^-_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}), \mathscr{K}^+_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}), \mathscr{K}^b_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 的局部化, 分别得到 $\mathscr{D}^-(\mathcal{A}), \mathscr{D}^+(\mathcal{A}), \mathscr{D}^b(\mathcal{A})$ 的三角子范畴 $\mathscr{D}^-_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}), \mathscr{D}^+_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}), \mathscr{D}^b_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$. 注意, 如果要把 $\mathscr{D}^-_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}), \mathscr{D}^+_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}), \mathscr{D}^b_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 视作 $\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 的三角子范畴, 那么 $\mathscr{D}^*_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 的对象类需要额外添加复形拟同构类中的复形来满足三角子范畴关于同构封闭的条件 ([定义2.22]).

Remark 3.118. 事实上, 只需要 $\mathcal{A}'$ 是 $\mathcal{A}$ 的满足关于扩张封闭的 Abel 子范畴, 就能保证 $\mathscr{K}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 是 $\mathscr{K}(\mathcal{A})$ 的三角子范畴. 为此只需说明如果在 $\mathcal{A}$ 中有正合列:

$$X_1 \xrightarrow{f} X_2 \xrightarrow{g} X_3 \xrightarrow{h} X_4 \xrightarrow{l} X_5$$

满足 $X_1, X_2, X_4, X_5 \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$, 那么有 $X_3 \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$. 而这是直接的: 注意 $\mathcal{A}'$ 是 Abel 子范畴保证了 $\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}g \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$, 同样也有 $\mathrm{Ker}l = \mathrm{Im}h \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$, 故由 $0 \longrightarrow \mathrm{Im}g \longrightarrow X_3 \longrightarrow \mathrm{Im}h \longrightarrow 0$ 正合立即得到 $X_3 \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$. **所以 [注记3.117] 的讨论对关于扩张封闭的 Abel 子范畴就成立**. 特别地, 对 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的关于扩张封闭的 Abel 子范畴 $\mathcal{A}'$, $\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 是 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 的三角子范畴.

Example 3.119 ([Sta24])**.** 设 R 是左 Noether 环, X 是上有界的左 R-模复形满足对任何整数 n 有 $H^n(X)$ 是有限生成 R-模. 那么存在 X 的子复形 Y 使得 Y 每项是有限生成 R-模且 Y 到 X 的标准嵌入链映射是拟同构.

Proof. 对每个整数 n, 考虑标准投射 $\pi^n : \mathrm{Ker}d_X^n \to H^n(X)$, 那么可选取 $\mathrm{Ker}d_X^n$ 的有限生成 R-子模 D^n 使得 $\pi^n(D^n) = H^n(X)$, 即 D^n 到 $H^n(X)$ 的标准同态是满射. 下面我们归纳地构造有限生成 R-模族 $\{E^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足:
(1) 对每个 n, E^n 是 X^n 的有限生成 R-子模;
(2) 对每个 n, $d_X^n(E^n) = (D^{n+1} + E^{n+1}) \cap \mathrm{Im}d_X^n$.

一旦构造出满足上述条件的 R-模族 $\{E^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, 命 $Y^n = D^n + E^n$, 那么可自然定义出 X 的子复形 Y(注意 $d_X^n(D^n) = 0$), 满足每个 Y^n 是有限生成 R-模且 Y 到 X 的标准嵌入链映射是拟同构.

因为 X 是上有界复形, 可设 $X^t = 0, \forall t \geq m+1$. 这时 $D^t = 0, \forall t \geq m+1$, 只能选取 $E^t = 0, \forall t \geq m+1$. 命 $E^m = 0$, 那么 $d_X^m(E^m) = 0$ 满足条件. 现在 $D^m + E^m$ 是 X^m 的有限生成 R-子模, 由 R 是左 Noether 环, $(D^m + E^m) \cap \mathrm{Im}d_X^{m-1}$ 作为 Noether 模 $D^m + E^m$ 的子模依然是有限生成 R-模. 这保证可选取 X^{m-1} 的有限生成子模 E^{m-1} 使得 $d_X^{m-1}(E^{m-1}) = (D^m + E^m) \cap \mathrm{Im}d_X^{m-1}$. 重复上述讨论, 归纳地便得左 R-模族 $\{E^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. □

Corollary 3.120 ([Sta24])**.** 设 R 是左 Noether 环, 那么 $\mathscr{D}^-(R\text{-}\mathbf{Mod})$ 中的复形 X 是伪凝聚复形 ([定义3.47]) 的充要条件是对任何整数 n, $H^n(X)$ 是有限生成左 R-模.

Proof. 必要性来自伪凝聚复形的定义, 充分性来自 [例3.119] 和 [注记2.37]. □

Example 3.121. 设 R 是双边 Noether 环, $X \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^-(\mathbf{Mod}\text{-}R)$ 满足对任何整数 n, $H^n(X)$ 是有限生成右 R-模. 那么 $\mathrm{RHom}_{R^{op}}(X, R)$ 作为左 R-模复形的各次上同调模是有限生成左 R-模.

Proof. 根据 [推论3.120], 右 R-模复形 X 是伪凝聚的. 所以存在上有界的有限生成投射复形 P 使得在 $\mathscr{D}(\mathbf{Mod}\text{-}R)$ 中 $X \cong P$. 故由 $\mathrm{RHom}_{R^{op}}(X, R) \cong \mathrm{RHom}_{R^{op}}(P, R) \cong \mathrm{Hom}_{R^{op}}(P, R)$, 只需说明左 R-模复形 $\mathrm{Hom}_{R^{op}}(P, R)$ 的各次上同调模作为左 R-模是有限生成的. 注意到对有限生成投射右 R-模 P^i 满足 $\mathrm{Hom}_{R^{op}}(P^i, R)$ 是有限生成投射左 R-模. 故由 R 是左 Noether 环可知左 R-模复形 $\mathrm{Hom}_{R^{op}}(P, R)$ 的各次上同调模是有限生成左 R-模. □

如果 $\mathcal{A}'$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的 Serre 子范畴, 那么对任何分量都在 $\mathcal{A}'$ 中的复形 X, 每个 $H^k(X) \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$. 并且把 X 视作 $\mathcal{A}'$ 上复形求上同调或是把 X 视作 $\mathcal{A}$ 上复形求上同调一致 (对 Abel 子范畴便成立, 因为这时嵌入函子作为正合函子保持核和余核). 设 $(\mathcal{A}, T, \mathcal{E})$ 和 $(\mathcal{B}, T', \mathcal{E}')$ 是三角范畴, $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是三角函子, 记 F 带有的自然同构为 $\varphi : FT \cong T'F$, G 带有的自然同构为 $\psi : GT \cong T'G$. 称自然变换 $\eta : F \to G$ **和 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 的平移函子相**

容, 如果满足对任何 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中对象 X 有交换图:

$$\begin{CD} FTX @>{\eta_{TX}}>> GTX \\ @V{\varphi_X}VV @VV{\psi_X}V \\ T'FX @>{T'(\eta_X)}>> T'GX \end{CD}$$

这时对 $\mathcal{A}$ 中对象 Y, η_Y 是同构蕴含对所有整数 k, η_{T^kY} 是同构. 在 [注记3.104] 中我们看到如果 A,B 是 K-代数, A 是投射 K-模且 Ω 是下有界 A-A 双模复形, 取定 Ω 的下有界内射分解 $s:\Omega\to I$ 并保持记号 $\mathrm{Hom}^\bullet_A(-,I)$ 和 $\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(-,I)$ 表示它们的 (双边) 导出函子, 那么 [引理3.101] 中的 θ 给出 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 上恒等函子到 $\mathrm{Hom}^\bullet_{A^{op}}(\mathrm{Hom}^\bullet_A(-,I),I)$ 的自然变换并且与平移函子相容. 在 [注记3.53] 已经指出导出函子存在性定理中构造的导出函子带有的自然变换作为三角函子之间的自然变换也和平移函子相容. 易见导出范畴间和平移函子相容的两个三角函子函子间的自然变换如果可以合成, 那么合成得到的自然变换依然与平移函子相容.

Proposition 3.122 (Way-out 函子基本引理, [Hart66])**.** 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴满足 $\mathscr{D}(\mathcal{A}),\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 存在, $\mathcal{A}'$ 是 $\mathcal{A}$ 的关于扩张封闭的 Abel 子范畴. 并设 $F,G:\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})\to\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 都是共变三角函子, $\eta:F\to G$ 是自然变换.并且要求 η 与给定导出范畴的平移函子相容. 那么

(1) 若对所有 $X\in\mathrm{ob}\mathcal{A}'$, 有 η_X 是同构. 则对所有 $Y\in\mathrm{ob}\mathscr{D}^b_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 有 η_Y 是同构.

(2) 若对所有 $X\in\mathrm{ob}\mathcal{A}'$ 有 η_X 是同构, 且 F 和 G 都 way-out left, 则对 $Y\in\mathrm{ob}\mathscr{D}^-_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 有 η_Y 是同构.

(3) 若对所有 $X\in\mathrm{ob}\mathcal{A}'$ 有 η_X 是同构, 且 F 和 G 都 way-out right, 则对 $Y\in\mathrm{ob}\mathscr{D}^+_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 有 η_Y 是同构.

(4) 若 η 满足对所有 $X\in\mathrm{ob}\mathcal{A}'$ 有 η_X 是同构, 且 F 和 G 在两个方向都 way-out, 则对任何 $Y\in\mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 有 η_Y 是同构.

(5) 设 $\mathcal{A}'$ 有足够多投射对象, 对 $\mathcal{A}'$ 中的投射对象 P 都有 η_P 是同构, 并且 F,G 都是 way-out left. 那么对 $\mathcal{A}'$ 中任何对象 Y 有 η_Y 是同构.

(6) 设 $\mathcal{A}'$ 有足够多内射对象, 对 $\mathcal{A}'$ 中的内射对象 J 都有 η_J 是同构, 并且 F 和 G 都是 way-out right. 那么对 $\mathcal{A}'$ 中任何对象 Y 有 η_Y 是同构.

Proof. (1) 任给 $Y\in\mathrm{ob}\mathscr{D}^b_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$, 因为 Y 是有界的, 所以如果我们能够证明对任何整数 n 有 $\eta_{\tau_{\geq n}Y}:F(\tau_{\geq n}Y)\to G(\tau_{\geq n}Y)$ 成立, 那么取充分小的整数 n 便得到 η_Y 是同构. 首先 Y 的有界性说明当 n 充分大时, $\eta_{\tau_{\geq n}Y}$ 有同构. 根据 [命题3.76], 对任何整数 n, 有 $\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 中好三角 $H^n(Y)\longrightarrow\tau_{\geq n}Y\longrightarrow\tau_{\geq n+1}Y\longrightarrow H^n(Y)[1]$. 这里 $H^n(Y)\in\mathrm{ob}\mathcal{A}'$ 被视作集中在 n 次位置的复形. 那么我们有下述交换图:

$$\begin{CD} F(H^n(Y)) @>>> F(\tau_{\geq n}Y) @>>> F(\tau_{\geq n+1}Y) @>>> F(H^n(Y)[1]) @>{\cong}>> F(H^n(Y))[1] \\ @V{\eta_{H^n(Y)}}VV @VV{\eta_{\tau_{\geq n}Y}}V @VV{\eta_{\tau_{\geq n+1}Y}}V @VV{\eta_{H^n(Y)[1]}}V @VV{\eta_{H^n(Y)}[1]}V \\ G(H^n(Y)) @>>> G(\tau_{\geq n}Y) @>>> G(\tau_{\geq n+1}Y) @>>> G(H^n(Y)[1]) @>{\cong}>> G(H^n(Y))[1] \end{CD}$$

因为 $H^k(Y)\in\mathrm{ob}\mathcal{A}',\forall k\in\mathbb{Z}$, 所以根据条件, 上图两测竖直方向的同态都是同构 (这里使用了 η 与平移函子的相容性), 现在应用 [推论2.17] 可知对任何整数 n, $\eta_{\tau_{\geq n+1}Y}$ 是同构蕴含 $\eta_{\tau_{\geq n}Y}$ 是同构. 由此得到 (1).

(2) 设 F,G 都是 way-out left 且 $Y\in\mathrm{ob}\mathscr{D}^-_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$. 根据 [命题3.25] 知要证明 η_Y 是 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中同构只要证对所有整数 k 有 $\mathscr{H}^k(\eta_Y):H^k(FY)\to H^k(GY)$ 是同构. 固定整数 k 以及取 $n_1=k-1$, 那么由 F,G 均 way-out left 得到存在整数 n_2 使得对任何满足 $H^j(X)=0,\forall j>n_2$ 的复形 X, 有 $H^t(FX)=H^t(GX)=0,\forall t>n_1$. 根据 [注记1.61], 对 Y 作截断产生短正合列 $0\longrightarrow\tau_{\leq n_2}Y\longrightarrow Y\longrightarrow\tau_{\geq n_2+1}Y\longrightarrow 0$, 于是 [命题3.26]

说明 $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ 中有以该短正合列为前三项的好三角, 由 F,G 是三角函子, 用 F,G 作用该复形短正合列产生的好三角得到下面上下两行正合的交换图 ([定理3.27]):

$$\begin{tikzcd} H^k(F(\tau_{\le n_2}Y)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{H}^k(\eta_{\tau_{\le n_2}Y})"'] & H^k(FY) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{H}^k(\eta_Y)"'] & H^k(F(\tau_{\ge n_2+1}Y)) \arrow[d, "\mathscr{H}^k(\eta_{\tau_{\ge n_2+1}Y})"'] \\ H^k(G(\tau_{\le n_2}Y)) \arrow[r] & H^k(GY) \arrow[r] & H^k(G(\tau_{\ge n_2+1}Y)) \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

因为 $k,k+1>n_1$, 所以对复形 $\tau_{\le n_2}Y$, 有

$$H^k(F(\tau_{\le n_2}Y))=H^k(G(\tau_{\le n_2}Y))=H^{k+1}(F(\tau_{\le n_2}Y))=H^{k+1}(G(\tau_{\le n_2}Y))=0.$$

对前面的交换图 (3.4) 考察相应好三角产生的上同调长正合列可知图 (3.4) 右边的方块上下两行水平方向的态射都是同构. 因为 Y 是上有界的, 所以 $\tau_{\ge n_2+1}Y$ 是有界复形, 于是应用 (1) 中证明的结果得到 $\eta_{\tau_{\ge n_2+1}Y}$ 是同构. 从而 $\mathscr{H}^k(\eta_Y)$ 也是同构. 于是由 k 的任意性得到 η_Y 是 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 中同构.

(3) 现在设 F,G 都 way-out right 且 $Y\in \mathrm{ob}\mathscr{D}^+_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$, 由 [命题3.25] 知要证明 η_Y 是 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 中同构只需证明对所有整数 k 有 $\mathscr{H}^k(\eta_Y): H^k(FY)\to H^k(GY)$ 是同构. 现在固定整数 k, 并任给 $n_1\ge k+2$, 那么由 F,G 都是 way-out right 复形可知存在整数 n_2 使得对任何满足 $H^j(X)=0,\forall j<n_2$ 的复形 X 有 $H^t(FX)=H^t(GX)=0,\forall t<n_1$. 特别地, 对 $\tau_{\ge n_2+1}Y$, 有 $H^t(F(\tau_{\ge n_2+1}Y))=H^t(G(\tau_{\ge n_2+1}Y))=0,\forall t<n_1$. 因此 $\mathscr{H}^t(\eta_{\tau_{\ge n_2+1}Y})$ 对所有 $t<n_1$ 是同构. 以及当 $t=k,k-1<n_1$ 时, 得到

$$H^k(F(\tau_{\ge n_2+1}Y))=H^{k-1}(F(\tau_{\ge n_2+1}Y))=H^k(G(\tau_{\ge n_2+1}Y))=H^{k-1}(G(\tau_{\ge n_2+1}Y))=0. \tag{3.5}$$

根据 [注记1.61], 有 $\mathcal{A}$ 上复形短正合列

$$0\longrightarrow \tau_{\le n_2}Y\longrightarrow Y\longrightarrow \tau_{\ge n_2+1}Y\longrightarrow 0,$$

所以根据 [命题3.26], $\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 中有好三角 $\tau_{\le n_2}Y\longrightarrow Y\longrightarrow \tau_{\ge n_2+1}Y\longrightarrow (\tau_{\le n_2}Y)[1]$. 于是由 F,G 都是三角函子得到 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 中好三角

$$F(\tau_{\le n_2}Y)\longrightarrow FY\longrightarrow F(\tau_{\ge n_2+1}Y)\longrightarrow F(\tau_{\le n_2}Y)[1],$$

$$G(\tau_{\le n_2}Y)\longrightarrow GY\longrightarrow G(\tau_{\ge n_2+1}Y)\longrightarrow G(\tau_{\le n_2}Y)[1].$$

更进一步, 我们有 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 中的下述交换图:

$$\begin{tikzcd} F(\tau_{\le n_2}Y) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{\tau_{\le n_2}Y}"'] & FY \arrow[r] \arrow[d, "\eta_Y"'] & F(\tau_{\ge n_2+1}Y) \arrow[d, "\eta_{\tau_{\ge n_2+1}Y}"'] \\ G(\tau_{\le n_2}Y) \arrow[r] & GY \arrow[r] & G(\tau_{\ge n_2+1}Y) \end{tikzcd}$$

于是我们应用 [定理3.27] 得到 $\mathcal{B}$ 中交换图 (其中上下两行正合):

$$\begin{tikzcd} H^k(F(\tau_{\le n_2}Y)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{H}^k(\eta_{\tau_{\le n_2}Y})"'] & H^k(FY) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{H}^k(\eta_Y)"'] & H^k(F(\tau_{\ge n_2+1}Y)) \arrow[d, "\mathscr{H}^k(\eta_{\tau_{\ge n_2+1}Y})"'] \\ H^k(G(\tau_{\le n_2}Y)) \arrow[r] & H^k(GY) \arrow[r] & H^k(G(\tau_{\ge n_2+1}Y)) \end{tikzcd}$$

注意到 $\tau_{\leq n_2}Y$ 是有界复形, 应用 (1) 证明的结果得到 $\eta_{\tau_{\leq n_2}Y}$ 是同构. 并且考察好三角导出的上同调长正合列 (利用同伦范畴版本的基本定理) 和 (3.5) 可知上图左边方块水平方向的同态是同构. 故 $\mathscr{H}^k(\eta_Y)$ 是同构. 现在由 k 的任意性便知 η_Y 是 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 中的同构.

(4) 由条件, 满足 η_X 同构的复形 X 满足对任何整数 k 有 $\eta_{X[k]}$ 也是同构. 任取 $Y \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$, 那么 $Y_{\geq 0} \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^-_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 和 $Y_{\geq 0} \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^+_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$, 所以应用 (2) 和 (3) 得到 $\eta_{Y_{\leq -1}}, \eta_{Y_{\leq -1}[-1]}$ 和 $\eta_{Y_{\geq 0}}, \eta_{Y_{\geq 0}[1]}$ 都是 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 中同构. 现在考虑 [注记1.61] 中温和截断产生的复形短正合列

$$0 \longrightarrow \tau_{\leq 0}Y \longrightarrow Y \longrightarrow \tau_{\geq 1}Y \longrightarrow 0$$

考察上述复形短正合列产生的好三角前三项, 可得对任何整数 k 有 $\mathcal{B}$ 中交换图 (其中上下两行正合):

$$\begin{tikzcd}
H^{k-1}(F(\tau_{\geq 1}Y)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{H}^k(\eta_{\tau_{\geq 1}Y})"'] & H^k(F(\tau_{\leq 0}Y)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{H}^k(\eta_{\tau_{\leq 0}Y})"'] & H^k(FY) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{H}^k(\eta_Y)"'] & H^k(F(\tau_{\geq 1}Y)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{H}^k(\eta_{\tau_{\geq 1}Y})"'] & H^{k+1}(F(\tau_{\leq 0}Y)) \arrow[d, "\mathscr{H}^k(\eta_{\tau_{\leq 0}Y})"] \\
H^{k-1}(G(\tau_{\geq 1}Y)) \arrow[r] & H^k(G(\tau_{\leq 0}Y)) \arrow[r] & H^k(GY) \arrow[r] & H^k(G(\tau_{\geq 1}Y)) \arrow[r] & H^{k+1}(G(\tau_{\leq 0}Y))
\end{tikzcd}$$

这里使用了 η 和 $\mathscr{D}(\mathcal{A}), \mathscr{D}(\mathcal{B})$ 的平移函子的相容性. 现在上述交换图竖直方向上的态射前两列和最后两列都是同构, 于是由五引理得到 $\mathscr{H}^k(\eta_Y)$ 是同构. 再由 k 的任意性得到 η_Y 是同构.

(5) 在 $\mathcal{A}'$ 中的任何对象 Y 都有投射分解, 由此得到下述拟同构 (其中每个 P^i 在 $\mathcal{A}'$ 中):

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[r] \arrow[d] & P^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & P^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

将上行复形记作 P, 则 $H^k(P) \in \mathrm{ob}\mathcal{A}', \forall k \in \mathbb{Z}$. 所以 $P \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^-_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$. 因此要证明结论只要证明 η_P 是同构. 注意这里 P 每项都在 $\mathcal{A}'$ 中所以 $\mathcal{A}'$ 的强制截断依然每项在 $\mathcal{A}'$ 中. 将 (1) 中讨论的右温和截断改为右强制截断产生的复形短正合列 ([例3.28]) 可证得对任何有界且每个分量来自 $\mathcal{A}'$ 中投射对象的复形 Z, 有 η_Z 是同构. 类似地, 把 (2) 中讨论使用强制截断代替并应用有界情形的结论 (利用 [注记1.61] 中强制截断的复形短正合列) 可得只要 $P \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^-_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 满足每项是 $\mathcal{A}'$ 中投射对象, 就有 η_P 是同构.

(6) 与 (5) 的讨论是完全对偶地, 同样使用强制截断产生的复形短正合列代替 (1) 和 (3) 中讨论可证. $\square$

Remark 3.123. 这里要求 $\mathcal{A}'$ 是 $\mathcal{A}$ 的关于扩张封闭的 Abel 子范畴是为保证 $\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 是三角范畴.

Proposition 3.124 ([Hart66]). 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是 Abel 范畴满足 $\mathscr{D}(\mathcal{A}), \mathscr{D}(\mathcal{B})$ 存在. 并设 $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ 分别是 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 关于扩张封闭的 Abel 子范畴, $F : \mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}) \to \mathscr{D}(\mathcal{B})$ 是三角函子. 那么
(1) 无论 F 是共变还是逆变三角函子, 只要 F 满足对所有 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$ 有 $FX \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, 那么对所有的 $Y \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^b_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 都有 $FY \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.
(2) 当 F 是共变三角函子且 way-out right 时, 只要 F 满足对所有 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$ 有 $FX \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, 那么对任何 $Y \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^+_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 有 $FY \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.
(3) 当 F 是共变三角函子且 way-out left 时, 只要 F 满足对所有 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$ 有 $FX \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, 那么对任何 $Y \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^-_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 有 $FY \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.
(4) 当 F 是逆变三角函子且 way-out right 时, 只要 F 满足对所有 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$ 有 $FX \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, 对任何 $Y \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^-_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 有 $FY \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

(5) 当 F 是逆变三角函子且 way-out left 时, 只要 F 满足对所有 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$ 有 $FX \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, 对任何 $Y \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^+_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 有 $FY \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.
(6) 无论 F 是共变三角函子还是逆变三角函子, 当 F 在两个方向都 way-out 时, 只要 F 满足对所有 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$ 有 $FX \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, 那么对任何 $Y \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 有 $FY \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.
(7) 如果 F 是共变三角函子且 way-out left, $\mathcal{A}'$ 有足够多投射对象并且对 $\mathcal{A}'$ 中的任何投射对象 P 有 $FP \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, 那么对任何 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$ 有 $FY \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.
(8) 如果 F 是共变三角函子且 way-out right, $\mathcal{A}'$ 有足够多内射对象并且对 $\mathcal{A}'$ 中的任何内射对象 J 有 $FJ \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, 那么对任何 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$ 有 $FY \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.
(9) 如果 F 是反变三角函子且 way-out right, $\mathcal{A}'$ 有足够多投射对象并且对 $\mathcal{A}'$ 中的任何投射对象 P 有 $FP \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, 那么对任何 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$ 有 $FY \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.
(10) 如果 F 是反变三角函子且 way-out left, $\mathcal{A}'$ 有足够多内射对象并且对 $\mathcal{A}'$ 中的任何内射对象 J 有 $FJ \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, 那么对任何 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$ 有 $FY \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

Proof. (1) 由条件, $\mathcal{A}'$ 中任何对象 X, 将 X 视作集中在任何位置处的复形, 例如 $X[k]$, 便有 $F(X[k]) \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$. 对任何 $Y \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^b_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$, 因为 Y 是有界的, 所以对充分大的整数 n 有 $\tau_{\geq n}Y = 0$. 根据 [命题3.76], 对任何整数 n, 有 $\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 中好三角 $H^n(Y) \longrightarrow \tau_{\geq n}Y \longrightarrow \tau_{\geq n+1}Y \longrightarrow H^n(Y)[1]$. 这里 $H^n(Y) \in \mathrm{ob}\mathcal{A}'$ 被视作集中在 n 次位置的复形. 当 F 是共变三角函子时, 得到 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 中好三角

$$F(H^n(Y)) \longrightarrow F(\tau_{\geq n}Y) \longrightarrow F(\tau_{\geq n+1}Y) \longrightarrow F(H^n(Y))[1].$$

如果 F 是逆变三角函子, 我们有 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 中好三角

$$F(H^n(Y))[-1] \longrightarrow F(\tau_{\geq n+1}Y) \longrightarrow F(\tau_{\geq n}Y) \longrightarrow F(H^n(Y)).$$

根据条件, 总有 $F(H^n(Y))[-1], F(H^n(Y)), F(H^n(Y))[1] \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$. 所以由 $\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ 是 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 的三角子范畴 ([注记3.118]). 所以 [注记2.24] 说明 $F(\tau_{\geq n+1}Y) \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ 当且仅当 $F(\tau_{\geq n}Y) \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$. 现在我们已经知道对充分大的整数 n 有 $\tau_{\geq n}Y = 0$, 所以对充分大的整数 n 自然有 $F(\tau_{\geq n}Y) \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$. 于是归纳地得到对每个整数 n, 有 $F(\tau_{\geq n}Y) \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$. 而 Y 的有界性保证了对充分小的整数 n 有 $\tau_{\geq n}Y = Y$, 因此我们也得到了 $FY \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, 这证明了 (1).

(2) 取定 $Y \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^+_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$, 需要证明对任何整数 k 有 $H^k(FY) \in \mathrm{ob}\mathcal{B}'$. 固定整数 k, 命 $n_1 = k+1$, 因为 F 是 way-out right 函子, 所以对该 n_1, 存在整数 n_2 使得对任何 $\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 中满足 $H^t(X) = 0, \forall t < n_2$ 的复形 X 有 $H^t(FX) = 0, \forall t < n_1$. 考察温和截断产生的复形短正合列

$$0 \longrightarrow \tau_{\leq n_2}Y \longrightarrow Y \longrightarrow \tau_{\geq n_2+1}Y \longrightarrow 0,$$

那么有 $\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 中有好三角 $\tau_{\leq n_2}Y \longrightarrow Y \longrightarrow \tau_{\geq n_2+1}Y \longrightarrow (\tau_{\leq n_2}Y)[1]$. 用 F 作用之, 得到 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 中的好三角 $F(\tau_{\leq n_2}Y) \longrightarrow FY \longrightarrow F(\tau_{\geq n_2+1}Y) \longrightarrow (F(\tau_{\leq n_2}Y))[1]$. 于是导出 $\mathcal{B}$ 中长正合列

$$\cdots \longrightarrow H^{k-1}(F(\tau_{\geq n_2+1}Y)) \longrightarrow H^k(F(\tau_{\leq n_2}Y)) \longrightarrow H^k(FY) \longrightarrow H^k(F(\tau_{\geq n_2+1}Y)) \longrightarrow \cdots.$$

注意到 $\tau_{\geq n_2+1}Y$ 满足 $H^t(\tau_{\geq n_2+1}Y) = 0, \forall t < n_2$, 所以由 $k, k-1 < n_1$ 得到

$$H^{k-1}(F(\tau_{\geq n_2+1}Y)) = H^k(F(\tau_{\geq n_2+1}Y)) = 0.$$

这说明 $H^k(F(\tau_{\le n_2}Y)) \cong H^k(FY)$. 注意到 $\tau_{\le n_2}Y \in \mathscr{D}^b_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$, 所以应用 (1) 的结果得到 $H^k(F(\tau_{\le n_2}Y)) \in \mathrm{ob}\mathcal{B}'$. 因此 $H^k(FY) \in \mathrm{ob}\mathcal{B}'$, 再由 k 的任意性得到 $FY \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

(3) 取定 $Y \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^-_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$, 并设三角函子 F 是 way-out left. 类似 (2), 命 $n_1 = k-1$, 那么存在 n_2 使得对 $\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 中满足 $H^t(X) = 0, \forall t > n_2$ 的复形 X 有 $H^t(FX) = 0, \forall t > n_1$. 考察对 Y 在 n_2 处的温和截断产生的 $\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 中好三角在 F 作用下得到的 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 中好三角 (并注意 $\tau_{\le n_2}Y$ 满足 $H^t(\tau_{\le n_2}Y) = 0, \forall t > n_2$):

$$F(\tau_{\le n_2}Y) \longrightarrow FY \longrightarrow F(\tau_{\ge n_2+1}Y) \longrightarrow (F(\tau_{\le n_2}Y))[1].$$

上述好三角诱导 $\mathcal{B}$ 中长正合列

$$\cdots \longrightarrow H^k(F(\tau_{\le n_2}Y)) \longrightarrow H^k(FY) \longrightarrow H^k(F(\tau_{\ge n_2+1}Y)) \longrightarrow H^{k+1}(F(\tau_{\le n_2}Y)) \longrightarrow \cdots.$$

因为 $k, k+1 > n_1$, 所以 $H^{k+1}(F(\tau_{\le n_2}Y)) = H^k(F(\tau_{\le n_2}Y)) = 0$, 于是上述长正合列产生同构 $H^k(FY) \cong H^k(F(\tau_{\ge n_2+1}Y))$. 注意到 Y 是上有界的, 所以 $\tau_{\ge n_2+1}Y \in \mathscr{D}^b_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$, 应用 (1) 得到 $H^k(F(\tau_{\ge n_2+1}Y)) \in \mathrm{ob}\mathcal{B}'$. 由此以及 k 的任意性得到 $FY \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

(4) 设 F 是 way-out right 的逆变三角函子并取定 $Y \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^-_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$. 要证对每个整数 k 有 $H^k(FY) \in \mathrm{ob}\mathcal{B}'$. 固定 k, 命 $n_1 = k+1$, 那么存在 n_2 使得对 $\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 中满足 $H^t(X) = 0, \forall t > n_2$ 的复形 X 有 $H^t(FX) = 0, \forall t < n_1$. 现在有 $\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 中有好三角 $\tau_{\le n_2}Y \longrightarrow Y \longrightarrow \tau_{\ge n_2+1}Y \longrightarrow (\tau_{\le n_2}Y)[1].$, 作用逆变三角函子 F 后得到 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 中的好三角 $F(\tau_{\le n_2}Y)[-1] \longrightarrow F(\tau_{\ge n_2+1}Y) \longrightarrow FY \longrightarrow F(\tau_{\le n_2}Y).$ 故有 $\mathcal{B}$ 中正合列

$$\cdots \longrightarrow H^{k-1}(F(\tau_{\le n_2}Y)) \longrightarrow H^k(F(\tau_{\ge n_2+1}Y)) \longrightarrow H^k(FY) \longrightarrow H^k(F(\tau_{\le n_2}Y)) \longrightarrow \cdots.$$

利用 F 是 way-out right 以及 $k-1, k < n_1$ 得到 $H^{k-1}(F(\tau_{\le n_2}Y)) = H^k(F(\tau_{\le n_2}Y)) = 0$, 所以利用上述长正合列得到 $H^k(F(\tau_{\ge n_2+1}Y)) \cong H^k(FY)$. 于是由 $\tau_{\ge n_2+1}Y \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^b_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$, 再应用 (1) 以及 k 的任意性便知 $FY \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

(5) 设 F 是 way-out left 的逆变三角函子并取定 $Y \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^+_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$. 固定整数 k, 命 $n_1 = k-1$, 那么有整数 n_2 使得对 $\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 中满足 $H^t(X) = 0, \forall t < n_2$ 的复形 X 有 $H^t(FX) = 0, \forall t > n_1$. 于是 $H^k(\tau_{\ge n_2+1}Y) = H^{k+1}(\tau_{\ge n_2+1}Y) = 0$. 所以由 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 中好三角 $F(\tau_{\le n_2}Y)[-1] \longrightarrow F(\tau_{\ge n_2+1}Y) \longrightarrow FY \longrightarrow F(\tau_{\le n_2}Y)$ 产生的 $\mathcal{B}$ 中下述长正合列得到 $H^k(FY) \cong H^k(F(\tau_{\le n_2}Y))$:

$$\cdots \longrightarrow H^k(F(\tau_{\ge n_2+1}Y)) \longrightarrow H^k(FY) \longrightarrow H^k(F(\tau_{\le n_2}Y)) \longrightarrow H^{k+1}(F(\tau_{\ge n_2+1}Y)) \longrightarrow \cdots$$

注意到 Y 是下有界复形保证 $\tau_{\le n_2}Y$ 是有界复形, 故应用 (1) 便知 $H^k(FY) \in \mathrm{ob}\mathcal{B}'$.

(6) 无论 F 是逆变三角函子还是共变三角函子, 当 F 是两个方向都 way-out 时, 根据 (2)-(5) 可知对任何 $Y \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^-_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}) \cup \mathrm{ob}\mathscr{D}^+_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 有 $FY \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$. 现在任取 $Y \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$. 考虑 [注记1.61] 中温和截断产生的复形短正合列

$$0 \longrightarrow \tau_{\le 0}Y \longrightarrow Y \longrightarrow \tau_{\ge 1}Y \longrightarrow 0.$$

当 F 是共变三角函子时, 用 F 作用上面的好三角得到 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 中好三角, 产生 $\mathcal{B}$ 中正合列:

$$H^{k-1}(F(\tau_{\ge 1}Y)) \longrightarrow H^k(F(\tau_{\le 0}Y)) \longrightarrow H^k(FY) \longrightarrow H^k(F(\tau_{\ge 1}Y)) \longrightarrow H^{k+1}(F(\tau_{\le 0}Y)).$$

上述正合列的前两项和最后两项都在 $\mathcal{B}'$ 中, 故由 $\mathcal{B}'$ 是关于扩张封闭的 Abel 子范畴, 由 [注记3.118] 便知 $H^k(FY) \in \mathrm{ob}\mathcal{B}'$, 于是由 k 的任意性得到 $FY \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$. 当 F 是逆变函子时同理可证.

(7) 现在 $\mathcal{A}'$ 中任何对象 Y 有投射分解

$$\cdots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^{0} \longrightarrow Y \longrightarrow 0.$$

因此只需证明对任何 $\mathcal{A}'$ 上每项都是 $\mathcal{A}'$ 中投射对象的上有界复形 P 证明 $FP \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ 即可. 首先 P 如果是有界复形时, 结论类似 (1) 明显成立: 应用 [例3.28] 中强制截断产生的复形短正合列

$$0 \longrightarrow P_{\geq n+1} \longrightarrow P_{\geq n} \longrightarrow P^{n} \longrightarrow 0,$$

这里 P^n 被视作集中在 n 次位置的复形. 用 F 作用上述好三角后得到 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 中好三角, 于是由 $FP^n \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ 可得对每个整数 n, $FP_{\geq n+1} \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ 蕴含 $FP_{\geq n} \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$. 再注意到 P 是有界复形的假设保证 n 可选取充分大时 $P_{\geq n} = 0$. 因此当 P 是满足每项均为 $\mathcal{A}'$ 中投射对象的有界复形时, $FP \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$. 现在考虑 P 仅仅是上有界复形的情形. 我们将使用 [注记1.61] 中强制截断产生的复形短正合列. 需要证明对每个整数 k 有 $H^k(FP) \in \mathrm{ob}\mathcal{B}'$. 固定整数 k. 因为 F 是 way-out left 函子, 所以对 $n_1 = k-2$, 存在整数 n_2 使得对任何 $\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 中满足 $H^t(X) = 0, \forall t > n_2$ 的复形 X 有 $H^t(FX) = 0, \forall t > n_1$. 特别地, 复形短正合列

$$0 \longrightarrow P_{\geq n_2} \longrightarrow P \longrightarrow P_{\leq n_2-1} \longrightarrow 0.$$

中复形 $P_{\leq n_2-1}$ 明显满足 $H^t(P_{\leq n_2-1}) = 0, \forall t > n_2$. 考虑 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 中好三角

$$F(P_{\geq n_2}) \longrightarrow FP \longrightarrow F(P_{\leq n_2-1}) \longrightarrow F(P_{\geq n_2})[1].$$

它产生 $\mathcal{B}$ 中正合列

$$H^{k-1}(F(P_{\leq n_2-1})) \longrightarrow H^k(F(P_{\geq n_2})) \longrightarrow H^k(FP) \longrightarrow H^k(F(P_{\leq n_2-1})) \longrightarrow H^{k+1}(F(P_{\geq n_2})).$$

因为 $k-1, k > n_1$, 所以 $H^{k-1}(F(P_{\leq n_2-1})) = H^k(F(P_{\leq n_2-1})) = 0$, 这说明 $H^k(F(P_{\geq n_2})) \cong H^k(FP)$. 对 $P_{\geq n_2}$ 应用前面对有界复形证明的结论得到 $H^k(F(P_{\geq n_2})) \in \mathrm{ob}\mathcal{B}'$, 于是 $H^k(FP) \in \mathrm{ob}\mathcal{B}'$.

(8) 证明与 (7) 是完全对偶的. 对 $\mathcal{A}'$ 中任何对象 Y 取定在 $\mathcal{A}'$ 中的内射分解

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow J^0 \longrightarrow J^1 \longrightarrow \cdots.$$

于是知只需证明任何每项来自 $\mathcal{A}'$ 中内射对象的下有界复形 J, 满足 $FJ \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ 即可. 利用 [例3.28] 中强制截断产生的复形短正合列

$$0 \longrightarrow J_{\geq n+1} \longrightarrow J_{\geq n} \longrightarrow J^n \longrightarrow 0,$$

被 F 作用后的好三角以及条件可知当 J 是有界复形时 $FJ \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$. 对于 J 仅仅是下有界复形的情形: 固定整数 k, 命 $n_1 = k+2$, 进而由 F 是 way-out right 函子可得存在 n_2 使得对任何满足 $t < n_2$ 的复形 $X \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 有 $H^t(FX) = 0, \forall t < n_1$. 考察 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 中好三角

$$F(J_{\geq n_2}) \longrightarrow FJ \longrightarrow F(J_{\leq n_2-1}) \longrightarrow F(J_{\geq n_2})[1].$$

产生的 $\mathcal{B}$ 中正合列

$$\cdots \longrightarrow H^k(F(J_{\geq n_2})) \longrightarrow H^k(FJ) \longrightarrow H^k(F(J_{\leq n_2-1})) \longrightarrow H^{k+1}(F(J_{\geq n_2})) \longrightarrow \cdots$$

那么 $H^k(F(J_{\geq n_2})) = H^{k+1}(F(J_{\geq n_2})) = 0$ 以及由 $J_{\leq n_2-1}$ 是有界复形得到 $H^k(FJ) \cong H^k(F(J_{\leq n_2-1})) \in \mathrm{ob}\mathcal{B}'$. 于是由 k 的任意性得到 $FJ \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

(9) 和 (10) 的证明互为对偶, 这里仅验证 (9). 类似于 (7), 对 $\mathcal{A}'$ 中任何对象 Y 有投射分解

$$\cdots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow Y \longrightarrow 0.$$

因此只需要证明对每项是 $\mathcal{A}'$ 中投射对象的上有界复形 P, 有 $FP \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ 即可. 重复 (7) 中关于有界情形的讨论可知对任何每项是 $\mathcal{A}'$ 中投射对象的有界复形 P, 有 $FP \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$. 再对 P 仅要求是上有界复形的情形, 对固定的整数 k, 命 $n_1 = k+2$. 因为 F 是 way-out right, 所以存在整数 n_2 使得对任何 $\mathscr{D}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ 中满足 $H^t(X) = 0, \forall t > n_2$ 的复形 X 有 $H^t(FX) = 0, \forall t < n_1$. 考察 $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ 中好三角

$$F(P_{\geq n_2})[-1] \longrightarrow F(P_{\leq n_2-1}) \longrightarrow FP \longrightarrow F(P_{\geq n_2})$$

产生的 $\mathcal{B}$ 中正合列:

$$\cdots \longrightarrow H^k(F(P_{\leq n_2-1})) \longrightarrow H^k(FP) \longrightarrow H^k(F(P_{\geq n_2})) \longrightarrow H^{k+1}(F(P_{\leq n_2-1})) \longrightarrow \cdots$$

因为 $k, k+1 < n_1$, 所以 $H^k(F(P_{\leq n_2-1})) = H^{k+1}(F(P_{\leq n_2-1})) = 0$. 于是 $H^k(FP) \cong H^k(F(P_{\geq n_2}))$, 而 $P_{\geq n_2}$ 作为有界复形根据有界情形的结果得到 $H^k(F(P_{\geq n_2})) \in \mathrm{ob}\mathcal{B}'$, 所以也有 $H^k(FP) \in \mathrm{ob}\mathcal{B}'$. □

Theorem 3.125 ([Ye92]). 设 K-代数 A 满足 A 是投射 K-模且 A 是双边 Noether 环, $\Omega \in \mathrm{ob}\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 是 A 上对偶复形, 记 $\mathscr{D}_f(A\text{-}\mathbf{Mod})$ 是所有各次上同调为有限生成左 A-模的 A-模复形定义的 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ 的全子范畴, $\mathscr{D}_f(\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 是所有各次上同调为有限生成右 A-模的 A-模复形定义的 $\mathscr{D}(\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 的全子范畴. 那么
(1) $\mathrm{RHom}_A(-,\Omega) : \mathscr{D}_f(A\text{-}\mathbf{Mod}) \to \mathscr{D}_f(\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 和 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega) : \mathscr{D}_f(\mathbf{Mod}\text{-}A) \to \mathscr{D}_f(A\text{-}\mathbf{Mod})$ 定义合理.
(2) 此时 [命题3.103] 给出的 $\mathscr{D}_f(A\text{-}\mathbf{Mod})$ 上恒等函子到 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(\mathrm{RHom}_A(-,\Omega),\Omega)$ 的自然变换 Φ^{op} 是自然同构; $\mathscr{D}_f(\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 上恒等函子到 $\mathrm{RHom}_A(\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega),\Omega)$ 的自然变换 Φ 是自然同构.
特别地, $\mathrm{RHom}_A(-,\Omega)$ 和 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega)$ 给出 $\mathscr{D}_f(A\text{-}\mathbf{Mod})$ 和 $\mathscr{D}_f(\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 之间的范畴对偶.

Proof. (1) 设 $s : \Omega \to I$ 是 Ω 的下有界内射分解, 那么根据 Φ 和 Φ^{op} 的定义, 只需说明 $\mathscr{D}_f(A\text{-}\mathbf{Mod})$ 中任何复形 Y 满足 $\mathrm{RHom}_A(Y,\Omega) \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_f(\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 以及 $\mathscr{D}_f(\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中任何复形 Z 满足 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(Z,\Omega) \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_f(A\text{-}\mathbf{Mod})$. 因为 A 是双边 Noether 环, 所以由 [注记3.118] 得到 $\mathscr{D}_f(A\text{-}\mathbf{Mod})$ 是 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ 的三角子范畴, $\mathscr{D}_f(\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 是 $\mathscr{D}(\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 的三角子范畴. 从 [例3.113] 的证明过程知 $\mathrm{RHom}_A(-,\Omega)$ 和 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega)$ 在两个方向上都 way-out. 根据 [命题3.124(9)] 和 [命题3.124(6)], 只要证明证明对任何有限生成投射左 A-模 P 和有限生成右 A-模 Q, 有 $\mathrm{RHom}_A(P,\Omega) \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_f(\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 以及 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(Q,\Omega) \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_f(A\text{-}\mathbf{Mod})$ 即可. 因为有限生成投射模是有限生成自由模的直和因子, 故由 [命题1.4], 只需证明 ${}_AP = A, Q_A = A$ 的情形即可. 由对偶复形定义中的 (DC2) 和 [例3.100], 我们看到 $\mathrm{Hom}_A(A,I) \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_f(\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 以及 $\mathrm{Hom}_{A^{op}}(A,I) \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_f(A\text{-}\mathbf{Mod})$.

(2) 沿用 [注记3.104] 的记号, 根据 [注记3.104] 和 [命题3.122(4)(5)], 一旦证明对任何有限生成投射左 A-模 P 和有限生成投射右 A-模 Q, θ_P 和 θ_Q^{op} 是同构, 就得到自然同构 $\Phi^{op} : 1_{\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})} \to \mathrm{RHom}_{A^{op}}(\mathrm{RHom}_A(-,\Omega),\Omega)$ 和 $\Phi : 1_{\mathscr{D}(\mathbf{Mod}\text{-}A)} \to \mathrm{RHom}_A(\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega),\Omega)$. 类似 (1), 根据 [命题1.4], 只需证明 ${}_AP = A, Q_A = A$ 的情形即可. 而这就是对偶复形定义中的 (DC3). □

Remark 3.126. 根据 [定理3.125], 对域上双边 Noether 代数 A, 如果 A 上对偶复形 Ω 存在, 那么 Ω 诱导的逆变三角函子 $\mathrm{RHom}_A(-,\Omega)$ 和 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega)$ 给出左 A-模导出范畴的所有上同调模是有限生成模的复形构成的三

角子范畴 $\mathscr{D}_f(A\text{-}\mathbf{Mod})$ 和右 A-模导出范畴的所有上同调模是有限生成模的复形构成的三角子范畴 $\mathscr{D}_f(\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 间的范畴对偶. 这也是对偶复形命名的缘由.

Corollary 3.127 ([NavdB05]). 设域 $\Bbbk$ 上代数 A 满足 A 是双边 Noether 环, Ω 是 A 上对偶复形. 记 $\mathscr{D}_{(f,f)}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 是所有各次上同调模作为左 A-模和右 A-模都有限生成的双模复形构成的 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 的全子范畴. 类似引入记号 $\mathscr{D}_{(f,-)}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 和 $\mathscr{D}_{(-,f)}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$, 易见 $\mathscr{D}_{(f,f)}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A), \mathscr{D}_{(f,-)}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A), \mathscr{D}_{(-,f)}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 都是 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 的三角子范畴. 根据 [定理3.125] 有定义合理的三角函子

$$D = \mathrm{RHom}_A(-,\Omega) : \mathscr{D}_{(f,f)}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A) \to \mathscr{D}_{(-,f)}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A),$$

$$D^{op} = \mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega) : \mathscr{D}_{(f,f)}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A) \to \mathscr{D}_{(f,-)}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A).$$

那么对任何 $X, Y \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^-_{(f,f)}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 有 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构

$$\mathrm{RHom}_A(X,Y) \cong \mathrm{RHom}_{A^{op}}(DY, DX),$$

$$\mathrm{RHom}_{A^{op}}(X,Y) \cong \mathrm{RHom}_A(D^{op}Y, D^{op}X).$$

Proof. 因为 Ω 是对偶复形说明 Ω 在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构于某个有界复形 Z 满足 Z 作为左 A-模复形和右 A-模复形都是内射复形, 所以用 Z 代替 Ω 可不妨设 Ω 是有界复形并且作为左 A-模复形以及作为右 A-模复形, Ω 都是有界内射复形. 于是 $DX, DY, D^{op}X, D^{op}Y$ 在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中都同构于某个上有界 A-A 双模复形.

现在应用 [命题3.97], 得到 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构

$$\begin{aligned}\mathrm{RHom}_{A^{op}}(DY, DX) &= \mathrm{RHom}_{A^{op}}(DY, \mathrm{RHom}_A(X,\Omega))\\ &\cong \mathrm{RHom}_A(X, \mathrm{RHom}_{A^{op}}(DY,\Omega))\\ &= \mathrm{RHom}_A(X, D^{op}DY).\end{aligned}$$

因为 $Y \in \mathscr{D}_{f,-}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$, 故应用 [定理3.125] 知 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中标准态射 $Y \to D^{op}DY$ 是同构 (回忆 [命题3.103]). 因此在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中 $\mathrm{RHom}_A(X,Y) \cong \mathrm{RHom}_A(X, D^{op}DY) \cong \mathrm{RHom}_A(X,Y)$.

对称地, $X \in \mathrm{ob}\mathscr{D}_{(-,f)}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 说明标准态射 $X \to DD^{op}X$ 给出 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构 $X \cong DD^{op}X$. 于是应用 [命题3.97] 得到 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构 $\mathrm{RHom}_A(D^{op}Y, D^{op}X) = \mathrm{RHom}_A(D^{op}Y, \mathrm{RHom}_{A^{op}}(X,\Omega)) \cong \mathrm{RHom}_{A^{op}}(X, \mathrm{RHom}_A(D^{op}Y,\Omega)) \cong \mathrm{RHom}_{A^{op}}(X,Y)$. □

Corollary 3.128. 设域 $\Bbbk$ 上代数 A 满足 A 是双边 Noether 环, Ω_1 和 Ω_2 都是 A 上对偶复形. 那么 $\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2)$ 作为左 A-模复形和作为右 A-模复形的各次上同调模都是有限生成 A-模. 特别地, 这时 $\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2)$ 作为左 A-模复形或作为右 A-模复形都是伪凝聚的 (注意 $\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2)$ 同构于某个有界复形, 应用 [推论3.120]).

Proof. 根据 [定理3.125] 和对偶复形的定义立即得到 $\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2)$ 作为右 A-模复形的各次上同调模是有限生成 A-模. 对称地, $\mathrm{RHom}_A(\Omega_2,\Omega_1)$ 作为右 A-模复形的各次上同调模也有限生成.

现在需要证明 $\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2)$ 作为左 A-模复形的各次上同调模有限生成. 在 [推论3.127] 中取 $\Omega = X = \Omega_1$(注意 Ω_1 同构于某个有界 A-A 双模复形) 以及 $Y = \Omega_2$, 可得 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构 $\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2) \cong \mathrm{RHom}_{A^{op}}(\mathrm{RHom}_A(\Omega_2,\Omega_1), \mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_1))$. 根据 (DC3), 有 $\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_1) \cong A$, 所以 $\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2) \cong \mathrm{RHom}_{A^{op}}(\mathrm{RHom}_A(\Omega_2,\Omega_1), A)$. 由于 $\mathrm{RHom}_A(\Omega_2,\Omega_1)$ 作为右 R-模复形各次上同调模有限生成, 故应用 [例3.121] 可得 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(\mathrm{RHom}_A(\Omega_2,\Omega_1), A)$ 作为左 A-模复形的各次上同调模有限生成. 由此证明了 $\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2)$ 作为左 A-模复形的各次上同调模有限生成. □

Proposition 3.129 ([Ye92]). 设域 $\Bbbk$ 上代数 A 满足 A 是双边 Noether 环. 并设 Ω_1 和 Ω_2 都是 A 上对偶复形. 记 $\mathscr{D}^-_f(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 是所有作为右 A-模复形各次上同调模是有限生成右 A-模的复形构成的 $\mathscr{D}^-(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 的三角子范畴. 那么存在自然同构 $-\otimes^L_A \mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2)\cong \mathrm{RHom}_A(\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega_1),\Omega_2)$.

Proof. 对任何有界 A-A 双模复形 H, 记 $\zeta:(-\otimes^L_A H)\lambda^-\to\lambda\mathrm{Tot}^\oplus(-\otimes_A H)$ 是 $-\otimes^L_A H:\mathscr{D}^-(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)\to\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 作为左导出函子带有的自然变换 (那么对任何作为右 A-模复形每项都是投射右 A-模的上有界复形 P 有 ζ_P 是同构). 根据 [命题3.77], 存在有界 A-A 双模复形 Z_1,Z_2 使得它们作为左 A-模复形和右 A-模复形都是内射复形, 并在 $\mathscr{D}^+(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有同构 $Z_1\cong\Omega_1, Z_2\cong\Omega_2$.

现在 $\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,-)$ 产生同构 $\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2)\cong\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,Z_2)$, 也有

$$\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2)\cong\mathrm{RHom}_A(Z_1,Z_2)\cong\mathrm{Hom}_A(Z_1,Z_2),$$

记该 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构为 $\gamma:\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2)\cong\mathrm{Hom}_A(Z_1,Z_2)$, 注意 $\mathrm{Hom}_A(Z_1,Z_2)$ 是有界 A-A 双模复形. 那么 $\theta_X = X\otimes^L_A\gamma : X\otimes^L_A\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2)\to X\otimes^L_A\mathrm{Hom}_A(Z_1,Z_2)$ 给出三角函子间自然同构 θ. 类似地, 我们也有自然同构 $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_{A^{op}}(-,Z_1),Z_2)\cong\mathrm{RHom}_A(\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega_1),\Omega_2)$, 这里把有界单边内射复形决定的逆变 Hom 复形函子的右导出函子和逆变 Hom 复形函子使用了相同记号. 所以我们只需要证明 $-\otimes^L_A\mathrm{Hom}_A(Z_1,Z_2)$ 和 $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_{A^{op}}(-,Z_1),Z_2)$ 间存在自然同构即可.

对任何上有界 A-A 双模复形 X, 取定上有界投射分解 $s_X:P\to X$(这里的 P 每一项作为右 A-模当然也是投射的). 根据 [例1.80], 有链映射 $\tau_P:\mathrm{Tot}^\oplus(P\otimes_A\mathrm{Hom}_A(Z_1,Z_2))\to\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_{A^{op}}(P,Z_1),Z_2)$. 于是根据前面的记号, 上有界 (投射右 A-模) 复形 P 对应 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构 $\zeta_P:P\otimes^L_A\mathrm{Hom}_A(Z_1,Z_2)\to\mathrm{Tot}^\oplus(P\otimes_A\mathrm{Hom}_A(Z_1,Z_2))$ 并且关于 P 是自然的. 现在存在唯一的 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中态射 $\delta_X:P\otimes^L_A\mathrm{Hom}_A(Z_1,Z_2)\to\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_{A^{op}}(P,Z_1),Z_2)$ 使得

$$\begin{tikzcd}
P\otimes^L_A\mathrm{Hom}_A(Z_1,Z_2) \arrow[r, "\zeta_P"] \arrow[dr, dashed, "\delta_X"'] & \mathrm{Tot}^\oplus(P\otimes_A\mathrm{Hom}_A(Z_1,Z_2)) \arrow[d, "\tau_P"] \\
 & \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_{A^{op}}(P,Z_1),Z_2)
\end{tikzcd}$$

交换. 进而有唯一的 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中态射 $\Delta_X:X\otimes^L_A\mathrm{Hom}_A(Z_1,Z_2)\to\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_{A^{op}}(X,Z_1),Z_2)$ 使得

$$\begin{tikzcd}
X\otimes^L_A\mathrm{Hom}_A(Z_1,Z_2) \arrow[r, dashed, "\Delta_X"] & \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_{A^{op}}(X,Z_1),Z_2) \\
P\otimes^L_A\mathrm{Hom}_A(Z_1,Z_2) \arrow[u, "s_X\otimes^L_A\mathrm{Hom}_A(Z_1,Z_2)"] \arrow[r, "\delta_X"] & \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_{A^{op}}(P,Z_1),Z_2) \arrow[u, "\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_{A^{op}}(s_X,Z_1),Z_2)"']
\end{tikzcd}$$

交换. 于是 Δ 给出 $-\otimes^L_A\mathrm{Hom}_A(Z_1,Z_2)$ 到 $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_{A^{op}}(-,Z_1),Z_2)$ 的自然变换. 并且 [注记1.82] 和 [注记3.53] 说明 Δ 作为共变三角函子之间的自然变换也与相应导出范畴上的平移函子相容.

通过 [例3.113] 和 [例3.115], 我们看到 $-\otimes^L_A\mathrm{Hom}_A(Z_1,Z_2)$ 和 $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_{A^{op}}(-,Z_1),Z_2)$ 都是 way-out left 的共变三角函子. 现在 $-\otimes^L_A\mathrm{Hom}_A(Z_1,Z_2)$ 和 $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_{A^{op}}(-,Z_1),Z_2)$ 都是从 $\mathscr{D}^-_f(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 到 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 的三角函子, 我们可以应用 [命题3.122(2)(5)] 把关于 Δ 是自然同构的验证转化为验证对任何作为右 A-模有限生成投射模的 A-A 双模 Q(视作集中在 0 次部分的复形) 有 Δ_Q 是同构. 易见我们只需要考虑 Q 仅是有限生成投射右 A-模的情形即可. 因为有限生成投射右 A-模都是有限生成自由模的直和因子, 所以根据 [命题1.4] 我们可以把验证简化为验证 Δ_A 是同构. 在 [例1.80] 中已经看到 τ_A 是复形链同构, 所以 δ_A 是 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构, 这保证了 Δ_A 也是同构. □

Remark 3.130. 当将 A 视作集中在 0 次部分的 A-A 双模复形, 结合 A 是双边 Noether 代数的条件我们得到 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构 $\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2)\cong\mathrm{RHom}_A(\mathrm{RHom}_{A^{op}}(A,\Omega_1),\Omega_2)$.

Remark 3.131. 根据证明过程, 我们看到对任何上有界 A-A 双模投射复形 P, τ_P 是 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中拟同构.

Remark 3.132. 沿用 [命题3.129] 的假设和记号. 同样的证明过程也可以得到当把 $-\otimes_A^L\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2)$ 和 $\mathrm{RHom}_A(\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega_1),\Omega_2)$ 都视作从 $\mathscr{D}^-(\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 到 $\mathscr{D}(\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 的三角函子, 也有 $-\otimes_A^L\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2)\cong\mathrm{RHom}_A(\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega_1),\Omega_2)$. 特别地, 这时对任何右 A-模 M, 有 $\mathscr{D}(\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构

$$M\otimes_A^L\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2)\cong\mathrm{RHom}_A(\mathrm{RHom}_{A^{op}}(M,\Omega_1),\Omega_2).$$

这一观察说明作为左 A-模复形, $\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2)$ 有有限 Tor 维数 (回忆 [定义3.91]). 于是结合 [推论3.128] 我们得到 $\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2)$ 作为左 A-模复形是完全复形 (利用 [推论3.96]). 对称地, 如果 Ω_1 和 Ω_2 是双边 Noether 代数 A 上对偶复形, 那么可自然将 Ω_1 和 Ω_2 视作 A^{op}-A^{op} 双模复形, 这是 A^{op} 上对偶复形. 于是 $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(\Omega_1,\Omega_2)$ 视作左 A^{op}-模复形也是完全复形. 注意到在把 Ω_1 和 Ω_2 视作 A^{op}-A^{op} 双模复形的前提下, $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(\Omega_1,\Omega_2)$ 的左 A^{op}-模复形结构就是把 Ω_1 和 Ω_2 视作 A-A 双模复形的前提下, $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(\Omega_1,\Omega_2)$ 上的右 A-模复形结构. 于是知在把 Ω_1 和 Ω_2 视作 A-A 双模复形的前提下, $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(\Omega_1,\Omega_2)$ 作为右 A-模复形是完全复形. 总结一下, 域上双边 Noether 代数 A 如果有对偶复形 Ω_1,Ω_2, 那么 $\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2)$ 作为左 A-模复形是完全复形, $\mathrm{RHom}_{A^{op}}(\Omega_1,\Omega_2)$ 作为右 A-模复形是完全复形.

Remark 3.133. 在 [命题3.129] 的假设与记号下, 我们注意到双边 Noether 代数 A 上的对偶复形如果存在, 那么 $\mathrm{RHom}_A(\mathrm{RHom}_{A^{op}}(A,\Omega_1),\Omega_2)$ 作为 A-A 双模复形当然在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构于某个有界复形, 并且 [定理3.125] 说明 $\mathrm{RHom}_A(\mathrm{RHom}_{A^{op}}(A,\Omega_1),\Omega_2)$ 无论是作为左 A-模复形还是右 A-模复形, 各次上同调模都是有限生成 A-模. 为叙述方便, 这里引入些新的记号: 记

$$D_1=\mathrm{RHom}_A(-,\Omega_1),D_1^{op}=\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega_1),$$

$$D_2=\mathrm{RHom}_A(-,\Omega_2),D_2^{op}=\mathrm{RHom}_{A^{op}}(-,\Omega_2).$$

那么前面指出 $D_2D_1^{op}(A)$ 在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构于有界复形并且作为左 A-模复形和右 A-模复形的各次上同调模都是有限生成 A-模. [注记3.130] 说明这时在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中 $D_2D_1^{op}(A)\cong\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2)$. 对称地, 也有 $D_1D_2^{op}(A)\cong\mathrm{RHom}_A(\Omega_2,\Omega_1)$. 并且在新的记号下, [命题3.129] 说明对任何满足各次上同调模是有限生成右 A-模的上有界 A-A 双模复形 X 有 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构 $X\otimes_A^L D_2(\Omega_1)\cong D_2D_1^{op}(X)$. 对称地, 也有 $X\otimes_A D_1(\Omega_2)\cong D_1D_2^{op}(X)$. 特别地, 得到 $X\otimes_A^L D_2D_1^{op}(A)\cong D_2D_1^{op}(X)$ 和 $X\otimes_A^L D_1D_2^{op}(A)\cong D_1D_2^{op}(X)$.

因此我们能够对 A-A 双模复形 $D_2D_1^{op}(A)$ 应用 [命题3.129] 得到 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构

$$D_2D_1^{op}(A)\otimes_A^L D_1D_2^{op}(A)\cong D_1D_2^{op}D_2D_1^{op}(A).$$

现在应用 [定理3.125], 得到 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构 $D_1D_2^{op}D_2D_1^{op}(A)\cong D_1D_1^{op}(A)\cong A$. 故在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中

$$D_2D_1^{op}(A)\otimes_A^L D_1D_2^{op}(A)\cong A\cong D_1D_2^{op}(A)\otimes_A^L D_2D_1^{op}(A).$$

其中 $D_2D_1^{op}(A)\cong\mathrm{RHom}_A(\Omega_1,\Omega_2),D_1D_2^{op}(A)\cong\mathrm{RHom}_A(\Omega_2,\Omega_1)$.

回忆 M, N 是 A-A 双模, 那么 $M \otimes_K N$ 上有自然的 A^e-A^e 双模结构: 对任何 $m \in M, n \in N$, 左 A^e-模结构来自 $(a \otimes b)(m \otimes n) = am \otimes nb$, 右 A^e-模结构来自 $(m \otimes n)(a \otimes b) = ma \otimes bn$, 易见 $M \otimes_K N$ 在如上定义下构成 A^e-A^e 双模. 即这里 $M \otimes_K N$ 的左 A^e-模结构来自外结构; 右 A^e-模结构来自内结构. 如果 $f : M_1 \to M_2$ 和 $g : N_1 \to N_2$ 都是 A-A 双模间的双模同态, 那么 $f \otimes g : M_1 \otimes_K N_1 \to M_2 \otimes_K N_2$ 成为 A^e-A^e 双模同态. 特别地, 如果 Ω_1 和 Ω_2 都是 A-A 双模复形, 那么 $\Omega_1 \otimes_K \Omega_2$ 可自然视作 A^e-A^e 双模复形.

通常双边 Noether 代数的对偶复形就算存在也未必唯一 (当双边 Noether 代数的左右自内射维数都有限时, 对偶复形存在, 见 [注记3.145]), van den Bergh 引入了 "刚性" 条件来保证刚性对偶复形具有同构唯一性.

Definition 3.134 (刚性对偶复形, [vdB97]). 设 K-代数 A 满足 A 是投射 K-模且 A 是双边 Noether 环. 如果 A 上对偶复形 $\Omega \in \mathrm{ob}\mathscr{D}^+(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 满足

- (DC4) 在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有同构 $\mathrm{RHom}_{A^e}(A, {}_A\Omega \otimes_K \Omega_A) \cong \Omega$,

则称 Ω 是**刚性对偶复形**.

现在我们来证明刚性对偶复形一旦存在, 便在同构意义下唯一.

Theorem 3.135 ([vdB97]). 设 A 是域 $\Bbbk$ 上双边 Noether 代数满足存在对偶复形. 如果 Ω_1 和 Ω_2 都是 A 上对偶复形, 则在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中 $\Omega_1 \cong \Omega_2$.

Proof. 引入记号: $D_1 = \mathrm{RHom}_A(-, \Omega_1), D_1^{op} = \mathrm{RHom}_{A^{op}}(-, \Omega_1), D_2 = \mathrm{RHom}_A(-, \Omega_2), D_2^{op} = \mathrm{RHom}_{A^{op}}(-, \Omega_2)$. 那么在此记号下 [注记3.133] 中已经指出在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有 $D_2 D_1^{op}(A) \cong \mathrm{RHom}_A(\Omega_1, \Omega_2), D_1 D_2^{op}(A) \cong \mathrm{RHom}_A(\Omega_2, \Omega_1)$ 以及 $D_2 D_1^{op}(A) \otimes_A^L D_1 D_2^{op}(A) \cong A \cong D_1 D_2^{op}(A) \otimes_A^L D_2 D_1^{op}(A)$. 再记

$$L = \mathrm{RHom}_A(\Omega_1, \Omega_2), L' = \mathrm{RHom}_A(\Omega_2, \Omega_1), \tilde{L} = \mathrm{RHom}_{A^{op}}(\Omega_1, \Omega_2), \tilde{L}' = \mathrm{RHom}_{A^{op}}(\Omega_2, \Omega_1).$$

因为把 Ω_1, Ω_2 视作 A^{op}-A^{op} 双模复形后也是 A^{op} 上对偶复形, 因此在新的记号下也有

$$L \otimes_A^L L' \cong L' \otimes_A^L L \cong A, \tilde{L} \otimes_{A^{op}}^L \tilde{L}' \cong \tilde{L}' \otimes_{A^{op}}^L \tilde{L} \cong A^{op}.$$

根据 [注记1.86], 上式最后两个同构也可以表示为 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构 $\tilde{L}' \otimes_A^L \tilde{L} \cong \tilde{L} \otimes_A^L \tilde{L}' \cong A$. 根据 [注记3.132], L, L' 作为左 A-模复形是完全复形, $\tilde{L}, \tilde{L}'$ 作为右 A-模复形是完全复形. 而 [注记3.95] 也说明 L 作为左 A-模复形有有限 Tor 维数保证了存在有界 A-A 双模复形 T 使得 T 每项是平坦左 A-模, $\tilde{L}$ 作为右 A-模复形有有限 Tor 维数保证了存在有界 A-A 双模复形 $\tilde{T}$ 使得 $\tilde{T}$ 每项作为右 A-模平坦.

现在取定 A 作为左 A^e-模复形的上有界投射分解 $P \to A$. 因为 Ω_1 在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中 Z 同构于有界的 A-A 双模复形 Z_1 满足 Z_1 作为左 A-模复形以及作为右 A-模复形都是内射复形, 所以由这里的 $L, \tilde{L}$ 也都同构于有界 A-A 双模复形 $T, \tilde{T}$ 以及 [注记3.84], [注记3.86] 可知如果能够证明有 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(P, Z_1 \otimes_A T \otimes_\Bbbk \tilde{T} \otimes_A Z_1) \cong \tilde{T} \otimes_A \mathrm{Hom}_{A^e}(P, Z_1 \otimes_\Bbbk Z_1) \otimes_A T,$$

我们就能得到 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构

$$\mathrm{RHom}_{A^e}(A, \Omega_1 \otimes_A^L L \otimes_\Bbbk \tilde{L} \otimes_A^L \Omega_1) \cong \tilde{L} \otimes_A^L \mathrm{RHom}_{A^e}(A, \Omega_1 \otimes_\Bbbk \Omega_1) \otimes_A^L L. \tag{3.6}$$

对任何有界 A-A 双模复形 Y_1, Y_2, 记

$$\tilde{\tau}_{(Y_1,Y_2)} : Y_2 \otimes_A \mathrm{RHom}_{A^e}(P, Z_1 \otimes_\Bbbk Z_1) \otimes_A Y_1 \to \mathrm{Hom}_{A^e}(P, Z_1 \otimes_A Y_1 \otimes_\Bbbk Y_2 \otimes_A Z_1)$$

是 [注记1.91] 中构造的复形链映射, 当 Y_1 每项是有限生成自由左 A-模且 Y_2 都是每项为有限生成自由右 A-模时, $\tilde{\tau}_{(Y_1,Y_2)}$ 是链同构. 我们断言 $\tilde{\tau}_{(T,\tilde{T})}: \tilde{T} \otimes_A \mathrm{Hom}_{A^e}(P, Z_1 \otimes_{\Bbbk} Z_1) \otimes_A T \to \mathrm{Hom}_{A^e}(P, Z_1 \otimes_A T \otimes_{\Bbbk} \tilde{T} \otimes_A Z_1)$ 在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中对应的态射是同构. 要证断言等价于证 $\tilde{\tau}_{(T,\tilde{T})}$ 是复形间拟同构. 而这只需要证明 $\tilde{\tau}_{(T,\tilde{T})}$ 是 $\Bbbk$-模复形间拟同构即可. 因为 T 作为左 A-模复形是完全的, $\tilde{T}$ 作为右 A-模复形是完全的, 所以存在每项是有限生成自由左 A-模的有界复形 F 使得在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ 中 $F \cong T$; 存在每项是有限生成自由右 A-模的有界复形 $\tilde{F}$ 使得在 $\mathscr{D}(\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中 $\tilde{F} \cong \tilde{T}$. 因为 $F, \tilde{F}$ 都是相应导出范畴中的上有界投射复形, 所以可应用 [推论3.38] 知存在左 A-模复形的拟同构 $\alpha: F \to T$ 和右 A-模复形的拟同构 $\beta: \tilde{F} \to \tilde{T}$. 于是得到 $\Bbbk$-模复形的链映射交换图:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{T} \otimes_A \mathrm{Hom}_{A^e}(P, Z_1 \otimes_{\Bbbk} Z_1) \otimes_A T \arrow[r, "\tilde{\tau}_{(T,\tilde{T})}"] & \mathrm{Hom}_{A^e}(P, Z_1 \otimes_A T \otimes_{\Bbbk} \tilde{T} \otimes_A Z_1) \\
\tilde{F} \otimes_A \mathrm{Hom}_{A^e}(P, Z_1 \otimes_{\Bbbk} Z_1) \otimes_A F \arrow[r, "\tilde{\tau}_{(F,\tilde{F})}"] \arrow[u, "\beta\otimes 1\otimes\alpha"] & \mathrm{Hom}_{A^e}(P, Z_1 \otimes_A F \otimes_{\Bbbk} \tilde{F} \otimes_A Z_1) \arrow[u, "\mathrm{Hom}_{A^e}(P,1\otimes\alpha\otimes\beta\otimes 1)"']
\end{tikzcd}$$

现在上图的由下行是复形链同构, 竖直方向两边的链映射在导出范畴 $\mathscr{D}(\Bbbk\text{-}\mathbf{Mod})$ 中是同构可知 $\tilde{\tau}_{(T,\tilde{T})}$ 对应在 $\mathscr{D}(\Bbbk\text{-}\mathbf{Mod})$ 中态射, 即右分式等价类 $\tilde{\tau}_{(T,\tilde{T})}1^{-1}$ 是同构. 这说明 $\tilde{\tau}_{(T,\tilde{T})}$ 是 $\Bbbk$-模复形间的拟同构, 这就得到 $\tilde{\tau}_{(T,\tilde{T})}$ 作为 A-A 双模复形间的链映射也是拟同构, 断言得证. 由此得到 (3.6) 成立.

现在我们利用 (3.6) 和 Ω_1, Ω_2 是刚性对偶复形的条件来说明 $\Omega_1 \cong \Omega_2$. 这里再指出利用 [命题3.129] 和 (DC3) 立即得到 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构 $\Omega_1 \otimes_A^L L \cong \mathrm{RHom}_A(A, \Omega_2) \cong \Omega_2$. 交换 Ω_1 和 Ω_2 的位置便知 $\Omega_2 \otimes_A^L L' \cong \Omega_1$. 再把 Ω_1 和 Ω_2 视作 A^{op}-A^{op} 双模复形后, 作为 A^{op} 上的对偶复形, 也有 $\mathscr{D}(A^{op}\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A^{op})$ 中同构 $\Omega_1 \otimes_{A^{op}}^L \tilde{L} \cong \Omega_2$. 交换 Ω_1 和 Ω_2 位置得到 $\Omega_2 \otimes_{A^{op}}^L \tilde{L}' \cong \Omega_1$. 应用 [注记1.86] 得到 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构 $\tilde{L} \otimes_A^L \Omega_1 \cong \Omega_2$ 以及 $\tilde{L}' \otimes_A^L \Omega_2 \cong \Omega_1$. 利用 (3.6) 以及 Ω_1, Ω_2 都是刚性对偶复形, 我们计算

$$\begin{aligned}
\Omega_1 \otimes_A^L L &\cong \Omega_2 \\
&\cong \mathrm{RHom}_{A^e}(A, \Omega_2 \otimes_{\Bbbk} \Omega_2) \\
&\cong \mathrm{RHom}_{A^e}(A, \Omega_1 \otimes_A^L L \otimes_{\Bbbk} \tilde{L} \otimes_A^L \Omega_1) \\
&\cong \tilde{L} \otimes_A^L \mathrm{RHom}_{A^e}(A, \Omega_1 \otimes_{\Bbbk} \Omega_1) \otimes_A^L L \\
&\cong \tilde{L} \otimes_A^L \Omega_1 \otimes_A^L L \\
&\cong \Omega_2 \otimes_A^L L.
\end{aligned}$$

在 [注记3.90] 中已经指出导出张量积具有结合律. 所以在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有同构

$$\Omega_1 \cong \Omega_1 \otimes_A^L A \cong \Omega_1 \otimes_A^L (L \otimes_A^L L') \cong (\Omega_1 \otimes_A^L L) \otimes_A^L L' \cong (\Omega_2 \otimes_A^L L) \otimes_A^L L' \cong \Omega_2 \otimes_A^L (L \otimes_A^L L') \cong \Omega_2.$$

□

Remark 3.136. 根据 (3.6) 的证明过程, 我们也证明了对域 $\Bbbk$ 上双边 Noether 代数 A, 在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构于某个有界复形的 A-A 双模复形 Ω, 和 A-A 双模复形 $X, Y, \tilde{Y}$, 如果 X 是上有界的, Y 作为左 A-模复形是完全复形且 $\tilde{Y}$ 作为右 A-模复形是完全复形, 则在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有同构

$$\mathrm{RHom}_{A^e}(X, \Omega \otimes_A^L Y \otimes_{\Bbbk} \tilde{Y} \otimes_A^L \Omega) \cong \tilde{Y} \otimes_A^L \mathrm{RHom}_{A^e}(X, \Omega \otimes_{\Bbbk} \Omega) \otimes_A^L Y.$$

Definition 3.137 (Artin-Schelter Cohen-Macaulay 代数, [vdB97]). 设 A 是域 $\Bbbk$ 上双边 Noether 代数. 如果 A 存在刚性对偶复形并且 A 的对偶复形的上同调模集中在一个位置 (根据 [定理3.135], 这个条件是定义合理的), 则称 A 是 **Artin-Schelter Cohen-Macaulay 的** (简称为 **AS Cohen-Macaulay 代数**).

Remark 3.138. 如果 AS Cohen-Macaulay 代数 A 的刚性对偶复形 Ω 的上同调模集中在 d 次位置, 根据 [例3.45], 在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有同构 $\Omega \cong H^d(\Omega)[-d]$. 称 $\omega_A = H^d(\Omega)$ 是 A 的**对偶模**. 称满足对偶模 ω_A 是可逆 A-A 双模的 AS Cohen-Macaulay 代数 A 为 **AS Gorenstein 代数**. 注意到只要 AS Cohen-Macaulay 代数 A 的对偶模 ω_A 满足作为左 A-模和右 A-模是投射模, 就能得到 ω_A 是可逆双模: 结合 (DC2) 可知 ω_A 作为左 A-模和右 A-模都是有限生成投射模. 为不引起左右模结构的混淆, 以下简记 ω_A 为 ω. 根据 (DC3), 我们也有 A-A 双模同构 $\mathrm{End}({}_A\omega) \cong A \cong \mathrm{End}(\omega_A)$(比较 (DC3) 中复形同构两边复形的上同调模). 现在 ω 是有限生成投射左 A-模保证了有 A-A 双模同构 $A \cong \mathrm{End}({}_A\omega) \cong \mathrm{Hom}_A({}_A\omega, {}_AA) \otimes_A \omega$. 对称地, 也有 $\omega \otimes_A \mathrm{Hom}_A(\omega_A, A_A) \cong \mathrm{End}(\omega_A) \cong A$. 由此可知只要 AS Cohen-Macaulay 代数 A 满足 ω_A 作为左 A-模和右 A-模投射, 便有 A 是 AS Gorenstein 的. 并且根据我们的证明过程, 也有 A-A 双模同构 $\mathrm{Hom}_A(\omega_A, A_A) \cong \mathrm{Hom}_A({}_A\omega, {}_AA)$.

现在设 A 是 AS Gorenstein 代数, 并且其刚性对偶复形 $\Omega \cong \omega_A[-d]$. 那么

$$\mathrm{RHom}_A(\Omega, A) \cong \mathrm{Hom}_A(\omega_A[-d], A) \cong \mathrm{Hom}_A(\omega_A, A)[d].$$

由此得到 $\mathrm{RHom}_A(\Omega, A) \otimes_A^L \Omega \cong \mathrm{Hom}_A(\omega_A, A)[d] \otimes_A \omega_A[-d] \cong A$. 对称地, 也有

$$\Omega \otimes_A^L \mathrm{RHom}_A(\Omega, A) \cong \omega_A[-d] \otimes_A \mathrm{Hom}_{A^{op}}(\omega_A, A)[d] \cong A.$$

因此对 AS Gorenstein 代数 A 的刚性对偶复形 Ω, 有 $\mathrm{RHom}_A(\Omega, A) \otimes_A^L \Omega \cong \Omega \otimes_A^L \mathrm{RHom}_A(\Omega, A) \cong A$. 这里 $\mathrm{RHom}_A(\Omega, A)$ 作为左 A-模复形和右 A-模复形都是完全复形. 简记 $\mathrm{RHom}_A(\Omega, A)$ 为 Ω^{-1}, 则应用 [注记3.136] 可得 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构 $\mathrm{RHom}_{A^e}(A, \Omega \otimes_A^L \Omega^{-1} \otimes_\Bbbk \Omega^{-1} \otimes_A^L \Omega) \cong \Omega^{-1} \otimes_A^L \mathrm{RHom}_{A^e}(A, \Omega \otimes_\Bbbk \Omega) \otimes_A^L \Omega^{-1}$. 故

$$\begin{aligned}
\mathrm{RHom}_{A^e}(A, A^e) &= \mathrm{RHom}_{A^e}(A, A \otimes_\Bbbk A) \\
&\cong \mathrm{RHom}_{A^e}(A, \Omega \otimes_A^L \Omega^{-1} \otimes_\Bbbk \Omega^{-1} \otimes_A^L \Omega) \\
&\cong \Omega^{-1} \otimes_A^L \mathrm{RHom}_{A^e}(A, \Omega \otimes_\Bbbk \Omega) \otimes_A^L \Omega^{-1} \\
&\cong \Omega^{-1} \otimes_A^L A \otimes_A^L \Omega^{-1} \\
&\cong \Omega^{-1}.
\end{aligned}$$

因此在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有同构 $\mathrm{RHom}_{A^e}(A, A^e) \cong \mathrm{RHom}_A(\Omega, A)$. 我们把前面的讨论总结为

Proposition 3.139 ([vdB97]). 设域 $\Bbbk$ 上双边 Noether 代数 A 是 AS Gorenstein 代数, Ω 是 A 上刚性对偶复形.
(1) $\mathrm{RHom}_A(\Omega, A)$ 作为左 A-模复形和右 A-模复形都是完全复形.
(2) 在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有同构 $\mathrm{RHom}_A(\Omega, A) \otimes_A^L \Omega \cong \Omega \otimes_A^L \mathrm{RHom}_A(\Omega, A) \cong A$.
(3) 在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有同构 $\mathrm{RHom}_A(\Omega, A) \cong \mathrm{RHom}_{A^{op}}(\Omega, A)$.
(4) 在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有同构 $\mathrm{RHom}_A(\Omega, A) \cong \mathrm{RHom}_{A^e}(A, A^e)$.

Remark 3.140. 根据 (4), 有 A-A 双模同构 $H^n(\mathrm{RHom}_A(\Omega, A)) \cong H^n(\mathrm{RHom}_{A^e}(A, A^e)), \forall n \in \mathbb{Z}$. 再由 [注记3.69] 便知 $H^n(\mathrm{RHom}_A(\Omega, A)) \cong \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A^e), \forall n \in \mathbb{Z}$. 如果设 $\Omega = \omega_A[d]$, 这里 ω_A 是 A 的对偶模, 那么

$\mathrm{RHom}_A(\Omega, A) = \mathrm{RHom}_A(\omega_A[d], A) \cong \mathrm{Hom}_A(\omega_A, A)[-d] = \mathrm{Hom}_A(\omega_A, A[-d]) \cong \mathrm{RHom}_A(\omega_A, A[-d])$, 所以

$$H^n(\mathrm{RHom}_A(\Omega, A)) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_A(\omega_A, A), & n = d, \\ 0, & n \neq d. \end{cases} \tag{3.7}$$

于是由 $H^n(\mathrm{RHom}_A(\Omega, A)) \cong H^n(\mathrm{RHom}_{A^e}(A, A^e)), \forall n \in \mathbb{Z}$ 和 (3.7) 可知

$$\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A^e) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_A(\omega_A, A), & n = d, \\ 0, & n \neq d. \end{cases} \tag{3.8}$$

通过 (3.8), 我们看到 AS Gorenstein 代数 A 满足 $\mathrm{Ext}^\bullet_{A^e}(A, A^e)$ 仅集中在一个位置且 $d \in \mathbb{N}$. 并且如果对偶模 ω_A 作为可逆双模的逆记作 ω_A^{-1}, 那么 $\mathrm{Ext}^\bullet_{A^e}(A, A^e)$ 非零的项作为 A-A 双模同构于 ω_A^{-1}. 如果对偶复形仅有的非零上同调模在 $-d$ 次位置, 那么 $\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A, A^e) \cong \omega_A^{-1} \neq 0$. 根据 (3.8), 我们也看到 $\mathrm{p.dim}_{A^e} A \geq d$. 如果 A 作为左 A^e-模是完全模 (例如当 A^e 是 Noether 环且 $\mathrm{p.dim}_{A^e} A < +\infty$ 时), 那么 [引理1.243] 说明 $d = \mathrm{p.dim}_{A^e} A$.

Corollary 3.141. 设域上双边 Noether 代数 A 是 AS Gorenstein 代数, 有刚性对偶复形 $\Omega \cong \omega_A[d]$. 那么在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有同构 $\mathrm{RHom}_A(\Omega, A) \cong U[-d]$, 其中 $U = \mathrm{Hom}_A(\omega_A, A)$ 是可逆 A-A 双模.

Proof. 根据 AS Gorenstein 代数的定义知 $U = \mathrm{Hom}_A(\omega_A, A)$ 是可逆 A-A 双模. 而 [注记3.140] 说明

$$H^n(\mathrm{RHom}_{A^e}(A, A^e)) = \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A^e) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_A(\omega_A, A), & n = d, \\ 0, & n \neq d. \end{cases}$$

现在根据 [例3.45], 得到 $\mathrm{RHom}_{A^e}(A, A^e) \cong U[-d]$. 而 [命题3.139] 指出 $\mathrm{RHom}_{A^e}(A, A^e) \cong \mathrm{RHom}_A(\Omega, A)$. □

在 [注记3.140] 中我们看到域上双边 Noether 代数 A 如果刚性对偶复形 $\Omega \cong \omega_A[d]$(在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中), 那么有 (3.8) 成立. 如果进一步 A 作为左 A^e-模是完全的 (例如满足 A^e 整体维数有限的仿射模有限代数 A, 见 [例1.193] 和 [推论1.240]), 那么 $d = \mathrm{p.dim}_{A^e} A \geq \mathrm{gl.dim} A = \mathrm{inj.dim}_A A$. 这里最后一个等号来自整体维数有限的 Noether 环, 自内射维数和整体维数一致 [Bas62, Proposition 4.2]. Zaks 在 [Zak69] 中证明了双边 Noether 环作为自身左模的内射维数和作为自身右模的内射维数一致, 因此当我们讨论双边 Noether 环的自内射维数时, 不需区分左右. 我们把前面的观察记录为

Proposition 3.142. 设域上双边 Noether 代数 A 满足 $\mathrm{p.dim}_{A^e} A < +\infty$ 且 A^e 是左 Noether 环. 如果 A 有刚性对偶复形 $\Omega \cong \omega_A[d]$(在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中), 那么 $d = \mathrm{p.dim}_{A^e} A \geq \mathrm{gl.dim} A = \mathrm{inj.dim}_A A$.

Remark 3.143. 根据 [推论1.240], $\mathrm{p.dim}_{A^e} A < +\infty$ 等价于 $\mathrm{l.gl.dim} A^e$.

Proposition 3.144 ([BZ08]). 设 A 是域 $\Bbbk$ 上双边 Noether 代数满足左右自内射维数有限. 则以下等价:
(1) 存在自然数 d 和可逆 A-A 双模 U 使得有 A-A 双模同构

$$\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A^e) = \begin{cases} U, & n = d, \\ 0, & n \neq d. \end{cases}$$

(2) 存在整数 ℓ 和可逆 A-A 双模 V 使得 $V[\ell]$ 是 A 的刚性对偶复形.
当 (1) 和 (2) 都成立时, $\ell = d$ 且有 A-A 双模同构 $U \otimes_A V \cong V \otimes_A U \cong A$.

Proof. (1)⇒(2): 根据条件, 这时在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中 $U[-d] \cong \mathrm{RHom}_{A^e}(A, A^e)$. 设 A-A 可逆双模 V 满足双模同构 $U \otimes_A V \cong V \otimes_A U \cong A$. 根据 [例3.102], $V[d]$ 是 A 上对偶复形. 因为 $U[-d]$ 作为左 A-模复形和右 A-模复形都是完全复形, 所以应用 [注记3.136] 可知 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有

$$\begin{aligned} U[-d] \otimes_A^L \mathrm{RHom}_{A^e}(A, V[d] \otimes_{\Bbbk} V[d]) \otimes_A^L U[-d] &\cong \mathrm{RHom}_{A^e}(A, V[d] \otimes_A^L U[-d] \otimes_{\Bbbk} U[-d] \otimes_A^L V[d]) \\ &\cong \mathrm{RHom}_{A^e}(A, A^e) \\ &\cong U[-d]. \end{aligned}$$

现在对 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中同构 $U[-d] \otimes_A^L \mathrm{RHom}_{A^e}(A, V[d] \otimes_{\Bbbk} V[d]) \otimes_A^L U[-d] \cong U[[-d]$ 两边同时左边作用 $V[d] \otimes_A^L -$, 右边作用 $- \otimes_A^L V[d]$, 可得 $\mathrm{RHom}_{A^e}(A, V[d] \otimes_{\Bbbk} V[d]) \cong V[d]$. 因此 $V[d]$ 是 A 上刚性对偶复形.

(2)⇒(1): 根据 [推论3.141] 便知取 $U = V^{-1}, d = \ell$ 即可. □

Remark 3.145. 根据证明过程, 域上双边 Noether 代数 A 如果左右自内射维数有限, 那么对任何可逆 A-A 双模 U 和整数 d, $U[d]$ 是 A 上对偶复形. 特别地, A 上对偶复形在同构意义下并不唯一. 例如 A 是域上交换 Noether 代数, 那么 A 的自内射维数有限蕴含 A 有对偶复形.

现在我们给 [定义1.244] 介绍的扭 Calabi-Yau 代数一个导出范畴刻画.

Proposition 3.146 ([RR22]). 设 A 是域 $\Bbbk$ 上代数, $d \in \mathbb{N}$. 那么 A 是 d 维扭 Calabi-Yau 代数的充要条件是 A 同调光滑且存在可逆 A-A 双模 U 使得在 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有 $\mathrm{RHom}_A(A, A^e) \cong U[-d]$. 并且这时 $d = \mathrm{p.dim}_{A^e} A$.

Proof. 必要性: 设 A 的 d 维扭 Calabi-Yau 代数, 那么 A 是同调光滑的并且 $\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A, A^e) = 0, \forall i \neq d$ 且 $\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A, A^e)$ 是可逆 A-A 双模, 记 $U = \mathrm{Ext}^d_{A^e}(A, A^e)$. 那么 [例3.45] 说明 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}A)$ 中有

$$\mathrm{RHom}_{A^e}(A, A^e) \cong U[-d].$$

充分性: 这时对任何整数 n 有 A-A 双模同构 $H^n(\mathrm{RHom}_{A^e}(A, A^e)) \cong \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A^e)$. 由 $H^d(\mathrm{RHom}_{A^e}(A, A^e))$ 是可逆 A-A 双模便知取 $U = H^d(\mathrm{RHom}_{A^e}(A, A^e))$ 立即得到结论. □

在 [定理1.241] 我们从复形链层面给出了扭 Calabi-Yau 代数的扭 Poincaré 对偶的证明. 下面我们使用导出范畴的语言以及 [命题3.146] 重新证明 [定理1.241](链层面实现的同构进一步具有自然性).

Theorem 3.147 ([RR22]). 设 A, B 是域 $\Bbbk$ 上代数, A 为 d 维扭 Calabi-Yau 代数, $U = \mathrm{Ext}_{A^e}(A, A^e)$. 那么对任何 A^e-B 双模复形 Y, 有 $\mathscr{D}(\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 中同构 $\mathrm{RHom}_{A^e}(A, Y) \cong (U \otimes_{A^e}^L Y)[-d]$. 特别地, 如果 $Y = M$ 是 A-A 双模 (视作集中在 0 次部分的复形), 那么对任何整数 i 有 $\Bbbk$-线性同构 $\mathrm{Ext}^{d-i}_{A^e}(A, M) \cong H^{d-i}(\mathrm{RHom}_{A^e}(A, M)) \cong H^{d-i}((U \otimes_{A^e}^L M)[-d]) = H^{-i}(U \otimes_{A^e}^L M) \cong \mathrm{Tor}_i^{A^e}(U, M)$.

Proof. 根据 [命题3.146], 在 $\mathscr{D}(\mathbf{Mod}\text{-}A^e)$ 中有 $\mathrm{RHom}_{A^e}(A, A^e) \cong U[-d]$. 因为 A 作为左 A^e-模复形是完全的, 故

$$\begin{aligned} \mathrm{RHom}_{A^e}(A, Y) &\cong \mathrm{RHom}_{A^e}(A, A^e) \otimes_{A^e}^L Y \\ &\cong U[-d] \otimes_{A^e}^L Y \\ &\cong (U \otimes_{A^e}^L Y)[-d]. \end{aligned}$$

这里 $\mathrm{RHom}_{A^e}(A, Y) \cong \mathrm{RHom}_{A^e}(A, A^e) \otimes_{A^e}^L Y$ 来自 [命题3.99], 最后的同构来自 $- \otimes_{A^e}^L Y$ 是三角函子. □

如果 A, B 是域 $\Bbbk$ 上代数, M 是 A-B 双模, 那么 $\mathrm{Hom}_\Bbbk(M,\Bbbk)$ 上有自然的 B-A 双模结构. 这时对任何 $\Bbbk$-线性空间 N 有标准 $\Bbbk$-线性同构 $\mathrm{Hom}_\Bbbk(M,N)\cong N\otimes_\Bbbk M^*$. 现在设 N 是 A-C 双模, C 也是 $\Bbbk$-代数, 那么 $\mathrm{Hom}_\Bbbk({}_AM_B, {}_AN_C)$ 有自然的 A-A 双模结构和 B-C 双模结构. 于是我们能够把 $\mathrm{Hom}_\Bbbk(M,N)$ 视作 A^e-$(B\otimes_\Bbbk C^{op})^{op}$ 双模: 对任何 $a_1\otimes a_2\in A^e$ 和 $b\otimes c\in B\otimes_\Bbbk C^{op}$, $f\in \mathrm{Hom}_\Bbbk(M,N)$ 有

$$[(a_1\otimes a_2)f(b\otimes c)](m)=a_1f(a_2mb)c, \forall m\in M.$$

而 M^* 上的 B-A 双模结构和 N 上的 A-C 双模结构可将 $N\otimes_\Bbbk M^*$ 视作 A^e-$(B\otimes_\Bbbk C^{op})^{op}$ 双模结构. 于是前面提到的标准同构 $\mathrm{Hom}_\Bbbk(M,N)\cong N\otimes_\Bbbk M^*$ 成为 A^e-$(B\otimes_\Bbbk C^{op})^{op}$ 双模同构. 于是我们可类似 [命题1.93], 对任何 A-A 双模复形 X, A-B 双模复形 Y 和 A-C 双模复形 Z 构造作为 B-C 双模复形的链同构 $\mathrm{Hom}_A^\bullet(X\otimes_A Y, Z)\cong \mathrm{Hom}_{A^e}(X, \mathrm{Hom}_\Bbbk(Y,Z))$(不用添加符号). 这使我们立即得到

Lemma 3.148 ([RR22]). 设 A, B, C 是域 $\Bbbk$ 上代数. X 是上有界 A-A 双模复形, Y 是上有界 A-B 双模复形, Z 是下有界 A-C 双模复形. 那么在 $\mathscr{D}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中有同构 $\mathrm{RHom}_{A^e}(X, \mathrm{Hom}_\Bbbk(Y,Z))\cong \mathrm{RHom}_A(X\otimes_A^L Y, Z)$.

Proof. 取定 X 的上有界投射分解 $P\to X$, Y 的上有界投射分解 $Q\to Y$ 和 Z 的下有界内射分解 $Z\to I$. 则

$$\begin{aligned}\mathrm{RHom}_A(X\otimes_A^L Y, Z) &\cong \mathrm{RHom}_A(X\otimes_A^L Y, I)\\ &\cong \mathrm{Hom}_A(P\otimes_A Q, I)\\ &\cong \mathrm{Hom}_{A^e}(P, \mathrm{Hom}_\Bbbk(Q,I))\\ &\cong \mathrm{RHom}_{A^e}(P, \mathrm{Hom}_\Bbbk(Q,I))\\ &\cong \mathrm{RHom}_{A^e}(P, \mathrm{Hom}_\Bbbk(Y,Z))\\ &\cong \mathrm{RHom}_{A^e}(X, \mathrm{Hom}_\Bbbk(Y,Z)).\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{Hom}_A(P\otimes_A Q, I)\cong \mathrm{Hom}_{A^e}(P, \mathrm{Hom}_\Bbbk(Q,I))$ 来自复形层面的链同构. □

Corollary 3.149 ([RR22]). 设 A, B, C 是域 $\Bbbk$ 上代数, 其中 A 是 d 维扭 Calabi-Yau 代数, 记 $U=\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A, A^e)$. 那么对任何 A-B 双模 M 和 A-C 双模 N, 只要 M 是有限维模, 就有 $\mathscr{D}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中同构

$$\mathrm{RHom}_A(M,N)\cong M^*\otimes_A^L(U\otimes_A N)[-d]\cong (M^*\otimes_A U)\otimes_A^L N[-d].$$

特别地, 对任何整数 i 有 $\Bbbk$-线性同构 $\mathrm{Ext}^i_A(M,N)\cong \mathrm{Tor}^A_{d-i}(M^*, U\otimes_A N)\cong \mathrm{Tor}^A_{d-i}(M^*\otimes_A U, N)$.

Proof. 利用 $\mathscr{D}(A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}B)$ 中同构 $M\cong A\otimes_A^L M$, 应用 [引理3.148] 得到 $\mathscr{D}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中同构 $\mathrm{RHom}_A(M,N)\cong \mathrm{RHom}_A(A\otimes_A^L M, N)\cong \mathrm{RHom}_{A^e}(A, \mathrm{Hom}_\Bbbk(M,N))$. 利用前面指出的 A^e-$(B\otimes_\Bbbk C^{op})^{op}$ 双模同构 $\mathrm{Hom}_\Bbbk(M,N)\cong N\otimes_\Bbbk M^*$ 得到 $\mathscr{D}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中同构 $\mathrm{RHom}_A(M,N)\cong \mathrm{RHom}_{A^e}(A, N\otimes_\Bbbk M^*)$. 现在对 A^e-$(B\otimes_\Bbbk C^{op})^{op}$ 双模复形 $N\otimes_\Bbbk M^*$ 应用 [定理3.147] 得到 $\mathrm{RHom}_{A^e}(A, N\otimes_\Bbbk M^*)\cong (U\otimes_{A^e}^L(N\otimes_\Bbbk M^*))[-d]$. 故由 [命题3.98] 得到 $\mathscr{D}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中有同构 $(U\otimes_{A^e}^L(N\otimes_\Bbbk M^*))[-d]\cong (M^*\otimes_A^L U\otimes_A^L N)[-d]$. 至此得到在 $\mathscr{D}(B\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}C)$ 中有

$$\mathrm{RHom}_A(M,N)\cong (M^*\otimes_A^L U\otimes_A^L N)[-d].$$

因为 U 是可逆 A-A 双模, 作为单边 A-模都投射, 所以也有

$$(M^*\otimes_A U)\otimes_A^L N[-d]\cong (M^*\otimes_A^L U)\otimes_A^L N[-d]\cong M^*\otimes_A^L(U\otimes_A^L N)[-d]\cong \mathrm{RHom}_A(M,N).$$

同理也有 $M^*\otimes_A^L(U\otimes_A N)[-d]\cong \mathrm{RHom}_A(M,N)$. □

Corollary 3.150 ([RR22]). 设 A 是域 $\Bbbk$ 上 d 维扭 Calabi-Yau 代数. 若有非零有限维左 A-模, 则 $d = \text{l.gl.dim}A$.

Proof. 从 [引理1.243] 知 $d = \text{p.dim}_{A^e}A$. 现在设 M 是有限维左 A-模. 那么我们得到有限维右 A-模 M^*. 现在应用 [推论3.149] 得到 $\Bbbk$-线性同构 $\text{Ext}^d_A(M,A) \cong \text{Tor}^A_0(M^*,U) \cong M^* \otimes_A U$, 这里 $U = \text{Ext}^d_{A^e}(A,A^e)$. 因为 $M^* \neq 0$, 所以由 U 是可逆 A-A 双模立即得到 $M^* \otimes_A U \neq 0$. 从而 $\text{p.dim}_A M \geq d$. 结合 $\text{l.gl.dim}A \leq \text{p.dim}_{A^e}A$ 便得结果 (回忆 [命题1.237]). □

Remark 3.151. 如果域 $\Bbbk$ 上扭 Calabi-Yau 代数 A 是仿射 PI 代数, 那么 A 所有的不可约表示是有限维的. 于是 A 的整体维数和 Hochschild 维数一致. 即便 A 是域 $\Bbbk$ 上双边 Noether 且整体维数有限的 Calabi-Yau 代数, 只要 A 不存在非零有限维 A-模, 那么 [推论3.150] 的结果未必成立. 例如考虑特征零的域上的 n 阶 Weyl 代数 A_n, 那么 A_n 是双边 Noether 整环, 左右整体维数都是 n, 且 A_n 是 Hochschild 维数为 $2n$ 的 Calabi-Yau 代数 (见 [RR22, Example 4.15]). 这时 $\text{gl.dim}A_n < \text{p.dim}_{(A_n)^e}A_n$.

Definition 3.152 (刚性 Gorenstein 代数, [BZ08]). 设 A 是域 $\Bbbk$ 上双边 Noether 代数, $d \in \mathbb{N}$. 如果

- (RGA1) A 的左右自内射维数都是 d;
- (RGA2) 存在 A 的代数自同构 ν 使得有 A-A 双模同构

$$\text{Ext}^n_{A^e}(A,A^e) = \begin{cases} {}^1A^\nu, & n = d, \\ 0, & n \neq d; \end{cases}$$

那么称 A 是 d **维刚性 Gorenstein 代数**, ν 为 A 的 **Nakayama 自同构**.

Remark 3.153. 如果刚性 Gorenstein 代数 A 进一步是同调光滑的, 即 A 是完全左 A^e-模, 那么 A 是 [定义1.261] 意义下的 d 维斜 Calabi-Yau 代数. 并且由于 A 这时为整体维数有限的双边 Noether 环, 也有 $d = \text{gl.dim}A$.

Remark 3.154. 如果域上代数 A 只满足 (RGA2), 未必有 $d = \text{inj.dim}A$. 例如特征零的域上 Weyl 代数, 见 [注记3.151]. 域上双边 Noether 的扭 Calabi-Yau 代数 A 只要有非零有限维模, [推论3.150] 便能保证 $\text{inj.dim}A = \text{gl.dim}A = \text{p.dim}_{A^e}A$.

Remark 3.155. 设 A 是 d 维刚性 Gorenstein 代数且 ν 是 A 的 Nakayama 自同构. 因为有 A-A 双模同构 ${}^1A^\nu \otimes_A {}^\nu A^1 \cong {}^\nu A^1 \otimes_A {}^1A^\nu \cong A$, 所以 [命题3.144] 说明 A 有刚性对偶复形 ${}^\nu A^1[d]$.

Remark 3.156. 根据 [注记1.262], 刚性 Gorenstein 代数的 Nakayama 自同构的相差某个内自同构意义下唯一.

Remark 3.157. 重复 [命题1.264] 的讨论便知刚性 Gorenstein 代数 A 的 Nakayama 自同构在中心 $Z(A)$ 上作用平凡. 特别地, 如果 A 是交换的刚性 Gorenstein 代数, 那么 A 的 Nakayama 自同构是恒等映射. 因此, 如果 A 是 $\Bbbk$ 上 d 维交换刚性 Gorenstein 代数, 那么 A 的刚性对偶复形就是 $A[d]$.

下面我们来看 (本质有限型的) 交换 Calabi-Yau 代数作为刚性 Gorenstein 代数的刚性对偶复形.

Example 3.158 (光滑仿射簇的刚性对偶复形, [Ye99, Zhu20]). 根据 [定理1.266], 如果 A 是域 $\Bbbk$ 上 Krull 维数是 d 的本质有限型光滑交换代数, 如果典范丛平凡 (等价地, A 为 d 维 Calabi-Yau 代数, 见 [命题1.268]), 那么

$$\text{Ext}^n_{A^e}(A,A^e) = \begin{cases} A, & n = d, \\ 0, & n \neq d; \end{cases}$$

因为这时 gl.dim$A=d=\mathrm{p.dim}_{A^e}A$ 且 A^e 是交换 Noether 环, 所以 inj.dim$A=d$ 且 [命题3.144] 说明 $A[d]$ 是 A 的刚性对偶复形. 如果 A 是域 $\Bbbk$ 上 Krull 维数为 d 的仿射光滑整区, 那么我们能够说更多: 这时利用 Koszul 复形和正则序列理论可证 gl.dim$A=d=\mathrm{p.dim}_{A^e}A$ 以及

$$\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A,A^e)=\begin{cases}\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A,A), & n=d,\\ 0, & n\neq d;\end{cases}$$

而 HKR 定理保证了 $\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A,A)\cong\mathfrak{X}^d(A)$, 即 A 上交错 d 重线性导子模. 而 A 是仿射整区说明 A 的所有极大理想高度相同. 进而 $\mathrm{rank}_{A_{\mathfrak{m}}}\Omega(A)_{\mathfrak{m}}=d,\forall\mathfrak{m}\in\mathrm{maxSpec}A$. 这说明 $\Omega^d(A)$ 是秩为 1 的有限生成投射 A-模. 这说明 $\Omega^d(A)$ 作为 A-模是可逆双模且

$$\Omega^d(A)\otimes_A\mathrm{Hom}_A(\Omega^d(A),A)\cong\mathrm{Hom}_A(\Omega^d(A),A)\otimes_A\Omega^d(A)\cong A.$$

再注意 $\mathrm{Hom}_A(\Omega^d(A),A)\cong\mathfrak{X}^d(A)$, 所以当 A 是域 $\Bbbk$ 上 Krull 维数是 d 的仿射光滑整区时, $\Omega^d(A)[d]$ 给出 A 上刚性对偶复形. 这时 A 是仿射 Calabi-Yau 整区蕴含 A 上对偶复形是 $A[d]$.

Remark 3.159. 这里再次强调只要 A 是域 $\Bbbk$ 上本质有限型光滑交换代数, 就有 A^e 是 Noether 正则环且

$$\mathrm{p.dim}_{A^e}A=\mathrm{gl.dim}A=\mathrm{inj.dim}A=\mathrm{k.dim}A.$$

Remark 3.160. 如果域 $\Bbbk$ 上本质有限型的交换光滑代数 A 不是仿射的或不是整区, 那么无法得到 $\Omega^d(A)$ 是秩为 1 的有限生成投射模, 这里 $d=\mathrm{k.dim}A$. 如果 A 不是整区, 考虑 A 是具有不同维数不可约分支的光滑仿射簇的坐标环即可. 如果 A 是整区但 A 不是仿射的, 可如下构造 A 的极大理想高度不同的例子: 先考虑对一般的含幺交换环 R, 要求有极大理想 Q 和素理想 P 满足 $P\not\subseteq Q$. 那么 $S=R-P\cup Q$ 是 R 的乘闭子集且 R_S 的极大理想只有 P_S 和 Q_S(如果 M_S 是 R_S 的极大理想, 这里 M 是 R 的素理想满足 $M\cap S=\varnothing$. 那么 $M\subseteq P\cup Q$. 从而 $M\subseteq P$ 或 $M\subseteq Q$. 进而 $M_S\subseteq P_S$ 或 $M_S\subseteq Q_S$. 由此得到 $M=P$ 或 $M=Q$. 反之, 由 P,Q 和 S 不相交得到 P_S 和 Q_S 都是 R_S 的素理想. 前面的讨论又说明 R_S 如果有极大理想只能含于 P_S 或 Q_S. 所以由 $P_S\not\subseteq Q_S$ 且 $Q_S\not\subseteq P_S$ 迫使 P_S 和 Q_S 都是 R_S 的极大理想). 因此只要 P 和 Q 作为理想的高度不同, P_S 和 Q_S 作为 R_S 的极大理想的高度也不同. 更具体的构造: 取 $R=\Bbbk[x,y]$, $P=(x-1),Q=(x,y)$ 即可.

参考文献

[Bas62] Hyman Bass. Injective dimension in noetherian rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 102(1):18–29, 1962.

[Ber13] George M. Bergman. Every module is an inverse limit of injectives. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141(4):1177–1183, 2013.

[Bro75] Kenneth S. Brown. Homological criteria for finiteness. *Comment. Math. Helv.*, 50:129–135, 1975.

[EGT97] Paul C. Eklof, K. R. Goodearl, and Jan Trlifaj. Dually slender modules and steady rings. *Forum Math.*, 9(1):61–74, 1997.

[Fre64] Peter Freyd. *Abelian categories. An introduction to the theory of functors*. Harper's Series in Modern Mathematics. Harper & Row, Publishers, New York, 1964.

[FSSA03] M. A. Farinati, A. Solotar, and M. Suárez-Álvarez. Hochschild homology and cohomology of generalized Weyl algebras. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 53(2):465–488, 2003.

[Hue99] Johannes Huebschmann. Duality for Lie-Rinehart algebras and the modular class. *J. Reine Angew. Math.*, 510:103–159, 1999.

[Jac89] Nathan Jacobson. *Basic algebra. II*. W. H. Freeman and Company, New York, second edition, 1989.

[Krä07] U. Krähmer. Poincaré duality in Hochschild (co)homology. In *New techniques in Hopf algebras and graded ring theory*, pages 117–125. K. Vlaam. Acad. Belgie Wet. Kunsten (KVAB), Brussels, 2007.

[Lam99] T. Y. Lam. *Lectures on modules and rings*, volume 189 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999.

[Mit64] Barry Mitchell. The full imbedding theorem. *Amer. J. Math.*, 86:619–637, 1964.

[Rot09] Joseph J. Rotman. *An introduction to homological algebra*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2009.

[RR22] Manuel L. Reyes and Daniel Rogalski. Graded twisted Calabi-Yau algebras are generalized Artin-Schelter regular. *Nagoya Math. J.*, 245:100–153, 2022.

[Sta24] The Stacks project authors. The stacks project. `https://stacks.math.columbia.edu`, 2024.

[Ste75] Bo Stenström. *Rings of quotients*, volume Band 217 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. An introduction to methods of ring theory.

[vdB98] Michel van den Bergh. A relation between Hochschild homology and cohomology for Gorenstein rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 126(5):1345–1348, 1998.

[vdB02] Michel van den Bergh. Erratum to: "A relation between Hochschild homology and cohomology for Gorenstein rings" [Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 5, 1345–1348; MR1443171 (99m:16013)]. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(9):2809–2810, 2002.

[vdB97] Michel van den Bergh. Existence theorems for dualizing complexes over non-commutative graded and filtered rings. J. Algebra, 195(2): 662–679, 1997.

[Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Wit19] Sarah J. Witherspoon. *Hochschild cohomology for algebras*, volume 204 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, [2019] ©2019.

[Wu] Quanshui Wu. Pseudo-coherent modules. Personal Notes.

[Wu09] Quanshui Wu. A note on spectral sequences and auslander-gorenstein algebras. Lecture Notes, 2009.

[Zha15] Pu Zhang. *Triangular Category and Derived Category*, volume 155 of *Modern Mathematics Foundation Series*. Science Press, 2015.

[Zhu20] Ruipeng Zhu. *Skew Calabi-Yau algebras, filtered deformations and homological determinant of Hopf actions*. PhD thesis, 2020.

[ZW18] Pu Zhang and Quanshui Wu. *Basic Algebra Lecture Notes*, volume 66 of *Modern Mathematics Foundation Series*. Higher Education Press, 2018.

[BZ08] K. A. Brown and J. J. Zhang. Dualising complexes and twisted Hochschild (co)homology for Noetherian Hopf algebras. *J. Algebra*, 320(5):1814–1850, 2008.

[MR87] J. C. McConnell and J. C. Robson. *Noncommutative Noetherian Rings*. American Mathematical Society, 1987.

[LWZ17] Jiafeng Lü, Xingting Wang, and Guangbin Zhuang. Homological unimodularity and Calabi-Yau condition for Poisson algebras. *Lett. Math. Phys.*, 107(9):1715–1740, 2017.

[Ye92] A. Yekutieli. Dualizing complexes over noncommutative graded algebras. *J. Algebra*, 153(1):41–84, 1992.

[NavdB05] K. De Naeghel and M. Van den Bergh, Ideal classes of three dimensional Artin-Schelter regular algebras, J. Algebra 283(1): 399–429, 2005.

[Ye99] A. Yekutieli. Dualizing complexes, Morita equivalence and the derived Picard group of a ring. *J. London Math. Soc. (2)*, 60(3): 723–746, 1999.

[Hart66] R. Hartshorne. Residues and duality. Lecture Notes in Mathematics, No. 20, Springer, Berlin-New York, 1966.

[Zak69] Abraham Zaks. Injective dimension of semi-primary rings. *Journal of Algebra*, 13(1):73–86, 1969.