结合代数的形式形变

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 11 月 2 日

背景

Poisson 结构是从经典力学中自然产生的. 在 Hamilton 力学中, 一般使用辛流形 M(光滑流形 M 被称为**辛流形** (symplectic manifold), 如果存在微分 2-形式 $\omega \in \Omega^2(M)$, 使得 ω 是非退化的闭形式, 并且对每个 $p \in M$, $\omega_p : \wedge^2 T_pM \to \mathbb{R}$ 赋予切空间 T_pM 上的辛结构. 域 $\Bbbk$ 上线性空间 V 上的**辛结构**, 或者说 V 上的**辛型** ω 是指 V 上的一个非退化交错 2-线性型) 来描述给定的物理系统状态, 称 M 是**相空间**. 具体地, 这里的物理系统状态由辛流形 M, 其上辛结构诱导的 Poisson 扩号 $\{-,-\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$(可以证明对辛流形 M, 任何光滑函数 $f \in C^\infty(M)$ 诱导光滑向量场 X_f, 被称为 **Hamilton 向量场**, 使得 $\{f, g\} = X_f(g)$ 赋予 $C^\infty(M)$ 上 Poisson 代数结构) 以及一个给定的光滑函数 H 构成的三元组 $(M, \{-,-\}, H)$ 描述. 这里的光滑函数 H 被称为该系统的 **Hamiltonian 量**或**能量函数**. 一般用辛流形 M 上的点描述系统的状态、流形上依赖于时间的光滑函数描述 **(经典) 可观测量** (obersevables), 例如位置和动量. 若 $O(t) \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ 是该物理系统的一个观察量, 其时间演化由下面的 Hamilton 方程给出：

$$\frac{d}{dt}O(t) = \{H, O\}.$$

因此 Poisson 括号是 Hamilton 经典力学中用于描述物理系统时间演化过程的中心角色.

与 Hamilton 经典力学使用辛流形上光滑函数环 (交换代数) 描述不同的是, 量子力学使用复 Hilbert 空间上线性算子代数 (非交换代数) 来描述物理状态. 在量子力学中, 一般使用 Hilbert 空间中的点来描述系统的状态、用 Hilbert 空间上的自伴算子 (设 $(\mathcal{H}, \langle -,- \rangle)$ 是复 Hilbert 空间, 回忆线性算子 $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\mathcal{H}$ 的**伴随函子**是指满足 $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ 的线性算子 A^*. 若线性算子 A 的伴随函子恰好是自身, 则称为**自伴算子**) 描述物理系统的可观察量. 具体地, 量子力学中的物理状态用三元组 $(\mathcal{H}, \langle -,- \rangle, H)$ 描述, 其中 H 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的一个自伴算子, 也被称为 Hamiltionian. 可观察量 $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\mathcal{H}$ 的时间演化由下面的方程给出：

$$\frac{d}{t}A(t) = \frac{i}{\hbar}[H, A(t)],$$

其中 $\hbar$ 是 Planck 常数, $[-,-]$ 是线性算子代数 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\mathcal{H}$ 上的标准换位子.

量子描述总是带来比物理实验结果更准确的预测. 不过对于宏观尺度的物理系统的运动规律, 已经可以被经典力学准确地描述. 即此时经典描述已经是量子描述的良好逼近 (在我们的生活的宇宙中, Planck 常数 $\hbar$ 约

为 $6.626 \times 10^{-34} J \cdot s$). 人们往往通过将 Planck 常数 $\hbar$ 表示为物理系统尺度特征的运动单位来给出经典描述逼近量子描述的定量测量：当 $\hbar$ 越小, 经典描述的逼近效果越好 (**光电效应**是指高于特定频率的光照射某一物质时, 物质内部的电子逸出形成电流这一现象. Einstein 根据光电效应推断光的能量传递是不连续的, 即光是以一个一个最小单位 (称为**光子**) 的形式存在并传播能量的. 单个光子携带的能量 E 与该光的频率 ν 呈正比, $E = \hbar\nu$, 这里比例系数就是 Planck 常数. 因为实际上 Planck 常数很小, 非常接近零, 所以在宏观尺度下光能的传递可以近似认为是连续的). 因此, 粗糙地说, 经典力学是当量子力学中 Panck 常数趋于零的极限状态. 从这个角度看, 量子描述到经典描述的过程是直接的. 但反过来, 从经典描述产生量子描述就没有那么明显. 为了从数学上解释从经典力学到量子力学的过程, 就产生了两个方法：几何量子化与形变量子化.

代数的形变最早由 M. Gerstenhaber 在 [Ger64] 中提出研究, 在 Gerstenhaber 之前就有小平邦彦等人研究复解析流形的形变理论. 我们之后将会看到, 代数的形变性质与该代数的 Hochschild 上同调间有密切的联系. 如前所述, Poisson 结构是经典力学中重要且基本的角色, 寻找经典力学到量子力学的精准数学描述 (即**量子化**) 一直是物理学家关注的基本问题. “从经典力学到量子力学的量子化应当用 (经典可观察量) 代数结构的形变来理解”这一主张, 首先在 [BFF+78] 中由 Bayen, Flato 等人指出, 这建立了形变量子化本身以及重要应用的理论基石. 同时, 这也产生了一个基本问题：对给定的 Poisson 流形, 其光滑函数环的形变量子化的存在性与唯一性. 1997 年, M. Kontsevich 对这一问题给出了肯定地回答 [Kon03]. 正是因为形变量子化的物理意义, Poisson 代数以及代数的形变理论得到了广泛地关注与研究.

1 代数的形变

1.1 形式形变

固定 A 是域 $\Bbbk$ 上代数, $\mu : A \times A \to A$ 是 A 上乘法映射, 那么形式幂级数环 $A[[\hbar]]$ 有子代数 $\Bbbk[[\hbar]]$, 因此 $A[[\hbar]]$ 可视作 $\Bbbk[[\hbar]]$-模, 以下固定 $\Bbbk$-线性空间 $A[[\hbar]]$ 上的 $\Bbbk[[\hbar]]$-模结构.

Definition 1.1 (形式形变)**.** 设 (A, μ) 是域 $\Bbbk$ 上代数. 若形式幂级数空间 $A[[\hbar]]$ 上有 $\Bbbk[[\hbar]]$-双线性的映射 $\star : A[[\hbar]] \times A[[\hbar]] \to A[[\hbar]]$ 使 $A[[\hbar]]$ 关于 $\star$ 构成 $\Bbbk[[\hbar]]$-代数并且 $\star(a, b) - \mu(a, b) = a \star b - ab \in \hbar A[[\hbar]]$, 则称 $\star$ 是 μ 的一个**形式形变** (formal deformation) 或**星积** (star product), 称 $A_\hbar = (A[[\hbar]], \star)$ 为**形式形变代数**.

Remark 1.2. 形式形变代数的参数选取为 Planck 常数的记号 $\hbar$, 若对形变代数 $A[[\hbar]]$ 作赋值 $\hbar = 0$, 那么该形式形变退化为 A 上原有乘法 μ, 这类似于量子描述退化到经典描述的过程. $\hbar$ 是 $A_\hbar$ 的一个中心正则元, 有时也称 $\hbar$ 是**形变参数** (deformation parameter). 事实上, 星积的定义只需要求 $\Bbbk[[\hbar]]$-双线性性以及结合律就能够保证 $A[[\hbar]]$ 关于 $\star$ 有乘法单位元, 我们将在 [定理1.6] 中证明这一点.

Example 1.3. 设 (A, μ) 是域 $\Bbbk$ 上代数, 那么形式幂级数环 $A[[\hbar]]$ 上标准乘法是 μ 的一个形式形变.

Proposition 1.4. 设 $A_\hbar = (A[[\hbar]], \star)$ 是 $\Bbbk[[\hbar]]$-代数, 则它关于理想 $(\hbar)$ 诱导的 $(\hbar)$-adic 拓扑 (不难看出该拓扑就是 $A[[\hbar]]$ 作为 $\Bbbk[[\hbar]]$ 上模的 $(\hbar)$-adic 拓扑) 构成拓扑环 (模), 并且

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} (\hbar)^k = 0,$$

于是 $A_\hbar$ 上拓扑可如下度量化：定义任何非零元 f 的阶为 $o(f) = n$, 这里 n 是满足 $f \in (\hbar)^n - (\hbar)^{n+1}$ 的自然数, 零元的阶定义为 $o(0) = +\infty$. 可直接验证 $o(f + g) \geq \min\{o(f), o(g)\}$ 以及 $o(fg) \geq o(f) + o(g)$, 通过定义

$A_\hbar$ 上范数 $|f|=2^{-o(f)}$ 来诱导出度量 $d(f,g)=2^{-o(f-g)},\forall f,g\in A_\hbar$(上述范数满足 $|fg|\le|f||g|,\forall f,g\in A_\hbar$). 该度量在 $A_\hbar$ 上诱导的度量拓扑就是 $(\hbar)$-拓扑. 于是在度量空间 $A_\hbar$ 中有

$$\lim_{n\to\infty}a_0+a_1\hbar+\cdots+a_n\hbar^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\hbar^n.$$

Proof. 这是标准结论, 所以这里仅验证拓扑环的情形. 对每个正整数 $k\ge 1$, 易见

$$(\hbar)^k=(\hbar^k)=\{\sum_{i=0}^{\infty}a_i\hbar^i\in A_\hbar|a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0\}.$$

于是有

$$A_\hbar=(\hbar)^0\supsetneq(\hbar)\supsetneq(\hbar)^2\supsetneq\cdots,\bigcap_{k=0}^{\infty}(\hbar)^k=0.$$

回忆 $A_\hbar$ 上 $(\hbar)$-adic 拓扑是由集合 $\{f+(\hbar)^n|f\in A_\hbar,n\ge 0\}$ 作为拓扑基张成的拓扑空间 (如果陪集 $f+(\hbar)^n$ 与 $g+(\hbar)^m$ 之交非空, 设 q 在它们的交中, 则 $q+(\hbar)^{n+m}$ 含于陪集 $f+(\hbar)^n$ 与 $g+(\hbar)^m$ 之交). 注意到 $[f+(\hbar)^n]+[g+(\hbar)^n]\subseteq f+g+(\hbar)^n$, 所以 $+:A_\hbar\times A_\hbar\to A_\hbar$ 连续. 类似地, 由 $[f+(\hbar)^n][g+(\hbar)^n]\subseteq fg+(\hbar)^n$ 可知 $\star:A_\hbar\times A_\hbar\to A_\hbar$ 连续, 且 $A_\hbar\to A_\hbar,f\mapsto -f$ 连续. 故 $(A[[\hbar]],\star)$ 在 $(\hbar)$-adic 拓扑下构成拓扑环. □

Example 1.5. 设 $A_\hbar=(A[[\hbar]],\star)$ 是 μ 的形式形变, $\Phi:A_\hbar\to A_\hbar$ 的 $\Bbbk[[\hbar]]$-模同态, 那么对任何形式幂级数 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_i\hbar^i$, 有 $\Phi(\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_i\hbar^i)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\Phi(a_i)\hbar^i$

事实上, 对形变代数 $A_\hbar$, 可设

$$a\star b=ab+\mu_1(a,b)\hbar+\mu_2(a,b)\hbar^2+\cdots,\mu_i(a,b)\in A,\forall a,b\in A,i\ge 2.$$

有时也引入记号 $\mu_0=\mu$. 根据定义可知 $\mu_i(i\ge 1)$ 都是 $\Bbbk$-双线性的. 如果 $\Bbbk[[\hbar]]$-模 $A[[\hbar]]$ 上有 $\Bbbk[[\hbar]]$-双线性的映射 $\star:A[[\hbar]\times A[[\hbar]]\to A[[\hbar]]$ 满足 $\star$ 关于 $A[[\hbar]]$ 作为 $\Bbbk[[h]]$-模的 $(\hbar)$-adic 拓扑连续, 那么 $\Bbbk[[\hbar]]$-模 $(A[[\hbar]],\star)$ 上运算 $\star$ 结合的充要条件是 $\mu_i(i\ge 1)$ 是 $\Bbbk$-双线性的并且 $(a\star b)\star c=a\star(b\star c),\forall a,b,c\in A$. 将后式展开便知

$$\sum_{i+j=n}\mu_i(\mu_j(a,b),c)=\sum_{i+j=n}\mu_i(a,\mu_j(b,c)),\forall a,b,c\in A,n\in\mathbb{N}.$$

并且形变代数 $A_\hbar$ 上星积 $\star$ 完全由上述展开的各次乘法映射 μ_i 确定. 具体地, 可直接计算验证

$$(\sum_{i=0}^{\infty}a_i\hbar^i)\star(\sum_{j=0}^{\infty}b_j\hbar^j)=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i+j+s=n}\mu_s(a_i,b_j))\hbar^n,\forall\sum_{i=0}^{\infty}a_i\hbar^i,\sum_{j=0}^{\infty}b_j\hbar^j\in A_\hbar.$$

反之, 可直接计算验证下述结果.

Theorem 1.6. 设 (A,μ) 是域 $\Bbbk$ 上代数, $\{\mu_k:A\times A\to A\}_{k=0}^{\infty}$ 是一族 $\Bbbk$-双线性映射, 其中 $\mu_0=\mu$. 如果对任何自然数 n 有

$$\sum_{i+j=n}\mu_i(\mu_j(a,b),c)=\sum_{i+j=n}\mu_i(a,\mu_j(b,c)),\forall a,b,c\in A,$$

那么通过在 $\Bbbk[[\hbar]]$-模 $A[[\hbar]]$ 上定义

$$(\sum_{i=0}^{\infty}a_i\hbar^i)\star(\sum_{j=0}^{\infty}b_j\hbar^j)=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i+j+s=n}\mu_s(a_i,b_j))\hbar^n,\forall\sum_{i=0}^{\infty}a_i\hbar^i,\sum_{j=0}^{\infty}b_j\hbar^j\in A[[\hbar]],$$

可赋予 $A[[h]]$ 上 $\Bbbk[[\hbar]]$-代数结构 $(A[[h]],\star)$, 即 $(A[[h]],\star)$ 是 A 的一个形式形变.

Proof. 根据前面的讨论, 我们只需验证若 $A[[\hbar]]$ 上有 $\Bbbk[[\hbar]]$-双线性映射 $\star: A[[\hbar]]\times A[[\hbar]]\to A[[\hbar]]$ 满足结合律, 那么环 $A_\hbar=(A[[\hbar]],\star)$ 有乘法单位元, 下面分三步完成证明, 证明方法来自 [GS83].

Step 1. 任给中心幂等元 $e\in A$, 我们断言存在 $A_\hbar$ 中唯一的幂等元 $e_\hbar=\sum\limits_{i=0}^{\infty}e_i\hbar^i$ 使得 $e_0=e$. 下面递归地构造 e_i 来说明 $e_\hbar$ 的存在性. 定义 $e_0=e$, 假设已经构造了 $e_0,e_1,...,e_n(n\geq 0)$, 通过考察 $e_\hbar\star e^\hbar=e_\hbar$ 等式两端中 $\hbar^{n+1}$ 的系数可知我们需要构造的 e_{n+1} 满足 $e_{n+1}e+ee_{n+1}-a=e_{n+1}$, 其中 a 是只依赖于 $e_0,...,e_n$ 的元素. 故 e_{n+1} 必定满足方程 $(1-2e)x=a$. 因为 $(1-2e)^2=1$, 所以 $e_{n+1}=(1-2e)a$. 而这里 $ea=ae$ 保证了 $e_{n+1}=(1-2e)a$ 确实是满足上述方程的解. 递归地可得 $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$. 现在说明满足条件的序列 $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ 唯一. 如果还有序列 $\{e'_k\}_{k=0}^{\infty}$ 满足定义出的元素 $e'_\hbar$ 的常数项是 e 并且幂等, 那么归纳地容易验证 $e_k=e'_k,\forall k\geq 0$.

Step 2. 对任何中心幂等元 $e\in A$, 上述意义下确定的幂等元 $e_\hbar\in A_\hbar$ 是 $A_\hbar$ 的中心幂等元. 对任何环 R 以及 R 中元素 a 决定的内导子 $D_a:R\to R,x\mapsto ax-xa$, 我们知道 $a\in Z(R)$ 当且仅当 $D_a=0$. 可直接计算得

$$(D_a)^n(x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^ia^{n-i}xa^i,$$

因此当 n 是奇数且 a 是幂等元时, $(D_a)^n(x)=a^nx-xa^n=ax-xa=D_a(x)$(之后会应用于 $R=A_\hbar,a=e_\hbar$ 的情形). 如果 R 有理想 I 满足对任何 $x\in I^n$ 都有 $D_a(x)\in I^{n+1}$, 那么 $D_a(x)$ 在所有 I^n 的交中. 现在取 $R=A_\hbar,a=e_\hbar,I=(\hbar)$, 那么 $D_a(x)\in I,D_a(I)\subseteq I^2$, 那么根据刚刚的讨论可知 $a=e_\hbar\in Z(A_\hbar)$.

Step 3. 取上述中心幂等元 $e=1$, 那么 $e_\hbar$ 是 $A_\hbar$ 中常数项为 1 的中心幂等元, 下面说明 $e_\hbar$ 就是 $A_\hbar$ 关于 $\star$ 的乘法单位元. 注意到 $e_\hbar$ 决定的左乘变换 $(e_\hbar)_l:A_\hbar\to A_\hbar,x\mapsto e_\hbar\star x$ 是单 $\Bbbk[[\hbar]]$-模同态, 所以由 $e_\hbar\star(e_\hbar\star g)=(e_\hbar\star e_\hbar)\star g=e_\hbar\star g$ 可知 $e_\hbar\star g=g$.

由此通过取 $e=1$, 我们得到了 $A_\hbar$ 的乘法单位元 $e_\hbar$. □

Remark 1.7. 一般地, 若环 R 有中心幂等元 e, 只要 e 是正则的, e 自然是乘法单位元

Notation. 对形变代数 $A_\hbar$, 可设

$$a\star b=ab+\mu_1(a,b)\hbar+\mu_2(a,b)\hbar^2+\cdots,\mu_i(a,b)\in A,\forall a,b\in A,i\geq 2.$$

那么记 $\star=\mu+\mu_1\hbar+\mu_2\hbar^2+\cdots$. 这里 μ_i 被称为**形变 $\star$ 的 i 次乘法映射**.

Remark 1.8. 事实上, 对任给域 $\Bbbk$ 上线性空间 V, 记 $C^2_\Bbbk(V,V)$ 为 V 上 $\Bbbk$-双线性映射全体, 那么可作 $\Bbbk[[\hbar]]$-模 $C^2_\Bbbk(V,V)[[\hbar]]$, 同样记 $C^2_{\Bbbk[[\hbar]]}(V[[\hbar]],V[[\hbar]])$ 为 $\Bbbk[[\hbar]]$-模 $V[[\hbar]]$ 上双线性映射全体, 那么有双射

$$C^2_\Bbbk(V,V)[[\hbar]]\to C^2_{\Bbbk[[\hbar]]}(V[[\hbar]],V[[\hbar]]),\mu_0+\mu_1\hbar+\mu_2\hbar^2+\cdots\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\hbar^n$$

对等式 $\sum\limits_{i+j=n}\mu_i(\mu_j(a,b),c)=\sum\limits_{i+j=n}\mu_i(a,\mu_j(b,c)),\forall a,b,c\in A$. 考察 $n=1$ 的情形, 得到等式

$$\mu_1(a,b)c+\mu_1(ab,c)=a\mu_1(b,c)+\mu_1(a,bc),\forall a,b,c\in A.$$

回忆对含幺交换环 K 上代数 A, 只要 A 是自由 K-模 (例如 $K=\Bbbk$), 那么可如下计算 A 的 Hochschild 上同调: 设 M 是 A-A 双模, 记 $C^0(A,M)=M, C^1(A,M)=\mathrm{Hom}_K(A,M), C^n(A,M)$ 表示 A^n 到 M 的多重 K-线性映射全体. 对每个自然数 n, 记 $\delta^n: C^n(A,M)\to C^{n+1}(A,M)$ 为

$$\delta^n(f)(x_1,...,x_{n+1})=x_1f(x_2,...,x_{n+1})+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(x_1,...,x_ix_{i+1},...,x_n)+(-1)^{n+1}f(x_1,...,x_n)x_{n+1},$$

其中 $\delta^0: M\to C^1(A,M), u\mapsto \delta^0(u), \delta^0(u)(x)=xu-ux$, 由此得到上链复形 (称为 **Hochschild 上链复形**)

$$0\longrightarrow C^0(A,M)\xrightarrow{\delta^0}C^1(A,M)\xrightarrow{\delta^1}C^2(A,M)\xrightarrow{\delta^2}\cdots\longrightarrow C^n(A,M)\xrightarrow{\delta^n}\cdots,$$

该复形的 n 次上同调群就是 $H^n(A,M)=\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A,M)$, 即 A 系数在双模 M 中的 n 次 Hochschild 上同调. 这时 0 次 Hochschild 上同调为 $H^0(A,M)=\mathrm{Ker}\delta^0=\{m\in M|am=ma,\forall a\in A\}$, 即双模 M 的中心 (如果取 $M=A$, 那么 $H^0(A,A)\cong Z(A)$). 对 $f\in C^1(A,M), \delta^1(f)=0$ 当且仅当 f 是双模 M 的导子, 即 1 次上闭链群就是 $\mathrm{Der}_K(A,M)$. 同时 $\mathrm{Im}\delta^0=\{\delta^0(u):A\to M, x\mapsto xu-ux|u\in M\}$, 为 M 的内导子全体. 因此 A 系数在 M 中的 1 次 Hochschild 上同调就是 M 的导子全体模掉内导子全体 (从而知当 (A,K) 是交换代数时, $H^1(A,A)\cong \mathrm{Der}_K A$ 就是 A 上 K-导子全体). 最后再考察 2 次上闭链群 $Z^2(A,M)$, 根据 δ^2 的定义, $f\in C^2(A,M)$ 是 2 次上闭链当且仅当 $xf(y,z)+f(x,yz)=f(xy,z)+f(x,y)z,\forall x,y,z\in A$. 于是

Lemma 1.9. 设 $\Bbbk$-代数 A 有形式形变 $A_\hbar=(A[[\hbar]],\star)$, 其中 $\star=\mu+\mu_1\hbar+\mu_2\hbar^2+\cdots$. 则 $\mu_1\in Z^2(A,A)$.

Example 1.10. 设 $(A,\{-,-\})$ 是域 $\Bbbk$ 上 Poisson 代数, 则 $\{-,-\}:A\times A\to A\in Z^2(A,A)$.

设 (A,μ) 是域 $\Bbbk$ 上代数, 对 A 的形变代数 $A_\hbar=(A[[\hbar]],\star)$, 根据 $\star$ 满足结合律我们已经看到

$$\sum_{i+j=n}\mu_i(\mu_j(a,b),c)=\sum_{i+j=n}\mu_i(a,\mu_j(b,c)),\forall a,b,c\in A,n\in\mathbb{N}.$$

那么

$$\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i(\mu_{n-i}(a,b),c)-\mu_i(a,\mu_{n-i}(b,c))=a\mu_n(b,c)+\mu_n(a,bc)-\mu_n(ab,c)-\mu_n(a,b)c=\delta^2(\mu_n)(a,b,c),\forall a,b,c\in A.$$

Example 1.11 (量子平面)**.** 设 $A=\mathbb{C}[x,y]$ 是复多项式代数. 通过定义

$$x^i\star x^j=x^{i+j},x^i\star y^j=x^iy^j,y^i\star y^j=y^{i+j},y\star x=xy(1+\hbar+\frac{1}{2!}\hbar^2+\frac{1}{3!}\hbar^3+\cdots)=xye^\hbar,$$

可唯一地赋予 $A[[\hbar]]$ 上 $\mathbb{C}[[\hbar]]$-代数结构 $A_\hbar=(A[[\hbar]],\star)$. 现在说明上述星积的存在性. 事实上, 考虑代数

$$B=\mathbb{C}\langle x,y\rangle[[\hbar]]/(yx-xye^\hbar),$$

那么有天然的 $\mathbb{C}[[\hbar]]$-模同态

$$\Phi:\mathbb{C}[x,y][[\hbar]]\to B, f_0(x,y)+f_1(x,y)\hbar+\cdots+f_n(x,y)\hbar^n+\cdots\mapsto(f_0(x,y)+f_1(x,y)\hbar+\cdots)+(yx-xye^\hbar)$$

将每个 $x^iy^j\hbar^k$ 映至 $x^iy^j\hbar^k+(yx-xye^\hbar)$, 那么可直接验证 Φ 限制在 $\mathbb{C}[x,y]$ 上是单射并且 $\mathrm{Im}\varphi$ 关于乘法封闭. 对任何 $f,g\in\mathbb{C}[x,y]$, $f\star g=\Phi^{-1}(\Phi(x)\Phi(y))$. 那么 $(f\star g)\star h=f\star(g\star h),\forall f,g,h\in\mathbb{C}[x,y]$. 注意这时有 $x^i\star x^j=x^{i+j},x^i\star y^j=x^iy^j,y^i\star y^j=y^{i+j},y\star x=xye^\hbar$. 再将 $\star$ 天然地扩充到整个 $\mathbb{C}[x,y][[\hbar]]$ 上.

设 $z_0 \in \mathbb{C}$, 记 $q = e^{z_0}$, 那么通过对 $(\mathbb{C}[x,y][[\hbar]], \star)$ 作为 $\mathbb{C}$-代数的由 x, y 生成的子代数 Q 作赋值 $\hbar = z_0$ 可得到代数 $\mathbb{C}_q[x,y] = \mathbb{C}\langle x,y\rangle/(yx - qxy)$. 具体地, 对 Q 的赋值过程即得到代数 $Q/(e^\hbar - q)$, 下面说明 $Q/(e^\hbar - q)$ 作为 $\mathbb{C}$-代数同构于 $\mathbb{C}\langle x,y\rangle/(yx-qxy)$. 事实上只需验证 $\{x^iy^j + (e^\hbar - q) | i,j \in \mathbb{N}\}$ 是 $Q/(e^\hbar - q)$ 作为复线性空间的一个基即可 (一旦验证该断言可天然构造代数同构). 假设有复数 $\lambda_{i_1j_1}, ..., \lambda_{i_sj_s} \in \mathbb{C}$ 使得 $\lambda_{i_1j_1}x^{i_1}y^{j_1} + \cdots + \lambda_{i_sj_s}x^{i_s}y^{j_s} \in (e^\hbar - q)$. 那么存在 $\mathbb{C}\langle x,y\rangle$ 中单项式 (系数未必是 1)$f_1, ..., f_m$ 使得 $\lambda_{i_1j_1}x^{i_1}y^{j_1} + \cdots + \lambda_{i_sj_s}x^{i_s}y^{j_s} = (f_1 + \cdots + f_m)(e^\hbar - q) = (1-q)(f_1 + \cdots + f_m) + (f_1 + \cdots + f_m)\hbar + \cdots$. 对比两边 $\hbar$ 的系数立即得到 $f_1 + \cdots + f_m$ 是 $\mathbb{C}\langle x,y\rangle$ 中零多项式, 从而在 $\mathbb{C}\langle x,y\rangle$ 中有 $\lambda_{i_1j_1}x^{i_1}y^{j_1} + \cdots + \lambda_{i_sj_s}x^{i_s}y^{j_s} = 0$. 这就说明了 $\{x^iy^j + (e^\hbar - q) | i,j \in \mathbb{N}\}$ 的 $\mathbb{C}$-线性无关性.

将代数 $\mathbb{C}_q[x,y]$ 称为**量子平面** (quantum plane). 对一般的域 $\Bbbk$, 我们定义 $\Bbbk$ 上量子平面为 $\Bbbk_q[x,y] = \Bbbk\langle x,y\rangle/(yx - qxy)$, 其中 $q \in \Bbbk^\times$, 也记作 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$.

一般地, 对任给多项式族 $\{f_i(x,y)\}_{i=1}^\infty \subseteq A = \Bbbk[x,y]$, 都存在唯一的形式形变 $A_\hbar = (A[[\hbar]], \star)$ 使得

$$x^i \star x^j = x^{i+j}, x^i \star y^j = x^iy^j, y^i \star y^j = y^{i+j}, y \star x = xy + f_1(x,y)\hbar + f_2(x,y)\hbar^2 + \cdots.$$

考虑代数 $B = \Bbbk\langle x,y\rangle[[\hbar]]/(yx - xy - f_1(x,y)\hbar - f_2(x,y)\hbar^2 - f_3(x,y)\hbar^3 - \cdots)$, 那么与量子平面情形一样有天然的 $\Bbbk[[\hbar]]$-模同态 $\Phi: A[[\hbar]] \to B$, 并且可直接验证这是单射, 进而通过 Φ 赋予 A 上满足条件的星积.

Definition 1.12. 设 (A, μ) 是域 $\Bbbk$ 上代数, 并设 $\star, \star'$ 是 μ 的两个形式形变, 对应形变代数 $A_\hbar = (A[[h]], \star)$ 和 $A'_\hbar = (A[[\hbar]], \star')$. 称 $\star$ 与 $\star'$ 是**等价的**, 如果存在 $\Bbbk[[\hbar]]$-代数同态 $\Phi: A_\hbar \to A'_\hbar$ 使得 $\Phi(a) - a \in \hbar A[[\hbar]], \forall a \in A$. 若 μ 的形式形变 $A_\hbar = (A[[h]], \star)$ 和标准幂级数环 $A[[\hbar]]$ 等价, 那么称 $\star$ 是**平凡形变** (trivial deformation).

A 上乘法映射 μ 的两个形式形变 $A_\hbar, A'_\hbar$ 等价即要求两者存在一个保持幂级数常数项的 $\Bbbk[[\hbar]]$-代数同构 Φ. 注意此时对任何 $a \in A$, $\Phi(a)$ 是关于 $\hbar$ 的形式幂级数, 设为 $\Phi(a) = a + \Phi_1(a)\hbar + \Phi_2(a)\hbar^2 + \cdots$. 其中每个 $\Phi_k: A \to A$ 是 $\Bbbk$-线性变换. 事实上线性变换族 $\{\Phi_k\}_{k=0}^\infty$ 完全决定了 Φ 在整个 $A_\hbar$ 上的取值.

Theorem 1.13. 设 (A, μ) 是域 $\Bbbk$ 上代数, 并设 $\star, \star'$ 是 μ 的两个形式形变, 对应形变代数 $A_\hbar = (A[[h]], \star)$ 和 $A'_\hbar = (A[[\hbar]], \star')$. 并设 $\Phi: A_\hbar \to A'_\hbar$ 是这两个形变代数间的等价, 那么

$$\Phi(\sum_{n=0}^\infty a_n\hbar^n) = \sum_{n=0}^\infty (\sum_{i+j=n} \Phi_i(a_j))\hbar^n.$$

虽然线性变换族 $\{\Phi_k\}_{k=0}^\infty$ 仅是考察 Φ 限制在 A 上取值得到的, 但已经承载了 Φ 的所有信息. 同时, 我们指出若有 A 上线性变换族 $\{\Phi_k\}_{k=0}^\infty$, 那么存在唯一的 $\Bbbk[[\hbar]]$-模同态 $\Phi: A[[\hbar]] \to A[[\hbar]]$ 使得

$$\Phi(a) = \Phi_0(a) + \Phi_1(a)\hbar + \Phi_2(a)\hbar^2 + \cdots, \forall a \in A.$$

唯一性利用 $A[[\hbar]]$ 赋予 $(\hbar)$-adic 拓扑后 Φ 是拓扑模间的连续映射可知, 存在性可直接通过下式构造.

$$\Phi(\sum_{n=0}^\infty a_n\hbar^n) = \sum_{n=0}^\infty (\sum_{i+j=n} \Phi_i(a_j))\hbar^n.$$

Proof. 对固定的自然数 n, $\Phi(\sum\limits_{k=0}^\infty a_k\hbar^k) = \sum\limits_{k=0}^n \Phi(a_k)\hbar^k + \Phi(\sum\limits_{k=n+1}^\infty a_k\hbar^{k-n-1})\hbar^{n+1}$. 所以该式中 $\hbar^n$ 的系数为

$$\Phi_n(a_0) + \Phi_{n-1}(a_1) + \cdots + \Phi_n(a_0) = \sum_{i+j=n} \Phi_i(a_j).$$

$\square$

若 Φ 是形变代数 $A_\hbar=(A[[h]],\star)$ 和 $A'_\hbar=(A[[\hbar]],\star')$ 之间的 $\Bbbk[[\hbar]]$-模同态, 如果

$$\Phi(a)-a\in\hbar A[[\hbar]],\Phi(a\star b)=\Phi(a)\star'\Phi(b),\forall a,b\in A,$$

那么 Φ 一定是代数同构. 因为 Φ 将阶不小于 n 的形式幂级数映至阶不小于 n 的形式幂级数, 所以在 $A_\hbar$ 和 $A'_\hbar$ 都赋予 $(\hbar)$-adic 拓扑的前提下, Φ 是拓扑模间的连续映射. 进而由 $\star,\star':A[[\hbar]]\times A[[\hbar]]\to A[[\hbar]]$ 都是连续映射可知 Φ 保证乘法. 下面先说明 Φ 是单射：如果 $f\in A[[\hbar]]$ 满足 $\Phi(f)=0$, 那么 f 常数项是零, 故由 $\hbar$ 是 $A[[\hbar]]$ 内的中心正则元可得 $\Phi(f/\hbar)=0$. 以此类推可得 $f=0$. 再说明 Φ 是满射. 任取

$$g=b_0+b_1\hbar+b_2\hbar^2+\cdots\in A[[\hbar]],$$

取 $a_0=b_0$, 有 $\Phi(a_0)=b_0+\Phi_1(a_0)\hbar+\cdots$, 这时 $g-\Phi(a_0)=[b_1-\Phi_1(a_0)]\hbar+\cdots$, 取 $a_1=b_1-\Phi_1(a_0)$, 那么 $\Phi(a_0+a_1\hbar)=b_0+b_1\hbar+[\Phi_1(a_1)+\Phi_2(a_0)]\hbar^2+\cdots$, 再取 $a_2=\Phi_1(a_1)+\Phi_2(a_0)$, 递归地定义出 $\{a_k\}_{k=0}^\infty$, 进而可得 g 关于 Φ 的原像 $a_0+a_1\hbar+a_2\hbar^2+\cdots$(具体地, 我们构造的序列 $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ 满足对任何正整数 n,

$$\Phi(\sum_{k=0}^n a_k\hbar^k)-g\in(\hbar^{n+1}),$$

那么自然有 $\Phi(a_0+a_1\hbar+a_2\hbar^2+\cdots)=\lim\limits_{n\to\infty}\Phi(\sum\limits_{k=0}^n a_k\hbar^k)=g$). 由此证明了 Φ 是 $\Bbbk[[\hbar]]$-代数同构. 通过直接的计算, 对形变代数 $A_\hbar=(A[[h]],\star)$ 和 $A'_\hbar=(A[[\hbar]],\star')$ 之间的 $\Bbbk[[\hbar]]$-模同态 Φ, $\Phi(a\star b)=\Phi(a)\star'\Phi(b),\forall a,b\in A$ 的充要条件是

$$\sum_{i+j=n}\Phi_j(\mu_i(a,b))=\sum_{i+j+s=n}\mu'_s(\Phi_i(a),\Phi_j(b)),\forall a,b,c\in A,n\geq 0.$$

当 $n=0$ 时, 上式等号两边都是 ab, 结论总成立. 当 $n\geq 1$ 时, 上式可改写为

$$\sum_{\substack{i+j=n\\ i\geq 1}}\Phi_j(\mu_i(a,b))-\sum_{\substack{i+j+s=n\\ i,j\leq n-1}}\mu_s(\Phi_i(a),\Phi_j(b))=\delta^1(\Phi_n).$$

可以验证当上式对 $n=1,2,...,k-1$ 成立时, $n=k$ 情形等号左边是 2-上闭链, 这一观察表明若 $H^2(A,A)=0$, 那么任何两个形变代数间都可以递归地构造线性变换族 $\{\Phi_k\}_{k=0}^\infty$ 使得 $\Phi=\mathrm{id}_A+\Phi_1\hbar+\Phi_2\hbar^2+\cdots$ 使得 Φ 给出两个形变代数间的代数同构. 由此我们得到了：

Proposition 1.14. 设 (A,μ) 是域 $\Bbbk$ 上代数, 若 A 系数在自身的 Hochschild 上同调 $H^2(A,A)=0$, 那么 A 没有非平凡形式形变 (回忆 [定义1.12]). 称没有非平凡形式形变的代数是**刚性的** (rigid).

Remark 1.15. 域 $\Bbbk$ 上可离代数 A 的包络代数 A^e 都是 Artin 半单环, 故是刚性代数. 存在刚性代数 A 满足 $H^2(A,A)\neq 0$ 的例子——即上述命题仅是刚性的充分条件, 一些反例在 [GS86] 中被构造.

Lemma 1.16. 设 (A,μ) 是域 $\Bbbk$ 上交换代数, 并设有形式形变代数 $A_\hbar=(A[[\hbar]],\star)$, 其中 $\star=\mu+\mu_1\hbar+\mu_2\hbar^2+\cdots$. 定义

$$\{-,-\}:A\times A\to A,(a,b)\mapsto\mu_1(a,b)-\mu_1(b,a),$$

则 $(A,\{-,-\})$ 是 Poisson 代数. 并且若在上述 Poisson 括号只依赖于 $\star$ 的形变等价类, 即若 $(A'_\hbar,\star')$ 也是 μ 的形变代数并且 $\star$ 和 $\star'$ 是等价的形式形变, 那么它们诱导相同的 Poisson 括号.

Proof. 由定义, 对 $a,b\in A$, $\{a,b\}$ 为 $a\star b-b\star a$ 表示为关于 $\hbar$ 的形式幂级数中 $\hbar$ 的系数. 易见 $\{-,-\}$ 是 $\Bbbk$-双线性映射并且对任何 $a\in A$ 有 $\{a,a\}=0$. 接下来需要验证 $\{-,-\}$ 满足 Jacobi 恒等式以及在每个分量上给出 A 上导子. 作

$$[-,-]:A_\hbar\times A_\hbar\to A_\hbar,(f,g)\mapsto\frac{1}{\hbar}(f\star g-g\star f),$$

那么对任何 $a,b\in A$, $\{a,b\}$ 为 $[a,b]$ 关于 $\hbar$ 的幂级数表达式中的常数项. 下面断言 $[-,-]$ 满足 Jacobi 等式, 一旦说明该断言, 则对任何 $a,b,c\in A$ 有 $\{\{a,b\},c\}+\{\{b,c\},a\}+\{\{c,a\},b\}=0$. 因为结合代数上的换位子满足 Jacobi 等式, 所以 $[-,-]$ 也满足. 由此得到 $(A,\{-,-\})$ 是 $\Bbbk$-Lie 代数. 要说明 $(A,\{-,-\})$ 是 Poisson 代数只需再验证导子性质. 因为 $\mu_1\in Z^2(A,A)$, 即有

$$\rho(a,b,c)=a\mu_1(b,c)-\mu_1(ab,c)+\mu_1(a,bc)-\mu_1(a,b)c=0,\forall a,b,c\in A.$$

需要验证 $\{ab,c\}=a\{b,c\}+b\{a,c\}$ 即为 $\mu_1(ab,c)-\mu_1(c,ab)-a\mu_1(b,c)+a\mu_1(c,b)-b\mu_1(a,c)+b\mu_1(c,a)=0$. 可直接验证 $-\rho(a,b,c)+\rho(a,c,b)-\rho(c,a,b)$ 通过 A 的交换性可化简为导子等式. 故 $(A,\{-,-\})$ 是 Poisson 代数. 最后说明等价的形式形变能够诱导出相同的 Poisson 结构. 设形变代数 $(A_\hbar,\star),(A'_\hbar,\star')$ 是 μ 的两个等价的形式形变, 这里设

$$\star=\sum_{i=0}^{\infty}\mu_i\hbar^i,\star'=\sum_{i=0}^{\infty}\mu'_i\hbar^i,\mu_0=\mu'_0=\mu.$$

并有等价 $\Phi:A_\hbar\to A'_\hbar$. 那么对任何 $a,b\in A$ 有 $\Phi(a\star b)=\Phi(a)\star'\Phi(b)$. 下面我们来计算该等式两端 $\hbar$ 的系数. $\Phi(a\star b)=\Phi(ab+\mu_1(a,b)\hbar+\cdots)$, 将其表示为关于 $\hbar$ 的形式幂级数后可知 $\Phi(a\star b)$ 中 $\hbar$ 的系数是 $\Phi_1(ab)+\mu_1(a,b)$. 另一方面, $\Phi(a)\star'\Phi(b)=(a+\Phi_1(a)\hbar+\cdots)\star'(b+\Phi_1(b)\hbar+\cdots)=a\star' b+(a\star'\Phi_1(b))\hbar+(\Phi_1(a)\star' b)\hbar+\cdots$, 其表达式中 $\hbar$ 的系数为 $\mu'_1(a,b)+a\Phi_1(b)+\Phi_1(a)b$. 故得到 $\Phi_1(ab)+\mu_1(a,b)=\mu'_1(a,b)+a\Phi_1(b)+\Phi_1(a)b,\forall a,b\in A$. 整理得 $\mu_1(a,b)-\mu'_1(a,b)=-\Phi_1(ab)+a\Phi_1(b)+\Phi_1(a)b$. 由此立即得到 μ_1 与 μ_2 诱导出相同的 Poisson 括号. □

事实上, 上述证明过程告诉我们更多.

Proposition 1.17. 设 (A,μ) 是域 $\Bbbk$ 上交换代数, 并有等价的形式形变 $A_\hbar=(A[[\hbar]],\star),A'_\hbar=(A[[\hbar]],\star')$, 其中

$$\star=\sum_{i=0}^{\infty}\mu_i\hbar^i,\star'=\sum_{i=0}^{\infty}\mu'_i\hbar^i,\mu_0=\mu'_0=\mu.$$

如果 $\Phi:A_\hbar\to A'_\hbar$ 是这两个形式形变间的等价, 那么 $\mu'_1-\mu_1=\delta^1(\Phi_1)$, 这里 δ^1 是 Hochschild 上链复形中的微分. 所以等价的形式形变的 1 次乘法部分对应 $H^2(A,A)$ 中同一元素.

Remark 1.18. 该命题也表明平凡形变的 1 次乘法部分诱导出的 2-上闭链一定是 2-上边缘链.

对交换代数 (A,μ) 的的形式形变 $A_\hbar$, 我们已经看到星积 $\star=\mu+\mu_1\hbar+\mu_2\hbar^2+\cdots$ 的 1 次乘法部分可以产生 A 上 Poisson 结构, 即通过取 $a\star b-b\star a(a,b\in A)$ 作为关于 $\hbar$ 的幂级数的 1 次项系数来得到 A 上 Poisson 括号. 那么反过来, 对任何 Poisson 代数 $(A,\{-,-\})$, 一个基本的问题便是：是否存在 A 的形式形变 $A_\hbar$, 使得星积 $\star$ 在上述意义下诱导的 A 上 Poisson 括号是否与原有 Poisson 括号一致? 即是否有

$$a\star b-b\star a=\{a,b\}\hbar \pmod{\hbar^2},\forall a,b\in A.$$

为此, 我们引入形变量子化的概念.

Definition 1.19 (形变量子化)**.** 设 $(A,\{-,-\})$ 是域 $\Bbbk$ 上 Poisson 代数. 若 A 的形式形变 $A_\hbar=(A[[\hbar]],\star)$ 满足 $a\star b-b\star a=\{a,b\}\hbar\pmod{\hbar^2},\forall a,b\in A$, 即 $\star$ 所诱导的 A 上 Poisson 结构与原有 Poisson 结构一致, 则称 $A_\hbar$ 是 A 的**形变量子化** (deformation quantization).

Remark 1.20. 如果 $A_\hbar$ 是 Poisson 代数 A 的形变量子化, 那么只要 A 上 Poisson 结构非平凡, 那么形变代数 $A_\hbar$ 是非交换代数. 反之, 对赋予平凡 Poisson 结构的多项式代数 $A=\Bbbk[x,y]$, 可构造其非交换的 $A_\hbar$.

Example 1.21. 设 (A,μ) 是域 $\Bbbk$ 上交换代数, 并赋予平凡 Poisson 结构, 即 $\{a,b\}=0,\forall a,b\in A$. 那么标准形式幂级数环 $A[[\hbar]]$ 就是 A 的形变量子化.

Remark 1.22. 如果 Poisson 代数 $(A,\{-,-\})$ 有形变量子化 $A_\hbar$, 一些文献中称 A 是 $A_\hbar$ 的**经典极限**.

Example 1.23. 设 $A=\mathbb{C}[x,y]$ 是多项式代数. 通过定义

$$x^i\star x^j=x^{i+j},x^i\star y^j=x^iy^j,y^i\star y^j=y^{i+j},y\star x=xy(1+\hbar+\frac{1}{2!}\hbar^2+\frac{1}{3!}\hbar^3+\cdots)=xye^\hbar,$$

可得到形变代数 $A[[\hbar]]$(见 [例1.11]). 这里 $\star$ 的 1 次乘法部分 μ_1 满足 $\mu_1(x,y)=0,\mu_1(y,x)=xy$, 所以 $\star$ 所诱导的 Poisson 括号 $\{-,-\}:A\times A\to A$ 满足 $\{x,y\}=\mu_1(x,y)-\mu_1(y,x)=-xy$. 故

$$\{f,g\}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\{x,y\}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\{y,x\}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)\{x,y\}=-xyJ(f,g),$$

其中 $J(f,g)$ 表示多项式 f,g 是 Jacobian 行列式. 即 $\{-,-\}$ 由多项式 $-xy$ 诱导的广义 Jacobian Poisson 结构. 所以上述形变代数 $A_\hbar$ 是多项式 Poisson 代数 $(\mathbb{C}[x,y],\{-,-\})$ 的形变量子化.

Example 1.24. 设域 $\Bbbk$ 上交换代数 A 上有平凡的 Poisson 结构, 则形式幂级数环 $A[[\hbar]]$ 上的标准乘法 $\star$ 给出 A 的形变量子化. 所以平凡 Poisson 代数总是其平凡形变的经典极限.

Definition 1.25 (Poisson 流形的形变量子化)**.** 若光滑流形 M 上的光滑函数环 $C^\infty(M)$ 有 Poisson 结构 $(C^\infty(M),\{-,-\})$, 则称 M 是一个 **Poisson 流形** (Poisson 流形是辛流形的推广). 若 Poisson 流形的光滑函数环作为 Poisson 代数有形变量子化, 那么称该 Poisson 流形有**形变量子化**.

之前提到, 有理论物理工作者主张经典力学到量子力学的量子化应当用代数结构的形变来理解, 因此考虑到 Poisson 结构是作为 Hamilton 经典力学的基本角色, 自然要问 Poisson 流形是否有形变量子化? 1997 年, M. Kontsevich 在 [Kon03] 中给出了上述问题肯定的答复.

Theorem 1.26 ([Kon03])**.** 任何 Poisson 流形都有形变量子化.

之前我们看到对任何域 $\Bbbk$ 上交换代数 A, A 的形式形变 $(A_\hbar,\star)$ 可天然诱导 A 上 Poisson 括号, 并且等价的形式形变诱导相同的 Poisson 括号, 因此我们有天然映射

$$\Theta:\{A\text{的形式形变等价类}\}\to\{A\text{上 Poisson 括号}\},[\star]\mapsto\{-,-\},$$

其中 $\{-,-\}:A\times A\to A,(a,b)\mapsto\mu_1(a,b)-\mu_1(b,a)$. M. Kontsevich 的工作表明当 A 是 Poisson 流形上的光滑函数环时, 上述映射 Θ 是满射.

下面我们来考察 (形式) 形变代数的一些环论性质.

Proposition 1.27. 设 (A,μ) 是域 $\Bbbk$ 上左 Noether 代数, 有形式形变代数 $(A[[\hbar]],\star)$, 那么 $(A[[\hbar]],\star)$ 作为 $\Bbbk[[\hbar]]$-代数也是左 Noether 代数.

Proof. 证明思路与交换代数中证明交换 Noether 环上形式幂级数环仍 Noether 的思想完全一样. 只要证形变代数的任何非零左理想 $\mathcal{B}$ 有限生成. 对每个自然数 j, 记考虑 A 的左理想 $I_j=\{b\in A|$存在$a_{j+1},a_{j+2},...\in A$使得$b\hbar^j+a_{j+1}\hbar^{j+1}+\cdots\in\mathcal{B}\}$. 这时仍有左理想升链 $I_0\subseteq I_1\subseteq I_2\subseteq\cdots$. 所以存在正整数 m 使得 $I_m=I_{m+1}=\cdots$. 对 $0\le j\le m$, 设 I_j 作为 A 的左理想有生成元集 $\{b_{j1},b_{j2},...,b_{jl_j}\}$, 对每个 $b_{jk},1\le k\le l_j$, 存在 $f_{jk}(\hbar)\in\mathcal{B}$ 使得 $f_{jk}(\hbar)$ 形如 $b_{jk}\hbar^j+g(\hbar),g\in(\hbar^{j+1})$. 现在断言 $\{f_{11},...,f_{1l_1},f_{21},...,f_{2l_2},...,f_{m1},...,f_{ml_m}\}$ 生成的 $(A[[\hbar]],\star)$ 的左理想 $\mathcal{D}$ 就是 $\mathcal{B}$. 首先 $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{B}$, 假设 $\mathcal{D}\subsetneq\mathcal{B}$, 那么存在 $f\in\mathcal{B}-\mathcal{D}$, 不妨设 $o(f)=n_0\ge m+1$. 那么存在正整数 $n_1>n_0$ 与 $a_{11},...,a_{1l_m}\in A$ 使得 $o(f-a_{11}\hbar^{n_0-m}\star f_{m1}-\cdots-a_{1l_m}\hbar^{n_0-m}\star f_{ml_m})=n_1$. 同样地, 存在正整数 $n_2>n_1$ 以及 $a_{21},...,a_{2l_m}\in A$ 使得对 $f_1=f-a_{11}\hbar^{n_0-m}\star f_{m1}-\cdots-a_{1l_m}\hbar^{n_0-m}\star f_{ml_m}$ 有 $o(f_1-a_{21}\hbar^{n_1-m}\star f_{m1}-\cdots-a_{2l_m}\hbar^{n_1-m}\star f_{ml_m})=n_2$. 重复上述过程, 存在严格递增正整数列 $n_0<n_1<n_2<\cdots$ 以及对每个 $1\le j\le m$, 存在 A 中点列 $\{a_{ij}\}_{i=1}^{\infty}$ 使得对每个正整数 r, 有

$$o(f-\sum_{i=1}^{r}a_{i1}\hbar^{n_{i-1}-m}\star f_{m1}-\sum_{i=1}^{r}a_{i2}\hbar^{n_{i-1}-m}\star f_{m2}-\cdots-\sum_{i=1}^{r}a_{il_m}\hbar^{n_{i-1}-m}\star f_{ml_m})=n_r.$$

对每个正整数 $1\le k\le l_m$, 作 $g_k(\hbar)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_{ik}\hbar^{n_{i-1}-m}$, 那么 $f=g_1\star f_{m1}+g_2\star f_{m2}+\cdots+g_{l_m}\star f_{ml_m}\in\mathcal{D}$, 这与 f 的选取矛盾. 因此 $\mathcal{B}$ 是有限生成左理想. □

Example 1.28. 设 K 是含幺交换环, A 是 K-代数. 如果 A 作为 K-模不是有限生成的, 那么 $A[[\hbar]]$ 作为 $K[[\hbar]]$-模不是可数生成的. 特别地, $A[[\hbar]]$ 作为 $K[[\hbar]]$-代数也不是可数生成的. 所以域 $\Bbbk$ 上无限维交换代数 (A,μ) 的形式形变代数 $(A[[\hbar]],\star)$ 一般而言作为 $\Bbbk[[\hbar]]$ 上代数可能不是仿射代数.

Proof. 假设 $A[[\hbar]]$ 作为 $K[[\hbar]]$-模是可数生成的, 设有生成元集 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, 那么对每个自然数 n, $f_0,...,f_n$ 所有关于 $\hbar$ 次数不超过 n 的系数生成的 A 的 K-子模 N_n 都是 A 的真子模, 故可选取 $a_n\in A$ 使得 $a_n\notin N_n$. 考虑 $g(\hbar)=a_0+a_1\hbar+a_2\hbar^2+\cdots\in A[[\hbar]]$, 那么 $g(\hbar)\notin(f_0,f_2,...)$(否则, 存在 $f_0,...,f_s$ 可 $K[[\hbar]]$-线性表出 $g(\hbar)$, 进而 $a_s\in N_s$), 矛盾. 这就说明 $A[[\hbar]]$ 作为 $K[[\hbar]]$-模不是可数生成的. □

Proposition 1.29. 设 (A,μ) 是域 $\Bbbk$ 上代数, 有形式形变代数 $A_\hbar=(A[[\hbar]],\star)$. 那么对任何 $f=a_0+a_1\hbar+a_2\hbar^2+\cdots\in A_\hbar$, f 关于 $\star$ 可逆的充要条件是 a_0 为 A 中可逆元.

Proof. 必要性是明显的, 充分性与标准形式幂级数环中可逆元刻画的证明完全类似. 具体地, 设 a_0 可逆, $1+e_1\hbar+e_2\hbar^2+\cdots$ 为形变代数的乘法幺元. 定义 $b_0=0$, 再利用

$$a_nb_0+a_0b_n+\sum_{\substack{i+j+s=n\\ i,j\le n}}\mu_s(a_i,b_j)=e_n$$

递归地定义出 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, 于是 $b_0+b_1\hbar+\cdots$ 为 f 的右逆. 进而知 $A_\hbar$ 中任何常数项是 A 中单位的形式幂级数有右逆, 所以 $A_\hbar$ 中任何常数项是 A 中单位的形式幂级数可逆. □

Corollary 1.30. 设 (A,μ) 是域 $\Bbbk$ 上代数, 有形式形变代数 $A_\hbar=(A[[\hbar]],\star)$. 那么 $\mathrm{Jac}(A_\hbar)=\mathrm{Jac}A+(\hbar)$.

Proof. 对任给 $a_0 \in \mathrm{Jac}A$, 任何以 a_0 为常数项的形式幂级数 $f = a_0 + a_1\hbar + \cdots \in A_\hbar$ 满足 $1 - gf$ 的常数项是 A 中可逆元, 这里 g 是任意 A 上形式幂级数. 因此 $\mathrm{Jac}A + (\hbar) \subseteq \mathrm{Jac}(A_\hbar)$. 反之, 利用 Jacobson 根中元素的左拟正则性质同样可得 $\mathrm{Jac}(A_\hbar)$ 中任何形式幂级数的常数项在 $\mathrm{Jac}A$ 内. □

Remark 1.31. 依 Nakayama 引理, 如果 M 是形式形变代数 $A_\hbar$ 上有限生成左模, 那么 $\hbar M = M$ 蕴含 $M = 0$.

因为含幺环的 Jacobson 根是所有本原理想之交, 所以立即得到

Corollary 1.32. 设 (A, μ) 是域 $\Bbbk$ 上代数, 有形式形变代数 $A_\hbar = (A[[\hbar]], \star)$. 那么有双射

$$\theta : \mathrm{Prim}(A_\hbar) \to \mathrm{Prim}(A), P \mapsto \pi(P),$$

这里 $\pi : A_\hbar \to A$ 是标准投射, $\mathrm{Prim}R$ 表示环 R 的本原理想全体.

Proof. 因为 π 是满射, 所以对任何 $A_\hbar$ 的素理想 Q, $\theta(Q)$ 是 A 的素理想. 注意到 $A_\hbar$ 的任何本原理想包含 $(\hbar)$, 所以每个本原理想 P 形如 $\mathfrak{p} + (\hbar)$, 这里 $\mathfrak{p}$ 是 P 中形式幂级数的常数项全体构成的 A 的理想, 因此 $P = \pi(P) + (\hbar)$. 进而有环同构 $A_\hbar/P \cong A/\pi(P)$, 这蕴含 θ 的定义合理性, 不难看出 θ 是双射. □

Remark 1.33. 特别地, 若 A 是交换代数, 那么形变代数的本原理想全体与原来代数的极大理想全体有双射. 但形变代数的素谱正如标准形式幂级数环一样难以把握.

1.2 n-阶形变

设 n 是正整数. 如果域 $\Bbbk$ 上代数 (A, μ) 有形式形变 $A_\hbar = (A[[\hbar]], \star)$, 那么可从 $A_\hbar$ 出发得到 $\Bbbk[[\hbar]]/(\hbar^{n+1})$-代数 $A_\hbar/(\hbar^{n+1})$, 其中有 $\Bbbk$-代数同构 $\Bbbk[\hbar]/(\hbar^{n+1}) \cong \Bbbk[[\hbar]]/(\hbar^{n+1})$. 即把形式形变“截断”到 $\hbar^n$ 部分.

Definition 1.34 (n-阶形变)**.** 设 (A, μ) 是域 $\Bbbk$ 上代数, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 如果 $\Bbbk[\hbar]/(\hbar^{n+1})$-模 $A[\hbar]/(\hbar^{n+1})$ 上有 $\Bbbk[\hbar]/(\hbar^{n+1})$-双线性映射 $\star_n : A[\hbar]/(\hbar^{n+1}) \times A[\hbar]/(\hbar^{n+1}) \to A[\hbar]/(\hbar^{n+1})$ 使得 $\star_n(a, b) - \overline{\mu(a, b)} \in \hbar A[\hbar]/(\hbar^{n+1})$ 并且 $\star_n$ 满足结合律, 则称 $\star_n$ 是 μ 的 ***n*-阶形变** (n-th order deformation)

Remark 1.35. 类似形式形变的情形, n-阶形变 $\star_n : A[\hbar]/(\hbar^{n+1}) \times A[\hbar]/(\hbar^{n+1}) \to A[\hbar]/(\hbar^{n+1})$ 有乘法单位元: 任取 A 的中心幂等元 e, 那么我们可以构造 $e_0, ..., e_n \in A$ 使得 $e_0 = e$ 并且 $e + e_1\hbar + \cdots + e_n\hbar^n$ 是 $(A[\hbar]/(\hbar^{n+1}), \star_{n+1})$ 的中心幂等元 (与形式形变情形不同的是, 这里 $\hbar$ 作为 $A[\hbar]/(\hbar^{n+1})$ 不再是中心正则元, 因为 $\hbar \cdot \hbar^n = 0$, 但当 $e = 1$ 时, 仍可直接验证由 1 提升的多项式 $1 + e_1\hbar + \cdots + e_n\hbar^n$ 是 $(A[\hbar]/(\hbar^{n+1}), \star_n)$ 中的中心正则元). 再考虑 $e = 1$ 所提升的中心幂等元便可得到 $(A[\hbar]/(\hbar^{n+1}), \star_{n+1})$ 的乘法单位元, 称 $(A[\hbar]/(\hbar^{n+1}), \star_n)$ 是 A 的 ***n*-阶形变代数**.

任何 μ 的形式形变 $A_\hbar = (A[[\hbar]], \star)$ 可通过标准投射 $\pi : A[[\hbar]] \to A[[\hbar]]/(\hbar^{n+1}) \cong A[\hbar]/(\hbar^{n+1})$ 给出 μ 的 n-阶形变. 类似于形式形变情形, 对 μ 的 n-阶形变 $\star_n$ 以及 $a, b \in A$, 同样有自然分解

$$a \star_n b = \mu_0(a, b) + \mu_1(a, b)\hbar + \cdots + \mu_n(a, b)\hbar^n,\ \mu_i(a, b) \in A (0 \leq i \leq n),$$

其中每个 μ_i 是 $\Bbbk$-双线性的并且 $\mu_0 = \mu$. 之后将该分解简记为 $\star = \mu_0 + \mu_1\hbar + \cdots + \mu_n\hbar^n$, μ_i 称为该 n-阶形变的 i **次乘法映射**. 如果 A 有 n-阶形变 $(A[\hbar]/(\hbar^{n+1}), \star_n)$, 那么类似形式形变情形可通过 $\star_n$ 满足结合律验证

$\star_n$ 的 1 次乘法部分是 A 的 2-上闭链中的元素. 并且 $\Bbbk[\hbar]/(\hbar^{n+1})$-模 $A[\hbar]/(\hbar^{n+1})$ 上 $\Bbbk[\hbar]/(\hbar^{n+1})$-双线性映射 $\star_n : A[\hbar]/(\hbar^{n+1}) \times A[\hbar]/(\hbar^{n+1}) \to A[\hbar]/(\hbar^{n+1})$ 满足结合律表明

$$\sum_{i+j=k} \mu_i(\mu_j(a,b),c) = \sum_{i+j=k} \mu_i(a,\mu_j(b,c)), \forall a,b,c \in A, 0 \le k \le n.$$

类似于形式形变的等价, 可以对 n-阶形变定义等价的概念.

Definition 1.36. 设 (A,μ) 是域 $\Bbbk$ 上代数, 若 n-阶形变 $(A[\hbar]/(\hbar^{n+1}),\star_n),(A[\hbar]/(\hbar^{n+1}),\star'_n)$ 存在 $\Bbbk[\hbar]/(\hbar^{n+1})$-代数同构 $\Phi : (A[\hbar]/(\hbar^{n+1}),\star_n) \to (A[\hbar]/(\hbar^{n+1}),\star'_n)$ 使 $\Phi(a) - a \in \hbar A[\hbar]/(\hbar^{n+1})$, 则称这两个 n-阶形变**等价**.

和形变情形一样, 对 n-阶形变 $\star_n,\star'_n$ 间的等价 $\Phi : (A[\hbar]/(\hbar^{n+1}),\star_n) \to (A[\hbar]/(\hbar^{n+1}),\star'_n)$, 可作分解 $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1\hbar + \cdots + \Phi_n\hbar^n$, 这里每个 $\Phi_k : A \to A$ 是 $\Bbbk$-线性变换, Φ_0 是恒等映射.

Lemma 1.37. 设 (A,μ) 是域 $\Bbbk$ 上代数, 若 n-阶形变 $(A[\hbar]/(\hbar^{n+1}),\star_n),(A[\hbar]/(\hbar^{n+1}),\star'_n)$ 满足存在 $\Bbbk[\hbar]/(\hbar^{n+1})$-双线性映射 $\Phi : (A[\hbar]/(\hbar^{n+1}),\star_n) \to (A[\hbar]/(\hbar^{n+1}),\star'_n)$ 使 $\Phi(a) - a \in \hbar A[\hbar]/(\hbar^{n+1})$ 并且 $\Phi(a \star_n b) = \Phi(a) \star_n \Phi(b), \forall a,b \in A$, 那么 Φ 是这两个 n-阶形变间的等价.

Proof. 可类似于形式形变情形直接验证, 但这里 $\hbar$ 不是中心正则元! □

Example 1.38. 设 (A,μ) 是域 $\Bbbk$ 上代数, 则 A 的 1-阶形变等价类全体和 A 系数在自身的 2 次 Hochschild 上同调 $H^2(A,A)$ 间有双射. 具体地, 若 1-阶形变 $\star_1,\star'_1$ 间有等价 $\Phi : (A[\hbar]/(\hbar^2),\star_1) \to (A[\hbar]/(\hbar^2),\star_2)$, 设 $\Phi = \mathrm{id}_A + \Phi_1\hbar, \star_1 = \mu + \mu_1\hbar + \mu_2\hbar^2, \star'_1 = \mu + \mu'_1\hbar + \mu'_2\hbar^2$, 那么考察下式中 $\hbar$ 的系数

$$\Phi(a \star_1 b) = \Phi(a) \star'_1 \Phi(b), \forall a,b \in A,$$

可得 $\mu_1(a,b) + \Phi_1(ab) = \mu'_1(a,b) + \Phi_1(a)b + a\Phi_1(b), \forall a,b \in A$. 所以 $\mu_1 - \mu'_1 = \delta^1(\Phi_1)$. 这说明等价的 1-阶形变的 1 次乘法部分对应的 2-上闭链相差一个 2-上边缘链. 反之, 如果 μ 的两个 1-阶形变 $\star_1 = \mu + \mu_1\hbar, \star'_1 = \mu + \mu'_1\hbar$ 满足它们的 1 次乘法部分 $\mu_1 - \mu'_1$ 为某个 2-上边缘链, 那么存在 $\Bbbk$-线性映射 $\Phi_1 : A \to A$ 使得 $\mu_1(a,b) - \mu'_1(a,b) = a\Phi_1(b) - \Phi_1(ab) + \Phi_1(a)b, \forall a,b \in A$. 于是 $\Phi = \mathrm{id}_A + \Phi_1\hbar$ 给出 $\star_1$ 和 $\star'_1$ 间的等价. 对任何 $\mu_1 \in Z^2(A,A)$, 易见 $\star_1 = \mu + \mu_1\hbar$ 对应 $H^2(A,A)$ 中元素就是 $\mu_1 + B^2(A,A)$. 总结一下, 我们有下述双射:

$$\eta : \{\mu\text{的1-阶形变等价类}\} \to H^2(A,A), [\star_1] \mapsto \mu_1 + B^2(A,A)$$

也有文献将 μ 的 1-阶形变称为**无穷小形变** (infinitesimal deformation).

本节接下来我们感兴趣 n-阶形变的延拓问题, 即 n-阶形变何时能延拓为 $(n+1)$-阶形变. 设 (A,μ) 是域 $\Bbbk$ 上代数, 那么从 [定理1.6] 中我们看到双线性映射族 $\{\mu_k : A \times A \to A\}_{k=0}^{\infty}, \mu_0 = \mu$ 如果满足对任何自然数 n 有

$$\sum_{i+j=n} \mu_i(\mu_j(a,b),c) = \sum_{i+j=n} \mu_i(a,\mu_j(b,c)), \forall a,b,c \in A,$$

那么存在 $A[[\hbar]]$ 上唯一的 $\Bbbk[[\hbar]]$-双线性映射使得 $(A[[\hbar]],\star)$ 成为 A 的一个形式形变. 现在我们把上式用 Gerstenhaber 括号 (见 [定义**??**]) 改写. 首先对任何 $\Bbbk$-双线性映射 $f,g : A \times A \to A$, 有

$$[f,g]_G(a,b,c) = (f\bullet g)(a,b,c) - (g\bullet f)(a,b,c) = f(g(a,b),c) - f(a,g(b,c)) + g(f(a,b),c) - g(a,f(b,c)), \forall a,b,c \in A.$$

故取 $f = \mu_i, g = \mu_j$ 便知 $[\mu_i,\mu_j]_G(a,b,c) = \mu_i(\mu_j(a,b),c) - \mu_i(a,\mu_j(b,c)) + (\mu_j(\mu_i(a,b),c) - \mu_j(a,\mu_i(b,c)))$. 一般地, 可直接计算得到下述事实.

Lemma 1.39. 设 (A, μ) 是域 $\Bbbk$ 上代数, 那么对任何 $f, g, h \in C^2(A, A)$, 有

$$\delta^3(f \bullet g) = [f, \delta^2 g]_G,$$

$$(f \bullet g) \bullet h - f \bullet (g \bullet h) : A^4 \to A, (a, b, c, d) \mapsto f(g(a, b), h(c, d)) - f(h(a, b), g(c, d)).$$

于是知对 (A, μ) 的 n-阶形变 $(A[\hbar]/(\hbar^{n+1}), \star_n)$, 其中 $\star_n = \mu + \mu_1\hbar + \cdots + \mu_n\hbar^n$, 我们有

$$\sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j\geq 1}} \mu_i \bullet \mu_j = \delta^2(\mu_k), \forall 2 \leq k \leq n.$$

可直接计算验证得到上式等号左边在 $Z^3(A, A)$ 中, 具体地, 有

$$\begin{aligned}
\delta^3(\sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j\geq 1}} \mu_i \bullet \mu_j) &= \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j\geq 1}} [\mu_i, \delta^2\mu_j]_G \\
&= \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j\geq 1}} \mu_i \bullet \delta^2\mu_j - \delta^2\mu_j \bullet \mu_i \\
&= \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j\geq 1}} \sum_{\substack{s+l=j \\ s,l\geq 1}} \mu_i \bullet (\mu_s \bullet \mu_l) - (\mu_s \bullet \mu_l) \bullet \mu_i \\
&= \sum_{\substack{i+j+l=n+1 \\ i,j,l\geq 1}} \mu_i \bullet (\mu_j \bullet \mu_l) - (\mu_i \bullet \mu_j) \bullet \mu_l \\
&=0.
\end{aligned}$$

易见 $\star_n$ 要想延拓为 $(n+1)$-阶形变 $\star_{n+1} = \mu + \mu_1\hbar + \cdots + \mu_n\hbar^n + \mu_{n+1}\hbar^{n+1}$, 当且仅当 $\Bbbk$-双线性映射 $\mu_{n+1} : A^2 \to A$ 满足

$$\sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j\geq 1}} \mu_i \bullet \mu_j = \delta^2(\mu_{n+1}).$$

我们把上式等号左侧的式子一般被称为第 n 个**阻碍** (obstruction). 前面的讨论表明

Proposition 1.40. 设 (A, μ) 是域 $\Bbbk$ 上代数, $(A[\hbar]/(\hbar^{n+1}), \star_n)$ 是 μ 的 n-阶形变, 其中 $\star_n = \mu + \mu_1\hbar + \cdots + \mu_n\hbar^n$. 那么第 n 个阻碍

$$O_n = \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j\geq 1}} \mu_i \bullet \mu_j \in Z^3(A, A)$$

, 并且 $\star_n$ 可延拓为 μ 的一个 $(n+1)$-阶形变的充要条件是 $O_n \in B^3(A, A)$.

Remark 1.41. 若域 $\Bbbk$ 的特征是零, 那么我们可以借助 Hochschild 上链复形上的 Gerstenhaber 括号予以说明 $O_n \in Z^3(A, A)$. 等价地, 只需说明

$$2O_n = \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j\geq 1}} [\mu_i, \mu_j]_G \in Z^3(A, A).$$

直接计算可知

$$\delta^3(\sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j\geq 1}} [\mu_i, \mu_j]_G) = -\sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j\geq 1}} [[\mu_i, \mu_j]_G, \mu]_G$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{i+j=n+1\\ i,j\geq 1}} [[\mu_j, \mu]_G, \mu_i]_G + \sum_{\substack{i+j=n+1\\ i,j\geq 1}} [[\mu, \mu_i]_G, \mu_j]_G \\
&= -2 \sum_{\substack{i+j=n+1\\ i,j\geq 1}} [\delta^2(\mu_i), \mu_j]_G \\
&= - \sum_{\substack{i+j+l=n+1\\ i,j,l\geq 1}} [[\mu_i, \mu_l]_G, \mu_j]_G \\
&=0.
\end{aligned}
$$

Corollary 1.42. 若域 $\Bbbk$ 上代数 (A, μ) 满足 $H^3(A, A) = 0$, 那么任何 Hochschild 上链复形中的 2-上闭链 $\mu_1 : A \times A \to A$ 总可延拓为 μ 的一个形式形变 $\star = \mu + \mu_1\hbar + \mu_2\hbar^2 + \cdots$.

Remark 1.43. 如果域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk \neq 2$, 那么域 $\Bbbk$ 上任何 Poisson 代数 (A, μ, π) 只要 $H^3(A, A) = 0$, A 的形变量子化就存在. 原因是此时 $\pi/2 \in Z^2(A, A)$, 在 $H^3(A, A) = 0$ 的条件下可以保证存在 μ 的形式形变 $\star = \mu + (\pi/2)\hbar + \mu_2\hbar^2 + \cdots$. 那么该形式形变诱导的 A 上 Poisson 结构 $\{-,-\} : A \times A \to A$ 满足

$$\{a, b\} = \frac{\pi(a, b) - \pi(b, a)}{2}, \forall a, b \in A.$$

所以 $\{a, b\} = \pi(a, b), \forall a, b \in A$. 进而 $(A[[\hbar]], \star)$ 是 (A, π) 的形变量子化.

1.3 代数结构形变的 Maurer-Cartan 方程

设 $\Bbbk$ 是特征不为 2 的域, (A, μ) 是 $\Bbbk$-交换代数, $\star = \mu + \mu_1\hbar + \mu_2\hbar^2 + \cdots \in C^2(A[[\hbar]], A[[\hbar]])$, 其中 $\mu_k \in C^2(A, A)$. 将形式幂级数环 $A[[\hbar]]$ 上标准乘法也记作 μ(即 $\mu \in C^2(A, A)$ 的自然 $\Bbbk[[\hbar]]$-延拓), 那么由 $2 \in \Bbbk[[\hbar]]$ 是可逆元可知 $\star$ 是 μ 的形式形变当且仅当 $\star - \mu$ 作为 $C^2(A[[\hbar]], A[[\hbar]])$ 中元素满足 $[\star, \star]_G = 0$, 这里 $[-,-]_G$ 表示形式幂级数代数 $(A[[\hbar]], \mu)$ 的 Hochschild 上链复形 $C^\bullet(A[[\hbar]], A[[\hbar]])$ 上的 Gerstenhaber 括号. 所以 $\star$ 为 μ 的形式形变的充要条件是 $\star - \mu \in C^2(A[[\hbar]], A[[\hbar]])$ 满足方程

$$\delta_\mu^2(x) - \frac{1}{2}[x, x]_G = 0,$$

这里 $\delta_\mu^\bullet$ 是形式幂级数代数 $A[[\hbar]]$ 的 Hochschild 上链复形的微分. 上述方程称为关于微分分次 Lie 代数

$$(C^\bullet(A[[\hbar]], A[[\hbar]])[1], [-,-]_G, \delta_\mu^\bullet)$$

的 **Maurer-Cartan 方程**. 所以 $\star$ 是 μ 的形式形变的充要条件是 $\Bbbk[[\hbar]]$-双线性映射 $\star - \mu A[[\hbar]] \times A[[\hbar]] \to A[[\hbar]]$ 是该微分分次 Lie 代数的 Maurer-Cartan 方程的解.

参考文献

[BFF+78] François Bayen, Moshé Flato, Christian Fronsdal, André Lichnerowicz, and Daniel Sternheimer. Deformation theory and quantization. i. deformations of symplectic structures. *Annals of Physics*, 111(1):61–110, 1978.

[CLGV12] Anne Pichereau Camille Laurent-Gengoux and Pol Vanhaecke. *Poisson Structures*. Springer Berlin, Heidelberg, 2012.

[Ger64] Murray Gerstenhaber. On the deformation of rings and algebras. *Annals of Mathematics*, pages 59–103, 1964.

[GS83] Murray Gerstenhaber and Samuel D Schack. On the deformation of algebra morphisms and diagrams. *Transactions of the American Mathematical Society*, 279(1):1–50, 1983.

[GS86] Murray Gerstenhaber and Samuel D Schack. Relative hochschild cohomology, rigid algebras, and the bockstein. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 43(1):53–74, 1986.

[Kon03] Maxim Kontsevich. Deformation quantization of poisson manifolds. *Letters in Mathematical Physics*, 66:157–216, 2003.

[MCP+93] Louis Boutet Monvel, Corrado Concini, Claudio Procesi, Pierre Schapira, and Michèle Vergne. *D-modules, Representation Theory, and Quantum Groups*. 1993.

[Yek05] Amnon Yekutieli. Deformation quantization in algebraic geometry. *Advances in Mathematics*, 198(1):383–432, 2005.