指数有限 Abel 群的循环群分解

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 12 月 18 日

这份笔记主要用于记录下述定理的证明.

Theorem 1. 设 $(A,+)$ 是 Abel 群满足存在正整数 n 使得 $nA=0$, 那么 A 为一些循环群的直和.

Proof. 对满足 $nA=0$ 的最小正整数 n 作归纳来证明结论. 如果 $n=1$, 那么由 $A=0$ 得到结论. 假设结论对不超过 $n-1(n\geq 2)$ 的情形成立, 那么当 n 是满足 $nA=0$ 的最小正整数时, 首先将 A 视作 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-模, 并注意到 A 一定存在阶为 n 的循环子群 (因为 A 指数有限, 所以存在某个元素的阶是所有元素阶的的倍数). 所以

$$S=\{X\subseteq A|X\text{是}A\text{作为}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\text{-模的线性无关子集}\}$$

是非空的, 易验证 $(S,\subseteq)$ 的任何全序子集有上界, 所以 S 存在极大元, 设该极大元生成的自由 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-模为 M, 那么由 M 是内射模 (利用 Bass-Papp 定理) 知 M 是 A 的直和因子. 所以存在 A 的 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-子模 B 使得 $A=M\oplus B$. 由 M 的极大性迫使 B 不存在 n 阶循环子群, 因此存在正整数 $t<n$ 使得 $tB=0$. 对 B 应用归纳假设得到 B 可分解为一些循环群的直和. 结合 M 是一些循环群的直和可知 A 是一些循环群的直和. $\square$