余切向量场和 Kähler 微分

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 7 月 23 日

Kähler 微分是交换代数场景中光滑余切向量场的替代品, 由 E. Kähler(德国, 1906-2000) 在上个世纪三十年代引入. 这份笔记主要介绍微分流形上余切向量场的代数性质以及与光滑函数环的 Kähler 微分模间的关系, 这里主要参考文献是 [Lee12] 和 [Nes03]. 一些 Kähler 微分模的基础内容可参见 [Eis04].

1 光滑余切向量场

首先我们回顾一些基本概念以便统一相关记号. 设 $\mathcal{M}$ 是 n 维光滑流形, $T^*\mathcal{M}$ 是其余切丛, $\pi : T^*\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是标准投射. 那么 $(T^*\mathcal{M}, \pi)$ 是 $\mathcal{M}$ 的秩为 n 的光滑向量丛. 如果 $\omega : \mathcal{M} \to T^*\mathcal{M}$ 是 $\pi : T^*\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 的光滑截面, 则称 ω 是 $\mathcal{M}$ 上**光滑 1-形式**. 记 $\Omega(\mathcal{M})$ 是所有光滑 1-形式构成的集合, 那么它作为余切丛的光滑截面全体, 有自然的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模结构, 这里 $C^\infty(\mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{M}$ 的光滑函数环. 如果 $\omega \in \Omega(\mathcal{M})$ 满足存在 $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ 使得 $\omega = df$, 这里 df 表示光滑函数 f 的微分, 则称 ω 是**恰当的**. 记 $\mathcal{M}$ 上所有光滑向量场构成的集合为 $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$, 同样 $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 作为切丛 $T\mathcal{M}$ 的光滑截面全体, 有自然的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模结构 (这里再指出, 我们有自然的模同构 $\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \cong \mathrm{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty(\mathcal{M})$, 这里 $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty(\mathcal{M})$ 是光滑函数环的导子模, 如果对导子模用换位子赋予 $\mathbb{R}$-Lie 代数结构, 这个同构也是 Lie 代数同构). 根据 Swan 定理, 任何光滑向量丛 $\xi : \mathcal{E} \to \mathcal{M}$ 的光滑截面全体 $\Gamma(\mathcal{E})$ 作为 $C^\infty(\mathcal{M})$-模总是有限生成投射模. 特别地, $\Omega(\mathcal{M})$ 和 $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 也都是有限生成投射 $C^\infty(\mathcal{M})$-模.

Lemma 1.1. 设 $\mathcal{M}$ 是光滑流形, 那么存在 $f_1, ..., f_m \in C^\infty(\mathcal{M})$ 使得 $\Omega(\mathcal{M})$ 作为 $C^\infty(\mathcal{M})$-模可由

$$\{df_1, df_2, ..., df_m\}$$

生成. 即 $\Omega(\mathcal{M})$ 作为 $C^\infty(\mathcal{M})$-模可由有限多个恰当 1-形式生成.

Proof. 参见 [Nes03, p.234, Corollary 14.17]. □

从光滑流形的局部上看, 给定光滑坐标卡上的坐标向量场和坐标余切向量场具有对偶的关系. 下面我们使用模的语言来把这种对偶关系延伸到整个光滑流形上.

Theorem 1.2. 设 $\mathcal{M}$ 是光滑流形, 定义 $\eta : \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M})) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(\mathcal{M}))(\cong \mathfrak{X}(\mathcal{M}))$ 为

$$\eta(\varphi) : C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M}), f \mapsto \varphi(df), \forall \varphi \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M})),$$

那么 η 是 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构. 换言之, 对任何 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同态 $\varphi:\Omega(\mathcal{M})\to C^\infty(\mathcal{M})$, 存在唯一的 $\mathbb{R}$-线性导子 $\tilde\varphi:C^\infty(\mathcal{M})\to C^\infty(\mathcal{M})$ 使得 $\varphi d=\tilde\varphi$, 即下图交换:

$$\begin{tikzcd} C^\infty(\mathcal{M}) \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, dashed, "\tilde\varphi"'] & & \Omega(\mathcal{M}) \arrow[dl, "\varphi"] \\ & C^\infty(\mathcal{M}) & \end{tikzcd}$$

Proof. 根据 η 的定义不难看出 η 是 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同态. 下证 η 是满射. 任给向量场 $X:C^\infty(\mathcal{M})\to C^\infty(\mathcal{M})$, 定义 $\varphi:\Omega(\mathcal{M})\to C^\infty(\mathcal{M}),\omega\mapsto\omega(X)$, 这里 $\omega(X):\mathcal{M}\to\mathbb{R},p\mapsto\omega_p(X_p)$, 其中 $X_p(f)=(Xf)(p),\forall f\in C^\infty(\mathcal{M})$. 由 ω 与 X 的光滑性保证了 $\omega(X)\in C^\infty(\mathcal{M})$. 容易验证 φ 是 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同态且 $\eta(\varphi)=X$. 最后说明 η 是单射, 设 $\varphi\in\mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega(\mathcal{M})$ 使 $\varphi(df)=0,\forall f\in C^\infty(\mathcal{M})$, 由 [引理1.1] 便知 $\varphi(\omega)=0,\forall\omega\in\Omega(\mathcal{M})$. □

Remark. 该定理表明光滑流形上余切向量场全体构成的对偶模就是光滑向量场全体构成的模. 因为 $\Omega(\mathcal{M})$ 是有限生成投射 $C^\infty(\mathcal{M})$-模, 所以应用对偶基引理可知 $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(\mathcal{M}))$ 也是有限生成投射模. 于是

$$\Omega(\mathcal{M})\cong\mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(\mathcal{M})),C^\infty(\mathcal{M})).$$

并且根据证明过程可知该 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构由 $\xi:\Omega(\mathcal{M})\to\mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(\mathcal{M}),C^\infty(\mathcal{M})),\omega\mapsto\xi(\omega)$, 其中 $\xi(\omega)(X)=\omega(X),\forall X\in\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(\mathcal{M}))$ 给出. 那么对任何自然数 k, 有 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构

$$\wedge^k\xi:\wedge^k_{C^\infty(\mathcal{M})}\Omega(\mathcal{M})\to\mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}\left(\wedge^k_{C^\infty(\mathcal{M})}\mathfrak{X}(\mathcal{M}),C^\infty(\mathcal{M})\right)$$

满足任何 $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k\in\wedge^k_{C^\infty(\mathcal{M})}\Omega(\mathcal{M})$ 有 $(\wedge^k\xi)(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k)$ 作用每个 $X_1\wedge\cdots\wedge X_k\in\wedge^k_{C^\infty(\mathcal{M})}\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 得到

$$\sum_{\sigma\in S_k}(\mathrm{sgn}\sigma)\omega_1(X_{\sigma(1)})\omega_2(X_{\sigma(2)})\cdots\omega_k(X_{\sigma(k)}).$$

2 光滑函数环的 Kähler 微分模

本节固定含幺交换环 K 以及 K-交换代数 A. 若 A-模 $\Omega(A)$ 与 K-导子 $d:A\to\Omega(A)$ 满足对任何 K-导子 $D:A\to M$(这里 M 是 A-模), 存在唯一的 A-模同态 $f:\Omega(A)\to M$ 使得 $fd=D$, 即下图交换, 则称 $(\Omega(A),d)$ 是 A 的 **Kähler 微分模**. 通常将 $\Omega(A)$ 中的元素称为 **Kähler 微分**或 **Kähler 1-形式**. 定义中的导子 $d:A\to\Omega(A)$ 常被称为**泛导子**. 有时也将 Kähler 微分模记作 $\Omega_K(A)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, "D"'] & & \Omega(A) \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

设 $\Omega(A)$ 是由生成元集 $\{d(a)|a\in A\}$ 与下述关系定义出的 A-模:

$$d(aa')=ad(a')+d(a)a',d(ka+k'a')=kd(a)+k'd(a'),\forall a,a'\in A,k,k'\in K.$$

并记 $d:A\to\Omega(A),a\mapsto d(a)$. 那么不难验证 $(\Omega(A),d)$ 是 A 的 Kähler 微分模. 事实上有多种构造 Kähler 微分模的方式来说明其存在性. 如果 A 是平坦 K-模, 可直接验证 A 系数在 M 中的 1 次 Hochschild 同调

$H_1(A,M) \cong \Omega(A) \otimes_A M$. 特别地, 有 A-模同构 $H_1(A,A) \cong \Omega(A)$(更进一步, 如果 A 是域上本质有限型的光滑代数, Hochschild-Kostant-Rosenberg 定理告诉我们 $\Omega(A)$ 决定的外代数与 Hochschild 同调代数 $H_*(A,A)$ 间有标准的分次代数同构). 根据 Kähler 微分模的定义立即看到 A-模同构 $\mathrm{Der}_K A \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega(A), A)$, 因此联系 [定理1.2] 可知交换代数的 Kähler 微分模保持了“微分模”与“导子模”间的对偶性.

下面我们感兴趣当 $A = C^\infty(\mathcal{M})$ 为某个光滑流形 $\mathcal{M}$ 的光滑函数环时, Kähler 微分模 $\Omega(C^\infty(\mathcal{M}))$ 与所有光滑 1-形式构成的模 $\Omega(\mathcal{M})$ 间的关系.

为不引起混淆, 下面记 $\mathbb{R}$-交换代数 $C^\infty(\mathcal{M})$ 的泛导子为 $\delta : C^\infty(\mathcal{M}) \to \Omega(C^\infty(\mathcal{M}))$. 那么由微分 $d : C^\infty(\mathcal{M}) \to \Omega(\mathcal{M})$ 是 $\mathbb{R}$-线性导子, 存在唯一的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同态 $\theta : \Omega(C^\infty(\mathcal{M})) \to \Omega(\mathcal{M})$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(\mathcal{M}) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "d"'] & & \Omega(C^\infty(\mathcal{M})) \arrow[dl, dashed, "\theta"] \\
& \Omega(\mathcal{M}) &
\end{tikzcd}$$

根据 [引理1.1], θ 是满 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同态. 但 θ 一般不是单射 (见 [KLV86, p.27]). 因此 $\Omega(\mathcal{M})$ 是 $\Omega(C^\infty(\mathcal{M}))$ 的商模. 因此 $(\Omega(\mathcal{M}), d)$ 一般不是光滑函数环的 Kähler 微分模. 但它们都满足 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构

$$\mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M})) \cong \mathrm{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty(\mathcal{M}) \cong \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega(C^\infty(\mathcal{M})), C^\infty(\mathcal{M})).$$

在代数几何场景, 如果 X 是代数闭域 $\Bbbk$ 上的仿射簇, 记 $\Omega(X)$ 是 X 的坐标环. 那么由 Kähler 微分模的定义有 $\mathcal{O}(X)$-模同构 $\mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(\Omega(\mathcal{O}(X)), \mathcal{O}(X))$. 我们把 $\mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X)$ 视作 X 上的 (多项式) 向量场全体. 如果进一步 X 是光滑簇, 那么 $\Omega(\mathcal{O}(X))$ 是有限生成投射 $\mathcal{O}(X)$-模. 因此这时类似光滑流形也有

$$\Omega(\mathcal{O}(X)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(\mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X), \Omega(\mathcal{O}(X))).$$

更一般地, 对任何含幺交换环 K 上本质有限型的光滑交换代数 A, 总有 $\Omega(A)$ 是有限生成投射 A-模.

参考文献

[Eis04] D. Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry.* Springer Science+Business Media, 2004.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 1977.

[KLV86] I.S. Krasilshchik, V.V. Lychagin, and A.M. Vinogradov. *Geometry of jet spaces and nonlinear partial differential equations.* Gordon and Breach Science Publishers New York, 1986.

[Lee12] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218. Springer Science & Business Media, 2012.

[Nes03] J. Nestruev. *Smooth manifolds and observables*, volume 220. Springer, 2003.