中心特征标

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 1 月 15 日

这里主要记录代数闭域上结合代数的有限维不可分表示的中心特征标的基本概念 (主要参考 [EGH+11]) 并讨论一些它与给定代数中心的极大理想之间的联系.

回忆域 $\Bbbk$ 上代数 A 上的**可乘线性泛函**是指 A 到 $\Bbbk$ 的代数同态. 记 A 上可乘线性泛函全体为 $\mathcal{M}(A)$. 根据 Zariski 引理, 如果 A 是代数闭域 $\Bbbk$ 上交换仿射代数, 则 $\theta:\mathcal{M}(A)\to\mathrm{maxSpec}A,\chi\mapsto\mathrm{Ker}\chi$ 是满射. 下面说明 θ 也是单射. 如果 $\chi_1,\chi_2\in\mathcal{M}(A)$ 满足 $\mathrm{Ker}\chi_1=\mathrm{Ker}\chi_2$, 记 $\mathfrak{m}=\mathrm{Ker}\chi_1$ 为公共的极大理想, 那么对每个 $a\in A$, 存在唯一的 $\alpha\in\Bbbk$ 使得 $a-\alpha 1\in\mathfrak{m}$, 进而知 $\chi_1(a)=\chi_2(a)=\alpha$. 所以 θ 是双射, 它给出了 A 上可乘线性泛函全体与极大谱间的双射. 若记 A 的所有不可约表示等价类构成的类是 $\mathbf{Irr}A$, 那么有标准双射 $\mathbf{Irr}A\to\mathrm{maxSpec}A,[M]\mapsto\mathrm{Ann}_AM$, 这说明 $\mathbf{Irr}A$ 也是集合. 所以有 A 上可乘线性泛函集与 A 的不可约表示等价类集间有自然双射 $\eta:\mathcal{M}(A)\to\mathbf{Irr}A,\chi\mapsto[A/\mathrm{Ker}\chi]$. 这也说明代数闭域上交换仿射代数 (特别地, 有限维交换代数) 的不可约表示的研究可完全归结于其上可乘线性泛函.

下面对代数的有限维不可分表示引入类似思想. 以下固定 $\Bbbk$ 是代数闭域, A 是 $\Bbbk$-代数. 如果 $\rho:A\to\mathrm{End}_{\Bbbk}M$ 是 A 的有限维不可分表示, 那么每个 $z\in Z(A)$ 对应 M 上 A-模自同态 $\rho(z)$. 下面说明 $\rho(z)$ 作为 M 上线性变换在 $\Bbbk$ 中特征值唯一. 如果 $\rho(z)$ 的特征多项式有标准分解 $c(x)=(x-\lambda_1)^{n_1}\cdots(x-\lambda_m)^{n_m}$, 这里 $\lambda_1,...,\lambda_m\in\Bbbk$ 且每个 $n_i\geq 1$. 依根子空间分解,

$$M=\mathrm{Ker}(\rho(z)-\lambda_1\mathrm{id}_M)^{n_1}\oplus\mathrm{Ker}(\rho(z)-\lambda_2\mathrm{id}_M)^{n_2}\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}(\rho(z)-\lambda_m\mathrm{id}_M)^{n_m}.$$

因为 $\rho(z)$ 和每个 $\rho(a)$ 可交换, 所以上述直和分解中每个直和项都是 M 的 A-子模. 于是 M 的不可分性迫使 $M=\mathrm{Ker}(\rho(z)-\lambda_1\mathrm{id}_M)^{n_1}$. 因此 $\rho(z)$ 的特征值唯一, 记其特征值为 $\chi_M(z)$. 现任取 $z_1,z_2\in Z(A)$, 那么由 $\rho(z_1)$ 与 $\rho(z_2)$ 的交换性保证了它们在给定基下矩阵可同时上三角化, 所以 $\chi_M(z_1z_2)=\chi_M(z_1)\chi_M(z_2),\chi_M(z_1+z_2)=\chi_M(z_1)+\chi_M(z_2),\forall z_1,z_2\in Z(A)$. 这说明 $\chi_M:Z(A)\to\Bbbk$ 是可乘线性泛函.

Definition 1. 设 A 是代数闭域 $\Bbbk$ 上代数, $\rho:A\to\mathrm{End}_{\Bbbk}M$ 是有限维不可分表示. 对每个 $z\in Z(A)$, 记 $\chi_M(z)$ 为 $\rho(z)$ 唯一的特征值. 称可乘线性泛函 $\chi_M:Z(A)\to\Bbbk$ 是给定不可分表示的**中心特征标**.

Remark 2. 因为 $\rho:A\to\mathrm{End}_{\Bbbk}M$ 是有限维表示, 所以 ρ 存在不可约子表示, 设该表示对应的不可约 A-模为 N. 那么 $\chi_M=\chi_N$. 因此可能有不等价的有限维不可分表示对应产生相同的中心特征标.

Example 3. 根据 Zariski 引理, 域 $\Bbbk$ 上交换仿射代数 A 上的不可约表示明显都是有限维的. 但不可分表示未必是有限维的. 例如多项式代数 $\Bbbk[x]$ 作为自身上的模不可分, 是无限维模.

通过下面的引理我们也可以看出代数闭域 $\Bbbk$ 上的代数 A, 其中心的任何极大理想都是某个有限维不可约表示决定的中心特征标. 因此可在 A 上的有限维不可分模同构类集 (因为 A 上有限生成模范畴是本质小的, 所以这里确实是集合)$\mathbf{Ind}A$ 上定义等价关系 $[M]\sim[N]\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\chi_M=\mathrm{Ker}\chi_N$.

Lemma 4. 设 A 是代数闭域 $\Bbbk$ 上代数, M 是有限维不可约 A-模, 则 $\mathrm{Ann}_A M\cap Z(A)=\mathrm{Ker}\chi_M$.

Proof. 这时 A 中每个元素在 M 上的作用就是 $\Bbbk$ 中元素的数乘, 即每个 $a\in A$ 满足存在 $\lambda_a\in\Bbbk$ 使得 $ax=\lambda_a x,\forall x\in M$. 因此 $a\in\mathrm{Ann}_A M$ 当且仅当 a 作为 M 上线性变换唯一的特征值是零. □

Remark 5. 由此可知如果 A 是代数闭域 $\Bbbk$ 上满足作为 $Z(A)$-模有限生成的代数, 那么任何 $Z(A)$ 的极大理想都是某个有限维不可约表示决定的中心特征标的核. 如果进一步 A 仿射, 则 A 的不可约表示都是有限维的.

如果 [引理4] 的条件中进一步要求 A 是交换的, 那么立即得到下述定理.

Theorem 6. 设 A 是代数闭域 $\Bbbk$ 上交换代数, M,N 是有限维不可约 A-模. 则 $M\cong N$ 当且仅当 $\mathrm{Ker}\chi_M=\mathrm{Ker}\chi_N$. 因此交换代数的不可约表示完全被中心特征标分类.

在这份笔记最后, 我们证明代数闭域上有限维代数所有不可约表示的维数平方和不超过给定代数的维数.

Theorem 7. 设 A 是代数闭域 $\Bbbk$ 上代数, $M_1,...,M_r$ 是 A 上不可约模同构类的一个代表元集. 那么

$$\sum_{i=1}^{r}(\dim_{\Bbbk}M_i)^2\leq\dim_{\Bbbk}A,$$

并且上式等号成立的充要条件是 A 为半单代数.

Proof. 记 A 的 Jacobson 根为 J, 则 $M_1,...,M_r$ 也是 A/J 上不可约模同构类的一个代表元集. 下面说明

$$\sum_{i=1}^{r}(\dim_{\Bbbk}M_i)^2=\dim_{\Bbbk}A/J,$$

进而结合 Wedderburn-Artin 定理立即得到结论. 记 $\Delta_i=\mathrm{End}_R M_i, n_i=\dim_{\Delta_i}M_i$, 则有 $\Bbbk$-代数同构

$$A/J\cong\mathrm{M}_{n_1}(\Delta_1)\times\mathrm{M}_{n_2}(\Delta_2)\times\cdots\times\mathrm{M}_{n_r}(\Delta_r),$$

由于 $\Bbbk$ 是代数闭域, 所以每个 $\Delta_i=\Bbbk$, 进而 $n_i=\dim_{\Bbbk}M_i,\forall 1\leq i\leq r$. 于是由 $\dim_{\Bbbk}J\geq 0$ 便得结论. □

下面的例子表明上述定理条件中代数闭域的条件是必要的.

Example 8. 取 $\Bbbk=\mathbb{R}, A=M=\mathbb{C}$. 则 ${}_AM$ 不可约且 A 的不可约表示等价类唯一. 这时

$$(\dim_{\Bbbk}M)^2=4>2=\dim_{\Bbbk}A.$$

参考文献

[EGH+11] P. Etingof, O. Golberg, S. Hensel, Tiankai Liu, A. Schwendner, D. Vaintrob, and E. Yudovina. *Introduction to representation theory*, volume 59. American Mathematical Soc., 2011.