中心无限除环构造

戚天成

2023 年 6 月 25 日

这份笔记主要用于记录中心无限除环具体例子的构造, 主要参考文献是 [Lam01]. 除环是抽象代数中的基本研究对象, 它是特殊的单环, 而我们熟知的域是特殊的除环. 根据模论中的 Schur 引理, 任何不可约模的自同态环是除环, 这是产生除环的一种手段 (反之不然, 例如有理加群 $\mathbb{Q}$ 作为 $\mathbb{Z}$-模有非平凡子模, 但 $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$). 除环有非常丰富的理论, 一个里程碑式的结果便是 Wedderburn 小定理：有限除环必是域 [MW05]. 因为单环的中心是域, 所以除环的中心自然也是域. 在经典域论中, 对一个域扩张 $F \subseteq E$, 我们感兴趣域扩张的次数 $[E : F] = \dim_F E$. 在除环理论中, 因为除环 Δ 可视作域 $Z(\Delta)$ 上的线性空间 (自然也是 $Z(\Delta)$-代数), 故除环分类的研究便化归为两种基本情形：

(1)$\dim_{Z(\Delta)}\Delta$ 有限, 此时称 Δ 是**中心有限除环**. (2)$\dim_{Z(\Delta)}\Delta$ 无限, 此时称 Δ 是**中心无限除环**.

对于前者, 每个域明显是中心有限除环、四元数代数 $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ 是 $\mathbb{R}$ 上 4 维非交换代数. 而对于后者, 我们很难直接给出具体例子, 因此一下子无法断言是否存在中心无限的除环.

含幺交换环 K 上的**多项式恒等式代数** (或简称 **PI 代数**) 的指满足某个 K 上首一非交换多项式 $f \in K\langle x_1, ..., x_n\rangle$ 的结合代数. $\mathbb{Z}$ 上的 PI 代数被称为 **PI 环**. 容易证明作为中心上的模有限生成的环都是 PI 的, 所以中心有限除环都是 PI 环. 对于中心无限情形, PI 代数中的 Kaplansky 定理说一个 (左) 本原 PI 环必定是其中心上的有限维中心单代数, 因而如果存在中心无限的除环, 那么这样的除环一定不是 PI 的. 特别地, 我们也可以看到 Artin 环未必是 PI 环. 由此可见, 确定中心无限除环的存在性显得十分必要.

由于水平有限, 虽然我全力以赴, 但还是无法避免笔记中存在不足与错误, 欢迎大家指出!

1 具体构造：斜 Laurent 级数环

本节记录的例子来自 D. Hilbert(1899). 固定域 $\Bbbk$ 以及域 $\Bbbk$ 上的自同构 $\sigma : \Bbbk \to \Bbbk$, 考虑域 $\Bbbk$ 上所有 Laurent 级数作成的加法群 (易见其上有天然的 $\Bbbk$-线性结构)

$$\left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i x^i \middle| a_i \in \Bbbk\text{且仅有有限多个}i < 0\text{使}a_i \neq 0 \right\},$$

下面通过域自同构 σ 在此加群上赋予乘法结构：

$$\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i x^i \right) \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j x^j \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i \sigma^i(b_j) \right) x^k.$$

因为对充分小的 i,j, $a_i=b_j=0$, 所以对固定的 $k\in\mathbb{Z}$, $\sum\limits_{i+j=k}a_i\sigma^i(b_j)$ 是有限和. 并且当 k 充分小时, x^k 的系数为零. 因此上述乘法结构是定义合理的二元运算, 记赋予该乘法运算的 Laurent 级数加群为 $\Bbbk((x;\sigma))$. 根据上述乘法运算的定义, 很容易看到该运算满足左右分配律, 为了说明 $\Bbbk((x;\sigma))$ 构成环, 还需验证:

Lemma 1.1. 设 $\sigma\in\mathrm{Aut}\Bbbk$, 则 $\Bbbk((x;\sigma))$ 上定义的乘法具备结合律.

Proof. 任取 $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}a_ix^i$, $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}b_jx^j$, $\sum\limits_{t=-\infty}^{\infty}c_tx^t\in\Bbbk((x;\sigma))$, 则

$$\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_ix^i\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}b_jx^j\right)\sum_{t=-\infty}^{\infty}c_tx^t=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i+j+t}a_i\sigma^i(b_j)\sigma^{i+j}(c_t)\right)x^k,$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_ix^i\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}b_jx^j\cdot\sum_{t=-\infty}^{\infty}c_tx^t\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i+j+t}a_i\sigma^i(b_j\sigma^j(c_t))\right)x^k.$$

对固定的 $k\in\mathbb{Z}$, 这里 $\sum\limits_{i+j+t}a_i\sigma^i(b_j)\sigma^{i+j}(c_t)$ 与 $\sum\limits_{i+j+t}a_i\sigma^i(b_j\sigma^j(c_t))$ 均为有限和, 故由 σ 保持乘法即得结论. $\square$

由此我们看到 $\Bbbk((x;\sigma))$ 是 $\Bbbk$-代数, 有乘法幺元 1, 称 $\Bbbk((x;\sigma))$ 为**斜 Laurent 级数环** (skew Laurent series ring), 将 $\Bbbk((x;\sigma))$ 中元素称为**斜 Laurent 级数**. 在复分析中我们熟知复数域上 Laurent 级数环 $\mathbb{C}((x))$ 是域.

Example 1.2. 若取域自同构 $\sigma=\mathrm{id}\in\mathrm{Aut}\Bbbk$, 则 $\Bbbk((x;\sigma))$ 上乘法为

$$\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_ix^i\right)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}b_jx^j\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)x^k.$$

这时斜 Laurent 级数环退化为经典 Laurent 级数环.

一般地, 斜 Laurent 级数环是非交换的. 若 $\sigma\neq\mathrm{id}\in\mathrm{Aut}\Bbbk$, 取 $b\in\Bbbk$ 使得 $\sigma(b)\neq b$, 则 $bx\neq\sigma(b)x=xb$. 不过因为这里 $\Bbbk$ 是域, 所以它享有良好的性质——$\Bbbk((x;\sigma))$ 是除环.

Proposition 1.3. 斜 Laurent 多项式环 $\Bbbk((x;\sigma))$ 是除环.

Proof. 易见 $\Bbbk((x;\sigma))$ 中非零元之积仍非零, 故只要证任何 $\Bbbk((x;\sigma))$ 中非零元在 $\Bbbk((x;\sigma))$ 中有左逆即可. 任取

$$\alpha=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_ix^i\neq0\in\Bbbk((x;\sigma)),$$

并设 $t=\min\{i\in\mathbb{Z}|a_i\neq0\}$, 希望构造 $\alpha=a_tx^t+a_{t+1}x^{t+1}+\cdots$ 的逆元. 如果 α 的左逆存在, 设为 $\beta=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}b_jx^j$, 则由 $\beta\alpha=1$ 迫使 $\min\{j\in\mathbb{Z}|b_j\neq0\}=-t$ 且 $b_{-t}=\sigma^t(a_t)$, 对于 $j\geq-t+1$, 均满足

$$\sum_{j+i=k}b_j\sigma^j(a_i)=b_{-t}\sigma^{-t}(a_{k+t})+b_{-t+1}\sigma^{-t+1}(a_{k+t-1})+\cdots+b_{k-t}\sigma^{k-t}(a_t)=0,\forall k\geq1.$$

因此, 我们如下递归地定义序列 $\{b_j\}_{j=-t}^{\infty}$: 置 $b_{-t}=\sigma^t(a_t)$. 如果对 $t\leq j-1$ 已经定义好 $b_{-t},b_{-t+1},...,b_{j-1}$ 的取值, 定义 $b_j=-[b_{-t}\sigma^{-t}(a_{j+2t})+b_{-t+1}\sigma^{-t+1}((a_{j+2t-1})+\cdots+b_{j-1}\sigma^{j-1}(a_{t+1})]\sigma^{-j}(a_t)$. 由此得到 $\beta=b_{-t}x^{-t}+b_{-t+1}x^{-t+1}+\cdots$. 根据 β 的定义, 直接验证便知 β 是 α 的左逆. 故 $\Bbbk((x;\sigma))$ 是除环. $\square$

Exercise. 设 R 是含幺环, $\sigma \in \mathrm{Aut}R$ 是 R 上环自同构. 类似定义斜 Laurent 级数环 $R((x;\sigma))$, 验证它是含幺环并证明当 R 是除环时, $R((x;\sigma))$ 也为除环.

Exercise (Hilbert 原始构造)**.** 设 $\Bbbk = \mathbb{Q}(t)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上以 t 为变量的有理函数域. 定义

$$\sigma : \mathbb{Q}(t) \to \mathbb{Q}(t), \frac{f(t)}{g(t)} \mapsto \frac{f(2t)}{g(2t)}.$$

验证 σ 是定义合理的域自同构并说明 σ 在 $\mathrm{Aut}\Bbbk$ 中的阶是无穷.

现在我们可以给出主要结论, 它表明中心无限除环的存在性.

Proposition 1.4. 设 $\Bbbk$ 是域, $\sigma \in \mathrm{Aut}\Bbbk$ 满足阶是无穷. 那么除环 $\Delta = \Bbbk((x;\sigma))$ 的中心

$$Z(\Delta) = \Bbbk_0 = \{a \in \Bbbk | \sigma(a) = a\}.$$

特别地, Δ 作为 $Z(\Delta)$ 上的线性空间维数无限.

Proof. 任取 $f = \sum_{i=n}^{\infty} a_i x^i \in Z(\Delta)$, 对每个 $a \in \Bbbk$, 利用 $af = fa$ 可知对任何 $a_j \neq 0$ 有 $\sigma^j(a) = a$. 即一旦 f 存在使得 $a_j x^j \neq 0$ 的项, 便有 $\sigma^j = \mathrm{id}$. 由于 σ 的阶是无穷, 故满足 $a_j \neq 0$ 的指标 j 只可能是零. 这一观察表明 $f = a_0 \in \Bbbk$. 于是由 $fx = xf$ 立即得到 $f = a_0 \in \Bbbk_0$. 反之, 每个 $c \in \Bbbk$ 满足 $xc = cx$, 所以 $cg = gc, \forall g \in \Delta$. 所以 $Z(\Delta) = \Bbbk_0$. Δ 作为 $\Bbbk_0$ 上线性空间维数明显无限, 故结论成立. □

Corollary 1.5. 存在除环 Δ 使得 Δ 是中心无限除环.

Corollary 1.6. 存在左 Artin 单环 R 使得 R 作为 $Z(R)$-模不是有限生成的.

Corollary 1.7. 存在左 Artin 环 R 使得 R 不是 PI 环.

以下的环 R 均默认有幺元 $1 \neq 0$.

Exercise. 设 R 是单环, 证明：$Z(R)$ 是域.

Exercise. 设 R 是素环, 证明：$Z(R)$ 是整区.

Exercise. 设 R 是左 Noether 环, 证明：R 的满自同态一定单.

Exercise. 设 R 是左 Noether 环, $a, b \in R$. 证明：$ab = 1$ 蕴含 $ba = 1$.

Exercise. 设 R 是左 Artin 环, 举例说明 R 的单自同态未必满.

参考文献

[Lam01] T. Y. Lam. *A First Course in Noncommutative Rings*. Springer-Verlag, 2nd edition, 2001.

[MW05] J. H. Maclagan-Wedderburn. A theorem on finite algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 6(3):349–352, 1905.