带有迹的代数范畴

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 4 月 27 日

这份笔记主要用于记录带有迹的代数范畴理论的一些基本性质, 该理论主要由 C. Procesi 自上个世纪 70 年代发展至今 (特征为零的域上的相关理论可参见 [Pro73], [Pro74], [Pro76] 和 [Pro79]). 这里的主要参考文献是 [DCPRR05]. 由于水平有限, 虽然我全力以赴, 但还是无法避免笔记中存在不足与错误, 欢迎大家指出!

目录

1 带有迹的代数范畴 **1**

1.1 有限维表示 2

1.2 泛 n 维表示上的 $\mathrm{GL}_n(K)$-作用 5

1.3 带有迹的代数 7

1 带有迹的代数范畴

本章固定含幺交换环 K, 考虑的代数均为 K-代数. 如果 K-代数 A 有中心子代数 C, 则称满足 $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba), \forall a, b \in A$ 的 C-模同态 $\mathrm{tr} : A \to C$ 是**迹映射**. 经典的两种迹映射的构造都离不开矩阵代数上的经典迹. 下面简要回顾正则迹与约化迹的基本定义, 详尽细节可参见 [Rei03] 或本人的 PI 代数笔记. 如果 A 是有限生成投射 C-模, 取定 ${}_CA$ 作为投射模的对偶基 $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq A, \{x_1^*, ..., x_n^*\} \subseteq A^* = \mathrm{Hom}_C(A, C)$, 我们有迹映射

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{reg}} : A \to C, a \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k^*(ax_k),$$

可直接验证上述定义不依赖于对偶基的选取并且当 A 是有限生成自由 C-模时, 上述映射本质上就是矩阵代数的 (经典) 迹 (即将 $a \in A$ 映至左乘变换 ℓ_a 在给定 C-基下表示矩阵的迹). 当 A 是有限生成投射 C-模时, 将上述定义的迹映射 $\mathrm{tr}_{\mathrm{reg}} : A \to C$ 称为**正则迹**. 正则迹是矩阵代数上经典迹的自然推广. 人们能够从正则迹的表现中读取一些代数的基本信息. 例如对域 $\Bbbk$ 上有限维代数 A, 如果正则迹 $\mathrm{tr}_{\mathrm{reg}} : A \to \Bbbk$ 是非退化的, 那么 A 是有限维半单代数. 如果 A 是在中心子代数 C 上有限生成的素代数, 记 $S = C - \{0\}$, 那么 A_S 是域 $C_S = \mathrm{Frac}C$ 上有限维中心单代数 (因为这里 ${}_CA$ 是有限生成模, 所以对 C 的正则元集作局部化依然能得到

Posner 定理的结论), 任取中心单代数 A_S 的分裂域 $F \supseteq C_S$, 则存在 F-代数同构 $h : A_S \otimes_{C_S} F \to \mathrm{M}_n(F)$, 其中 $n^2 = \dim_{C_S} A_S$, 即 n 是 A 的 PI 次数. 记 $\mathrm{tr} : \mathrm{M}_n(F) \to F$ 是矩阵代数上经典迹映射, 考虑

$$A \longrightarrow A_S \longrightarrow A_S \otimes_{C_S} F \xrightarrow{h} \mathrm{M}_n(F) \xrightarrow{\mathrm{tr}} F,$$

根据中心单代数理论 (例如见 [Rei03, p.113, Theorem 9.3]), 上述映射序列的合成不依赖于分裂域 F 和 F-代数同构 h 的选取, 并且该映射序列的合成像集含于 C_S. 特别地, 当像集含于 C 时 (例如 C 是整闭整区), 那么可以将上述映射序列的合成视作 A 到 C 的映射, 记作 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}} : A \to C$, 称为 A 到 C 的**约化迹**. 依然设 A 是 C 上模有限素代数, 注意到 A_S 是有限生成自由 C_S-模, 所以可定义正则迹 $\mathrm{tr}_{\mathrm{reg}} : A_S \to C_S$, 考虑映射序列

$$A \longrightarrow A_S \xrightarrow{\mathrm{tr}_{\mathrm{reg}}} C_S$$

的合成, 记作 $\mathrm{tr}_{\mathrm{st}}$. 如果 $\mathrm{tr}_{\mathrm{st}}$ 的像集含于 C(例如 C 是整闭整区), 则称 $\mathrm{tr}_{\mathrm{st}}$ 是素模有限代数 A 到 C 的**标准迹** (这个术语来自 [BY18] 中对 $C = \mathcal{Z}(A)$ 的场景时的命名). 同样根据中心单代数理论 (例如见 [Rei03, p.115, Theorem 9.5]), 总有 $\mathrm{tr}_{\mathrm{st}} = n\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}$, 这里 n 是 A 的 PI 次数. 约化迹相较正则迹的优势是在正特征场景, 正则迹有可能是零映射, 但约化迹总是非零映射. 只有非零迹映射才能提供有意义的信息.

本章先讨论给定代数在交换代数上有限维表示的概念 ([定义1.1]) 与基本性质. 在 [引理1.3] 中我们会看到任何 K-代数 A 到标准函子 $\mathrm{M}_n(-) : K\textbf{-CAlg} \to K\textbf{-Alg}$ 的泛性 $(\mathscr{A}_n(A), \mathfrak{j}_A)$ 都存在. 并且一般线性群 $\mathrm{GL}_n(K)$ 在 $\mathscr{A}_n(A)$ 和 $\mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A))$ 上会有自然的群作用 (见 [引理1.7] 前的讨论) 使得 $\mathrm{Im}\mathfrak{j}_A \subseteq \mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A))^{\mathrm{GL}_n(K)}$.

随后介绍所有带有迹映射的代数以及“保持迹”的代数同态构成的范畴. 保持迹的代数同态是研究代数的有限维表示的自然产物. 例如当域 $\Bbbk$ 上代数 A 存在有限维表示 V 时 (一般地, 代数有可能不存在有限维表示, 例如特征零的域上的 Weyl 代数), 记 $\ell : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}V, a \mapsto \ell_a$, 其中 ℓ_a 是 a 在 V 上的左乘变换, 考虑

$$A \xrightarrow{\ell} \mathrm{End}_{\Bbbk}V \xrightarrow{\mathrm{tr}} \Bbbk$$

的合成 (记作 tr_V), 其中 $\mathrm{tr} : \mathrm{End}_{\Bbbk}V \to \Bbbk$ 是将自同态代数视作矩阵代数后的经典迹. 那么有交换图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad\ell\quad} & \mathrm{End}_{\Bbbk}V \\ {\scriptstyle \mathrm{tr}_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{tr}} \\ \Bbbk & \xrightarrow{\quad\ell_{\Bbbk}\quad} & \Bbbk \end{array}$$

因此 $\ell : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}V$ 便可视作保持迹的代数同态. 因为交换代数上的矩阵代数总有标准迹, 因此标准函子 $\mathrm{M}_n(-) : K\textbf{-CAlg} \to K\textbf{-Alg}$ 可视作交换代数范畴到带有迹的代数范畴的函子, 这时任何带有迹的代数到 $\mathrm{M}_n(-)$ 的泛性 $(\mathscr{B}_n(A), \mathfrak{i}_A)$ 依然存在 (见 [引理1.17]) 并且与不带迹的代数范畴一样 $\mathrm{GL}_n(K)$ 在 $\mathscr{B}_n(A)$ 与 $\mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))$ 上有自然的群作用满足 $\mathrm{Im}\mathfrak{i}_A \subseteq \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))^{\mathrm{GL}_n(K)}$.

1.1 有限维表示

我们知道域 $\Bbbk$ 上代数 A 在域 $\Bbbk$ 上的一个有限维表示本质上就是 A 到某个矩阵代数 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 的代数同态. 而有许多单位根处的量子代数会在某个中心子代数上是有限生成自由模. 例如对域 $\Bbbk$ 中的 ℓ 次本原单位根 $\varepsilon \in \Bbbk^{\times}$, ε 处的量子平面 $\mathcal{O}_{\varepsilon}(\Bbbk^2)$ 在 $\mathcal{Z}(\mathcal{O}_{\varepsilon}(\Bbbk^2)) = \Bbbk[x^{\ell}, y^{\ell}]$ 上是秩为 ℓ^2 的自由模. 因此人们也关心在 A 在 $\Bbbk$ 上的那些在某个中心子代数上是有限生成自由模的表示. 以下固定含幺交换环 K, 沿用 [DCPRR05] 中的术语, 我们在更一般的场景讨论 K-代数 (可能是零环) 在给定 K-交换代数 (可能是零环) 上的 (有限维) 表示.

Definition 1.1 (交换代数上的表示, [DCPRR05])**.** 设 A 是 K-代数, C 是 K-交换代数 (未必是 A 的子代数), n 是正整数. 称 A 到 $\mathrm{M}_n(C)$ 的 K-代数同态为 A 在 C 上的 n **维表示**.

Remark 1.2. 根据定义, A 在 C 上的所有 n 维表示构成的集合是 $\mathrm{Hom}_{K\text{-}\mathbf{Alg}}(A, \mathrm{M}_n(C))$.

任给 K-交换代数 C_1, C_2 以及交换代数同态 $\varphi : C_1 \to C_2$, 那么 φ 诱导矩阵代数间的 K-代数同态 $\mathrm{M}_n(\varphi) : \mathrm{M}_n(C_1) \to \mathrm{M}_n(C_2), (c_{ij})_{n\times n} \mapsto (\varphi(c_{ij}))_{n\times n}$. 若对每个 K-交换代数 C 记 $\mathrm{Hom}_{K\text{-}\mathbf{Alg}}(A, \mathrm{M}_n(C))$ 为 $\mathcal{R}_A^n(C)$ 并对代数同态 $\varphi : C_1 \to C_2$ 定义 $\mathcal{R}_A^n(\varphi) = \mathrm{M}_n(\varphi)_*$. 我们便得到从 K-交换代数范畴 K-$\mathbf{CAlg}$ 到集合范畴 $\mathbf{Set}$ 的函子 $\mathcal{R}_A^n(-) : K\text{-}\mathbf{CAlg} \to \mathbf{Set}$, 以下称为 A 的 n 维**表示函子**. 如果记 $\mathrm{M}_n(-) : K\text{-}\mathbf{CAlg} \to K\text{-}\mathbf{Alg}$ 是对交换代数取矩阵代数的标准函子 (不难看出该函子是忠实函子, 但不是满函子), 那么根据前面的定义不难看出 $\mathcal{R}_A^n(-) = \mathrm{Hom}_{K\text{-}\mathbf{Alg}}(A, \mathrm{M}_n(-)) = \mathrm{Hom}_{K\text{-}\mathbf{Alg}}(A, -)\mathrm{M}_n(-)$. 以下固定正整数 n 和 K-代数 A, 我们马上会在 [引理1.3] 中证明 $A \in \mathrm{ob}K\text{-}\mathbf{Alg}$ 到函子 $\mathrm{M}_n(-) : K\text{-}\mathbf{CAlg} \to K\text{-}\mathbf{Alg}$ 的泛性存在: 我们将构造某个 K-交换代数 $\mathscr{A}_n(A)$ 以及 K-代数同态 $\mathrm{j}_A : A \to \mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A))$ 使得对任何 K-交换代数 C 以及 K-代数同态 $\varphi : A \to \mathrm{M}_n(C)$, 存在唯一的 K-交换代数同态 $\tilde{\varphi} : \mathscr{A}_n(A) \to C$ 使得 $\varphi = \mathrm{M}_n(\tilde{\varphi})\mathrm{j}_A$, 即

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\mathrm{j}_A"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A)) \arrow[dl, dashed, "\mathrm{M}_n(\tilde{\varphi})"] \\ & \mathrm{M}_n(C) & \end{tikzcd}$$

交换. 特别地, 根据范畴论我们知道有自然同构 $\mathrm{Hom}_{K\text{-}\mathbf{CAlg}}(\mathscr{A}_n(A), -) \cong \mathrm{Hom}_{K\text{-}\mathbf{Alg}}(A, \mathrm{M}_n(-)) = \mathcal{R}_A^n(-)$. 特别地, n 维表示函子 $\mathcal{R}_A^n(-)$ 是可表函子, $\mathscr{A}_n(A)$ 在代数同构意义下由 A 和 n 唯一决定. 现在我们证明

Lemma 1.3 (A 到 $\mathrm{M}_n(-)$ 的泛性, [DCPRR05])**.** 代数 A 到函子 $\mathrm{M}_n(-) : K\text{-}\mathbf{CAlg} \to K\text{-}\mathbf{Alg}$ 的泛性存在.

Proof. 下面将构造 K-交换代数 $\mathscr{A}_n(A)$ 以及代数同态 $\mathrm{j}_A : A \to \mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A))$ 使得对任何 K-交换代数 C 以及 K-代数同态 $\varphi : A \to \mathrm{M}_n(C)$, 存在唯一的 K-交换代数同态 $\tilde{\varphi} : \mathscr{A}_n(A) \to C$ 使得 $\varphi = \mathrm{M}_n(\tilde{\varphi})\mathrm{j}_A$.

设 A 作为 K-代数可由集合 $\{a_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 生成. 则有标准 K-代数满同态 $\pi : K\langle\{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\}\rangle \to A, x_\lambda \mapsto a_\lambda$. 作 (交换) 多项式代数

$$R = K[\{t_{ij}^\lambda | \lambda \in \Lambda, 1 \leq i, j \leq n\}],$$

对每个 $\lambda \in \Lambda$, 记泛矩阵 $(t_{ij}^\lambda)_{n\times n}$ 为 T_λ. 那么有自然的 K-代数同态 $\mathrm{j} : K\langle\{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\}\rangle \to \mathrm{M}_n(R), x_\lambda \mapsto T_\lambda$. 考虑 $\mathrm{M}_n(R)$ 中由 $\mathrm{j}(\mathrm{Ker}\pi)$ 生成的双边理想 (暂时记作 I, 这是临时记号), 那么存在 R 中唯一的理想 J 使得 $I = \mathrm{M}_n(J)$. 考虑 K-交换代数 R/J(这就是所要的 $\mathscr{A}_n(A)$, 可能是零环). 考虑下述代数同态序列的合成:

$$A \xrightarrow{\cong} K\langle\{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\}\rangle / \mathrm{Ker}\pi \xrightarrow{\tilde{\mathrm{j}}} \mathrm{M}_n(R)/I = \mathrm{M}_n(R)/\mathrm{M}_n(J) \xrightarrow{\cong} \mathrm{M}_n(R/J),$$

记作上述合成映射为 $\mathrm{j}_A : A \to \mathrm{M}_n(R/J)$. 现在记 $p : R \to R/J$ 是标准投射, 那么有交换图

$$\begin{tikzcd} K\langle\{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\}\rangle \arrow[r, "\mathrm{j}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{M}_n(R) \arrow[d, "\mathrm{M}_n(p)"] \\ A \arrow[r, "\mathrm{j}_A"] & \mathrm{M}_n(R/J). \end{tikzcd}$$

现在我们需要验证对任何交换代数 C 以及 K-代数同态 $\varphi : A \to \mathrm{M}_n(C)$, 存在唯一的 K-交换代数同态 $\tilde{\varphi} : \mathscr{A}_n(A) \to C$ 使得 $\varphi = \mathrm{M}_n(\tilde{\varphi})\mathrm{j}_A$. 对每个 $\lambda \in \Lambda$, 设 $\varphi(a_\lambda) = (c_{ij}^\lambda)_{n\times n} \in \mathrm{M}_n(C)$. 那么有代数同态

$$\overline{\varphi} : R = K[\{t_{ij}^\lambda | \lambda \in \Lambda, 1 \leq i, j \leq n\}] \to C, t_{ij}^\lambda \mapsto c_{ij}^\lambda,$$

注意这时下图交换:

$$\begin{tikzcd}
K\langle\{x_\lambda|\lambda\in\Lambda\}\rangle \arrow[r, "\mathrm{j}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{M}_n(R) \arrow[d, "\mathrm{M}_n(\overline{\varphi})"] \\
A \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{M}_n(C)
\end{tikzcd}$$

于是 $\mathrm{M}_n(\overline{\varphi})\mathrm{j}(\mathrm{Ker}\pi) = 0$, 进而 $\mathrm{M}_n(\overline{\varphi})$ 作用 $\mathrm{M}_n(R)$ 的理想 $I = \mathrm{M}_n(J)$ 是零. 特别地, $\overline{\varphi}(J) = 0$. 因此 $\overline{\varphi}$ 诱导代数同态 $\tilde{\varphi} : R/J \to C$ 使得 $\tilde{\varphi}p = \overline{\varphi}$. 于是我们得到下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
K\langle\{x_\lambda|\lambda\in\Lambda\}\rangle \arrow[r, "\mathrm{j}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{M}_n(R) \arrow[d, "\mathrm{M}_n(p)"] \arrow[dr, bend left, "\mathrm{M}_n(\overline{\varphi})"] & \\
A \arrow[r, "\mathrm{j}_A"] \arrow[rr, "\varphi"'] & \mathrm{M}_n(R/J) \arrow[r, dashed, "\mathrm{M}_n(\tilde{\varphi})"] & \mathrm{M}_n(C)
\end{tikzcd}$$

注意到 $\{\mathrm{j}_A(a_\lambda)|\lambda \in \Lambda\} \cup \mathrm{M}_n(K\bar{1})$ 是 $\mathrm{M}_n(R/J)$ 作为 K-代数的生成元集, 并且任何 R/J 到 C 的代数同态 ψ 满足 $\mathrm{M}_n(\psi)$ 固定 $\mathrm{M}_n(K\bar{1})$ 不动. 所以如果还有 K-代数同态 $\varphi' : R/J \to C$ 使得 $\mathrm{M}_n(\varphi')\mathrm{j}_A = \varphi$, 那么 $\mathrm{M}_n(\varphi') = \mathrm{M}_n(\tilde{\varphi})$. 这说明 $\varphi' = \tilde{\varphi}$, 故 $(R/J, \mathrm{j}_A)$ 是 A 到 $\mathrm{M}_n(-)$ 的泛性质. □

Remark 1.4. 我们将证明过程中构造的交换代数 R/J 记作 $\mathscr{A}_n(A)$. 并固定记号 $\mathrm{j}_A : A \to \mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A))$ 表示证明过程中构造的代数同态. 因为 $(\mathscr{A}_n(A), \mathrm{j}_A)$ 是 A 到 $\mathrm{M}_n(-)$ 的泛性, 所以称 j_A 为**泛 n 维表示**. 如果 B 是 K-代数, 那么同样有 B 到 $\mathrm{M}_n(-)$ 的泛性 $(\mathscr{A}_n(B), \mathrm{j}_B)$(承认全局选择公理后我们可以对每个 K-代数 B 都取定泛性 $(\mathscr{A}_n(B), \mathrm{j}_B)$), 那么对任何 K-代数同态 $f : A \to B$, 对代数同态 $\mathrm{j}_B f : A \to \mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(B))$ 应用泛性质知存在唯一的 K-代数同态 $\mathscr{A}_n(f) : \mathscr{A}_n(A) \to \mathscr{A}_n(B)$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathrm{j}_A"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A)) \arrow[d, "\mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(f))"] \\
B \arrow[r, "\mathrm{j}_B"] & \mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(B))
\end{tikzcd}$$

所以我们得到了函子 $\mathscr{A}_n(-) : K\text{-}\mathbf{Alg} \to K\text{-}\mathbf{CAlg}$. 根据范畴论, 我们知道 $\mathscr{A}_n(-)$ 是 $\mathrm{M}_n(-) : K\text{-}\mathbf{CAlg} \to K\text{-}\mathbf{Alg}$ 的左伴随函子. 对每个固定的交换代数 C 和代数 A, 如果定义

$$\eta_{A,C} : \mathrm{Hom}_{K\text{-}\mathbf{CAlg}}(\mathscr{A}_n(A), C) \to \mathrm{Hom}_{K\text{-}\mathbf{Alg}}(A, \mathrm{M}_n(C)), \varphi \mapsto \mathrm{M}_n(\varphi)\mathrm{j}_A,$$

则 $\eta : C \mapsto \eta_{A,C}$ 是 $\mathrm{M}_n(-)$ 与 $\mathscr{A}_n(-)$ 间的联络. 由此可见 $\mathscr{A}_n(A)$ 在研究 A 的有限维表示中扮演重要角色.

Remark 1.5. 根据证明过程, 如果 A 是仿射 K-代数, 那么 $\mathscr{A}_n(A)$ 也是仿射的.

Remark 1.6. 证明过程中提到 $\mathscr{A}_n(A)$ 可能是零环, 当 $A \neq 0$ 时, $\mathcal{A}_n(A)=0$ 等价于说 A 在所有非零的 K-交换代数上都不存在 n 维表示 (例如取 K 是特征为零的域, A 是 m 阶 Weyl 代数, 那么对所有的非零交换代数 C 都有 $\mathrm{Hom}_{K\text{-}\mathbf{Alg}}(A, \mathrm{M}_n(C)) = \varnothing$, 故 $\mathscr{A}_n(A)$ 到所有的非零交换代数都不存在代数同态, 这迫使 $\mathscr{A}_n(A)=0$).

给定 K-代数 A, 根据泛 n 维表示 $\mathrm{j}_A : A \to \mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A))$ 的泛性质, 不难看出 A 可嵌入某个交换 K-代数上的矩阵代数当且仅当存在正整数 n 使得 $\mathrm{j}_A : A \to \mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A))$ 是单射. 特别地, 当 $K=\mathbb{Z}$ 时, 含幺环 A 关于交换环上矩阵代数的嵌入问题便转化为 j_A 是否是单射.

1.2 泛 n 维表示上的 $\mathbf{GL}_n(K)$-作用

本节设 K 是域. 有限维线性空间在不同基下表示矩阵具有相似关系, 故可对 K-代数的 n 维表示引入类似等价关系. 事实上, 如果 A 是 K-代数, $\rho_1 : A \to \mathrm{End}_K V_1, \rho_2 : A \to \mathrm{End}_K V_2$ 是 A 在 K 上的有限维表示, 由 Skolem-Noether 定理知 ρ_1 与 ρ_2 的等价当且仅当存在 K-代数同构 $\varphi : \mathrm{End}_K V_1 \to \mathrm{End}_K V_2$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[dr, "\rho_2"'] & \mathrm{End}_K V_1 \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & \mathrm{End}_K V_2 \end{tikzcd}$$

现固定 K-交换代数 C 以及 $g \in \mathrm{GL}_n(K)$, 总有内自同构 $c_g : \mathrm{M}_n(C) \to \mathrm{M}_n(C), X \mapsto g^{-1}Xg$, 这是 C-代数自同构. 以下固定 K-代数 A, 沿用之前的记号 (见 [注记1.4]), $\mathrm{j}_A : A \to \mathscr{A}_n(A)$ 是 A 的泛 n 维表示.

对任给 $g \in \mathrm{GL}_n(K)$, 由泛 n 维表示的泛性质, 存在唯一的 K-代数同态 $\overline{g} : \mathscr{A}_n(A) \to \mathscr{A}_n(A)$ 使得

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{j}_A"] \arrow[d, "\mathrm{j}_A"'] & \mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A)) \arrow[d, "\mathrm{M}_n(\overline{g})"] \\ \mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A)) \arrow[r, "c_g"] & \mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A)) \end{tikzcd}$$

交换. 根据上述内自同构的写法, 对任何 $g, h \in \mathrm{GL}_n(K)$ 都有 $c_{gh} = c_h c_g$, 所以

$$\mathrm{M}_n(\overline{gh})\mathrm{j}_A = c_{gh}\mathrm{j}_A = c_h c_g \mathrm{j}_A = c_h \mathrm{M}_n(\overline{g})\mathrm{j}_A = \mathrm{M}_n(\overline{g}) c_h \mathrm{j}_A = \mathrm{M}_n(\overline{g})\mathrm{M}_n(\overline{h})\mathrm{j}_A.$$

上式中 $\mathrm{M}_n(\overline{g})$ 与 c_h 可交换的原因是矩阵 h 的元素都在 K 中, 所以 $\mathrm{M}_n(\overline{g})$ 作用矩阵 h 保持 h 不动. 于是知 $\mathrm{M}_n(\overline{gh}) = \mathrm{M}_n(\overline{g})\mathrm{M}_n(\overline{h})$. 这说明 $\overline{gh} = \overline{g} \circ \overline{h}$. 因此我们得到 $\mathrm{GL}_n(K)$ 在 $\mathscr{A}_n(A)$ 上的群作用

$$\mathrm{GL}_n(K) \times \mathscr{A}_n(A) \to \mathscr{A}_n(A), (g, a) \mapsto ga := \overline{g}(a).$$

特别地, 对每个 $g \in \mathrm{GL}_n(K)$, $\overline{g}$ 是 $\mathscr{A}_n(A)$ 上 K-代数自同构. 再指出 $\mathrm{GL}_n(K)$ 在 $\mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A))$ 上也有群作用

$$\mathrm{GL}_n(K) \times \mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A)) \to \mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A)), (g, X) \mapsto gX := c_g^{-1}\mathrm{M}_n(\overline{g})(X).$$

因为 $c_g \mathrm{j}_A = \mathrm{M}_n(\overline{g})\mathrm{j}_A$, 所以 $\mathrm{j}_A = c_g^{-1}\mathrm{M}_n(\overline{g})\mathrm{j}_A$. 这一观察说明

Lemma 1.7. *泛 n 维表示 $\mathrm{j}_A : A \to \mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A))$ 可视作 A 到 $\mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A))^{\mathrm{GL}_n(K)}$ 的代数同态.*

Example 1.8 (自由代数场景, [DCPRR05])**.** 为了将仿射空间上多项式函数环与多项式代数视作等同, 我们设 K 是无限域. 下面沿用 [引理1.3] 证明过程中的记号. 简单起见, 这里仅讨论 $A = K\langle x_1, ..., x_m\rangle$ 是有限个变量的自由代数的情形. 根据 [引理1.3] 中 $\mathscr{A}_n(A)$ 的构造过程, 这时 $R = K[\{t^k_{ij} | 1 \leq k \leq m, 1 \leq i, j \leq n\}]$ 是 mn^2 元多项式代数, 它可视作仿射簇 $\mathrm{M}_n(K)^m \cong K^{mn^2}$ 上的坐标环 $\mathcal{O}(\mathrm{M}_n(K)^m)$. 这时 [引理1.3] 证明过程中定义泛 n 维表示 j_A 恰好就是 $\mathrm{j} : K\langle x_1, ..., x_m\rangle(= A) \to \mathrm{M}_n(R), x_k \mapsto T_k = (t^k_{ij})_{n\times n}$(标准投射 $\pi : K\langle x_1, ..., x_m\rangle \to A$ 就是恒等映射) 并且 $\mathscr{A}_n(A) = R$. 回忆 K-仿射簇 $V \subseteq K^n, W \subseteq K^m$ 间的映射 $\psi : V \to W$ 被称为**多项式映射**, 如果存在多项式 $f_1, ..., f_m \in K[t_1, ..., t_n]$ 使得 $\psi(p) = (f_1(p), f_2(p), ..., f_m(p)), \forall p \in V$. 于是 K-代数同构

$$\xi : \mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A)) = \mathrm{M}_n(R) \to \{\mathrm{M}_n(K)^m\text{到}\mathrm{M}_n(K)\text{的多项式映射}\}$$
$$(f_{ij}(t^1_{11}, ..., t^1_{nn}, ..., t^m_{11}, ..., t^m_{nn}))_{n\times n} \mapsto (((k^1_{ij})_{n\times n}, ..., (k^m_{ij})_{n\times n}) \mapsto (f_{ij}(k^1_{11}, ..., k^1_{nn}, ..., k^m_{11}, ..., k^m_{nn}))_{n\times n})$$

使得我们可以将 $\mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A))$ 中的元素视作 $\mathrm{M}_n(K)^m$ 到 $\mathrm{M}_n(K)$ 的多项式映射 (易见 ξ 将 $\mathrm{M}_n(K)$ 中每个矩阵映至常值函数). 在这个等同下, 泛矩阵 $\mathrm{j}_A(x_k) = T_k = (t^k_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A))$ 对应的就是矩阵 m 元组全体在第 k 个分量上的标准投射 $p_k : \mathrm{M}_n(K)^m \to \mathrm{M}_n(K), (X_1, ..., X_m) \mapsto X_k$. 为了更直观地看到 $\mathrm{M}_n(R)$ 中矩阵对应 $\mathrm{M}_n(K)^m$ 上取值在 $\mathrm{M}_n(K)$ 中的多项式映射, 将 $\mathrm{M}_n(R)$ 中元素写成下述形式:

$$\begin{pmatrix} c_{11}((t^1_{ij})_{n\times n}, ..., (t^m_{ij})_{n\times n}) & c_{11}((t^1_{ij})_{n\times n}, ..., (t^m_{ij})_{n\times n}) & \cdots & c_{1n}((t^1_{ij})_{n\times n}, ..., (t^m_{ij})_{n\times n}) \\ c_{21}((t^1_{ij})_{n\times n}, ..., (t^m_{ij})_{n\times n}) & c_{22}((t^1_{ij})_{n\times n}, ..., (t^m_{ij})_{n\times n}) & \cdots & c_{2n}((t^1_{ij})_{n\times n}, ..., (t^m_{ij})_{n\times n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1}((t^1_{ij})_{n\times n}, ..., (t^m_{ij})_{n\times n}) & c_{2n}((t^1_{ij})_{n\times n}, ..., (t^m_{ij})_{n\times n}) & \cdots & c_{nn}((t^1_{ij})_{n\times n}, ..., (t^m_{ij})_{n\times n}) \end{pmatrix}$$

这可将上述矩阵视作以 $t^1_{11}, ..., t^1_{nn}, ..., t^m_{11}, ..., t^m_{nn}$ 为自变量的矩阵值函数, 其中每个 $c_{ij} \in R$. 下面我们说明之前定义的 $\mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A))$(也就是这里的 $\mathrm{M}_n(R)$) 上的 $\mathrm{GL}_n(K)$-作用满足对任何 $M((t^1_{ij})_{n\times n}, ..., (t^m_{ij})_{n\times n}) \in \mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A))$ 有

$$g \cdot M((t^1_{ij})_{n\times n}, ..., (t^m_{ij})_{n\times n}) = gM(g^{-1}(t^1_{ij})_{n\times n}g, ..., g^{-1}(t^m_{ij})_{n\times n}g)g^{-1}, \forall g \in \mathrm{GL}_n(K).$$

其中 $M(g^{-1}(t^1_{ij})_{n\times n}g, ..., g^{-1}(t^m_{ij})_{n\times n}g)$ 表示将自变量全体 $(t^1_{ij})_{n\times n}, ..., (t^m_{ij})_{n\times n}$ 以 $g^{-1}(t^1_{ij})_{n\times n}g, ..., g^{-1}(t^m_{ij})_{n\times n}g$ 代入得到的 $\mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A))$ 中元素 (通过 ξ 可将其视作仿射簇 $\mathrm{M}_n(K)^m$ 到 $\mathrm{M}_n(K)$ 的多项式映射). 易见 $\mathrm{M}_n(R)$ 作为 K-代数可由 $E_{11}, ..., E_{nn}, T_1, ..., T_m$ 生成, 所以对任何 $M((t^1_{ij})_{n\times n}, ..., (t^m_{ij})_{n\times n}) \in \mathrm{M}_n(R)$, 存在 (非交换) 多项式 $F \in K\langle x_1, ..., x_{n^2+m}\rangle$ 使得 $M((t^1_{ij})_{n\times n}, ..., (t^m_{ij})_{n\times n}) = F(E_{11}, ..., E_{nn}, T_1, ..., T_m)$. 根据定义

$$g \cdot M((t^1_{ij})_{n\times n}, ..., (t^m_{ij})_{n\times n}) = c_g^{-1}\mathrm{M}_n(\overline{g})M((t^1_{ij})_{n\times n}, ..., (t^m_{ij})_{n\times n}).$$

因为 $\mathrm{M}_n(\overline{g})$ 作用每个泛矩阵 T_k 得到 $g^{-1}T_kg$ 而作用 $\mathrm{M}_n(K)$ 中元素固定不动, 所以

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_n(\overline{g})(M((t^1_{ij})_{n\times n}, ..., (t^m_{ij})_{n\times n})) =& \mathrm{M}_n(\overline{g})(F(E_{11}, ..., E_{nn}, T_1, ..., T_m)) \\ =& F(E_{11}, ..., E_{nn}, g^{-1}T_1g, ..., g^{-1}T_mg) \\ =& F(E_{11}, ..., E_{nn}, g^{-1}(t^1_{ij})_{n\times n}g, ..., g^{-1}(t^m_{ij})_{n\times n}g) \\ =& M(g^{-1}(t^1_{ij})_{n\times n}g, ..., g^{-1}(t^m_{ij})_{n\times n}g). \end{aligned}$$

再用 c_g^{-1} 作用最后一个表达式得到 $g \cdot M((t^1_{ij})_{n\times n}, ..., (t^m_{ij})_{n\times n}) = gM(g^{-1}(t^1_{ij})_{n\times n}g, ..., g^{-1}(t^m_{ij})_{n\times n}g)g^{-1}$. 总结一下, 在 $A = K\langle x_1, ..., x_m\rangle$ 的场景下, $\mathscr{A}_n(A) = K[(t^1_{ij})_{n\times n}, ..., (t^m_{ij})_{n\times n}] = \mathcal{O}(\mathrm{M}_n(K)^m)$. 泛 n 维表示 j_A 将

每个自由变量 x_k 映至泛矩阵 $T_k=(t^k_{ij})_{n\times n}$. 之前定义的 $\mathrm{GL}_n(K)$ 在 $\mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A))$(也就是仿射簇 $\mathrm{M}_n(K)^m$ 到 $\mathrm{M}_n(K)$ 的正则映射全体) 上的群作用满足对任何正则映射 $\psi:\mathrm{M}_n(K)^m\to \mathrm{M}_n(K)$, 有

$$g\cdot\psi(T_1,...,T_m)=g\psi(g^{-1}T_1g,...,g^{-1}T_mg)g^{-1},\forall g\in \mathrm{GL}_n(K).$$

不难看到在每个泛矩阵 T_k 在 $\mathrm{GL}_n(K)$ 中元素的作用下不动. 因为上述 $\mathrm{GL}_n(K)$ 在正则函数上的群作用已经被显式地写出, 所以我们很容易看到不动环 $\mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A))^{\mathrm{GL}_n(K)}$ 就是保持共轭变换的正则映射全体:

$$\{\psi:\mathrm{M}_n(K)^m\to \mathrm{M}_n(K)|\psi\text{是正则映射且}\psi(g^{-1}T_1g,...,g^{-1}T_mg)=g^{-1}\psi(T_1,...,T_m)g,\forall g\in \mathrm{GL}_n(K)\}.$$

如果将 $\mathrm{GL}_n(K)$ 按共轭作用 $g\cdot\psi(T_1,...,T_m)=\psi(gT_1g^{-1},...,gT_mg^{-1})$ 作用于 $\mathrm{M}_n(K)^m$ 到 $\mathrm{M}_n(K)$ 的正则映射全体, 那么 $\mathrm{M}_n(\mathscr{A}_n(A))^{\mathrm{GL}_n(K)}$ 也就是在共轭作用下的不动点集 (也被称为 **$\mathbf{GL}_n(K)$-等变映射环**).

Remark 1.9. 如果将经典仿射空间 K^m 中每个点的分量视作 1 阶矩阵, 那么可以将 $\mathrm{M}_n(K)^m$ 视作坐标分量是矩阵的“非交换仿射空间”. Procesi 指出, 上述例子启发我们可以发展某种非交换仿射代数几何.

1.3 带有迹的代数

本节我们讨论域 K 上所有带迹的代数构成的范畴, 这里采用的定义与 [DCPRR05] 中有一些区别.

Definition 1.10. 设 A 是 K-代数, C 是 A 的中心子代数, $\mathrm{tr}:A\to C$ 是迹映射, 称 (A,C,tr) 是**带迹的代数**.

Remark 1.11. 在 [DCPRR05] 中, A 上迹映射 tr 被定义为满足下述条件的 K-模同态 $\mathrm{tr}:A\to A$: (1)$\mathrm{tr}(A)\subseteq \mathscr{Z}(A)$; (2) $\mathrm{tr}(ab)=\mathrm{tr}(ba),\forall a,b\in A$; (3) $\mathrm{tr}(\mathrm{tr}(a)b)=\mathrm{tr}(a)\mathrm{tr}(b),\forall a,b\in A$. 我们讨论的是该定义的特殊情况.

如果 (A_1,C_1,tr_1) 与 (A_2,C_2,tr_2) 均为带有迹的代数, 称 K-代数同态 $\varphi:A_1\to A_2$ 是**保持迹的**, 如果 $\varphi(C_1)\subseteq C_2$ 并且下图交换:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{tr}_1"'] & A_2 \arrow[d, "\mathrm{tr}_2"] \\ C_1 \arrow[r, "\varphi|_{C_1}"] & C_2. \end{tikzcd}$$

所有 K 上带有迹的代数和保迹的代数同态构成的范畴称为**带有迹的代数范畴**, 记作 $\mathcal{T}$.

Lemma 1.12. 设 $\varphi:(A_1,C_1,\mathrm{tr}_1)\to(A_2,C_2,\mathrm{tr}_2)$ 是 $\mathcal{T}$ 中态射. 则 φ 是 monic 态当且仅当 φ 是单射.

Proof. 只需证明必要性. 设 φ 是 monic 态, 作 $A_1\oplus A_1$ 的子代数 $B=\{(a,b)\in A_1\oplus A_1|\varphi(a)=\varphi(b)\}$, 那么 $C=C_1\oplus C_1$ 是 B 的中心子代数并有迹映射 $\mathrm{tr}_B:B\to C,(a,b)\mapsto(\mathrm{tr}_1(a),\mathrm{tr}_1(b))$. 现在设 $\pi_1:B\to A_1,(a,b)\mapsto a,\pi_2:B\to A_1,(a,b)\mapsto b$ 是标准投射, 那么有交换图

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[d, "\mathrm{tr}_1"'] & B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\mathrm{tr}_B"] & A_1 \arrow[d, "\mathrm{tr}_1"] \\ C_1 & C \arrow[l, "\pi_1|_C"'] \arrow[r, "\pi_2|_C"] & C_1. \end{tikzcd}$$

这说明 $\pi_1,\pi_2:B\to A_1$ 都是保持迹的代数同态. 注意到这时 $\varphi\pi_1=\varphi\pi_2$, 所以由 φ 是 monic 态得到 $\pi_1=\pi_2$. 特别地, 如果 $a,b\in A_1$ 满足 $\varphi(a)=\varphi(b)$, 那么 $a=b$. $\square$

Example 1.13. 设 A 是 K-代数, 在中心子代数 C 上是秩为 n 的自由模. 记 $\mathrm{tr}: \mathrm{M}_n(C) \to C$ 是矩阵代数的经典迹映射, 那么由 A 中元素左乘变换诱导的标准嵌入 $\ell: (A, C, \mathrm{tr}_{\mathrm{reg}}) \to \mathrm{End}_C A \cong (\mathrm{M}_n(C), C, \mathrm{tr})$ 保持迹.

下面我们说明范畴 $\mathcal{T}$ 到 **Set** 的忘却函子存在左伴随函子. 记 $F: \mathcal{T} \to$ **Set** 是忘却函子, 只需说明任何集合 $\mathfrak{X}$ 到 F 的泛性质存在即可. 在自由代数 $K\langle\mathfrak{X}\rangle$ 在 $\mathfrak{X}$ 上所有字 (包括空字) 构成的集合 $\mathcal{W}$(或者说 $\mathfrak{X}$ 生成的自由幺半群) 上定义二元关系 $x_1x_2\cdots x_n \sim y_1y_2\cdots y_m$, 如果 $n = m$ 且存在正整数 $1 \le k \le n$ 使得 $x_1\cdots x_n = y_ky_{k+1}\cdots y_ny_1\cdots y_{k-1}$(即这两个字相差某个“平移”). 空字 1 只和自身有该二元关系. 不难看出 $\sim$ 是 $\mathcal{W}$ 上的等价关系, 将 $\mathcal{W}$ 关于 $\sim$ 的商集记作 $\mathfrak{M}$, 考虑 $K\langle\mathfrak{X}\rangle$ 上多项式代数

$$G(\mathfrak{X}) = (K\langle\mathfrak{X}\rangle)[\{t_m | m \in \mathfrak{M}\}].$$

那么 $T = K[\{t_m | m \in \mathfrak{M}\}]$ 是 $G(\mathfrak{X})$ 的中心子代数并且 $G(\mathfrak{X})$ 是以 $\mathcal{W}$ 为基的自由 T-模. 定义 $\mathrm{tr}: G(\mathfrak{X}) \to T$ 是将每个 $w \in \mathcal{W}$ 映至 $[w] \in \mathfrak{M}$ 所对应的未定元 $t_{[w]}$ 诱导的 C-模同态. 那么根据 $\sim$ 的定义知 $\mathrm{tr}: G(\mathfrak{X}) \to T$ 是迹映射. 因此 $(G(\mathfrak{X}), T, \mathrm{tr}) \in \mathrm{ob}\mathcal{T}$. 记 $\iota: \mathfrak{X} \to G(\mathfrak{X})$ 是标准嵌入, 下证对任何 $(A, C, \tau) \in \mathrm{ob}\mathcal{T}$ 以及映射 $\eta: \mathfrak{X} \to A$, 存在唯一的保迹代数同态 $\overline{\eta}: G(\mathfrak{X}) \to A$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\eta"'] & & G(\mathfrak{X}) \arrow[dl, dashed, "\overline{\eta}"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

记 $\mathfrak{X} = \{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\}, \hat{\eta}: K\langle\mathfrak{X}\rangle \to A, x_\lambda \mapsto \eta(x_\lambda)$, 不难看出 $G(\mathfrak{X})$ 是以 $\{wt_{m_1}\cdots t_{m_s} | w \in \mathcal{W}, s \in \mathbb{N}, m_1, ..., m_s \in \mathfrak{M}\}$ 为基的自由 K-模. 我们定义 $\overline{\eta}: G(\mathfrak{X}) \to A$ 为将每个 $wt_{m_1}\cdots t_{m_s}$ 映至 $\hat{\eta}(w)\tau(\hat{\eta}(m_1))\cdots\tau(\hat{\eta}(m_s))$ 的 K-模同态 (由迹映射以及 $\sim$ 的定义不难看出 $\overline{\eta}$ 定义合理), 容易验证 $\overline{\eta}$ 是 K-代数同态并且 $\overline{\eta}\iota = \eta$.

现在说明代数同态 $\overline{\eta}$ 保持迹. 首先不难看到 $\overline{\eta}(T) \subseteq C$. 对每个形如 $wt_{m_1}\cdots t_{m_s}$ 的元素, 我们有

$$\overline{\eta}\mathrm{tr}(wt_{m_1}\cdots t_{m_s}) = \overline{\eta}(t_{[w]}t_{m_1}\cdots t_{m_s}) = \tau(\hat{\eta}(w))\tau(\hat{\eta}(m_1))\cdots\tau(\hat{\eta}(m_s)) = \tau\overline{\eta}(wt_{m_1}\cdots t_{m_s}).$$

至此我们得到了下图的交换性, 说明了 $\overline{\eta}$ 是满足 $\overline{\eta}\iota = \eta$ 的保迹代数同态.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\eta"'] & & G(\mathfrak{X}) \arrow[dl, "\overline{\eta}"] \arrow[dr, "\mathrm{tr}"] & \\
& A \arrow[dr, "\tau"] & & T \arrow[dl, "\overline{\eta}|_T"] \\
& & C &
\end{tikzcd}$$

最后说明 $\overline{\eta}$ 的唯一性. 根据 $G(\mathfrak{X})$ 的构造, 它作为 K-代数可由 $\{\mathrm{tr}(w), w | w \in \mathcal{W}\}$ 生成. 如果还有保迹的代数同态 $\tilde{\eta}: G(\mathfrak{X}) \to A$ 满足 $\tilde{\eta}\iota = \eta$, 那么 $\tilde{\eta}(w) = \overline{\eta}(w), \forall w \in \mathcal{W}$. 于是 $\tilde{\eta}(\mathrm{tr}(w)) = \tau\tilde{\eta}(w) = \tau\overline{\eta}(w) = \overline{\eta}(\mathrm{tr}(w))$. 所以 $\overline{\eta} = \tilde{\eta}$. 于是我们可自然地定义 $\mathcal{T}$ 到 **Set** 的忘却函子的左伴随函子 G. 特别地, 对任何集合 $\mathfrak{X}$, $\mathcal{T}$ 中存在 $\mathfrak{X}$ 上的自由对象. 当考虑带迹的代数时, [定义1.1] 也需加上保迹的要求.

Definition 1.14 (带迹代数在交换代数上的表示, [DCPRR05])**.** 设 $(A, C, \mathrm{tr}) \in \mathrm{ob}\mathcal{T}$, n 是正整数, B 是 K-交换代数, 并将矩阵代数 $\mathrm{M}_n(B)$ 赋予经典迹成为 $\mathcal{T}$ 中对象. 称 A 到 $\mathrm{M}_n(B)$ 的保迹代数同态为 n **维保迹表示**.

Remark 1.15. 根据带迹的代数的定义, C 是 A 的中心子代数, 故由 $\mathcal{Z}(\mathrm{M}_n(B)) = B$(将 B 与 BI_n 视作等同) 知 C 在任何 A 到 $\mathrm{M}_n(B)$ 的代数同态下的像总在 B 中.

Remark 1.16. 固定正整数 n, 依然有函子 $\mathrm{M}_n(-) : K\textbf{-CAlg} \to \mathcal{T}$(交换代数上的矩阵代数赋予经典迹).

任何集合 $\mathfrak{X}$ 在 $\mathcal{T}$ 中都有 $\mathfrak{X}$ 上自由对象使我们也有"带迹版本"的 [引理1.3]:

Lemma 1.17 ([DCPRR05])**.** 任何 $(A, C, \tau) \in \mathrm{ob}\mathcal{T}$ 到 $\mathrm{M}_n(-) : K\textbf{-CAlg} \to \mathcal{T}$ 的泛性存在.

Proof. 虽然证明方法和 [引理1.3] 基本一致, 但之后需要固定相关记号与术语, 所以这里仍给出证明概要. 下面需要构造带迹的 K-交换代数 $\mathscr{B}_n(A)$ 以及保迹的代数同态 $\mathfrak{i}_A : A \to \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))$ 使得对任何交换代数 B 和保迹代数同态 $\varphi : A \to \mathrm{M}_n(B)$, 存在唯一的交换代数同态 $\tilde{\varphi} : \mathscr{B}_n(A) \to B$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathfrak{i}_A"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A)) \arrow[d, dashed, "\mathrm{M}_n(\tilde{\varphi})"] \\ & \mathrm{M}_n(B) \end{tikzcd}$$

设 A 作为 K-代数可由集合 $\{a_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 生成. 记 $\mathfrak{X} = \{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, 考虑 $\mathcal{T}$ 中 $\mathfrak{X}$ 上自由对象 $(G(\mathfrak{X}), T, \mathrm{tr})$, 那么对映射 $\pi' : \mathfrak{X} \to A, x_\lambda \mapsto a_\lambda$, 存在唯一的保迹 (满) 代数同态 $\pi : G(\mathfrak{X}) \to A$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & G(\mathfrak{X}) \arrow[dl, dashed, "\pi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

命 $R = K[\{t_{ij}^\lambda | \lambda \in \Lambda, 1 \le i, j \le n\}]$, 对每个 $\lambda \in \Lambda$, 记泛矩阵 $(t_{ij}^\lambda)_{n\times n}$ 为 T_λ. 那么有保迹 K-代数同态 $\mathfrak{i} : G(\mathfrak{X}) \to \mathrm{M}_n(R), x_\lambda \mapsto T_\lambda$. 考虑 $\mathrm{M}_n(R)$ 中由 $\mathfrak{i}(\mathrm{Ker}\pi)$ 生成的理想 I, 则有 R 的理想 J 使 $I = \mathrm{M}_n(J)$. 考虑 K-交换代数 R/J(这就是所要的 $\mathscr{B}_n(A)$). 考虑下述代数同态序列的合成:

$$A \xrightarrow{\cong} G(\mathfrak{X})/\mathrm{Ker}\pi \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{i}}} \mathrm{M}_n(R)/I = \mathrm{M}_n(R)/\mathrm{M}_n(J) \xrightarrow{\cong} \mathrm{M}_n(R/J),$$

记作上述合成映射为 $\mathfrak{i}_A : A \to \mathrm{M}_n(R/J)$, 可直接验证这是保迹代数同态. 记 $p : R \to R/J$ 是标准投射, 则

$$\begin{tikzcd} G(\mathfrak{X}) \arrow[r, "\mathfrak{i}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{M}_n(R) \arrow[d, "\mathrm{M}_n(p)"] \\ A \arrow[r, "\mathfrak{i}_A"] & \mathrm{M}_n(R/J) \end{tikzcd}$$

交换. 对任何交换代数 B 与保迹代数同态 $\varphi : A \to \mathrm{M}_n(B)$, 记 $\varphi(a_\lambda) = (b_{ij}^\lambda)_{n\times n}$ 命 $\overline{\varphi} : R \to B, t_{ij}^\lambda \mapsto b_{ij}^\lambda$, 那么有保迹代数同态 $\mathrm{M}_n(\overline{\varphi}) : \mathrm{M}_n(R) \to \mathrm{M}_n(B)$. 注意到 $\mathrm{M}_n(\overline{\varphi})$ 作用 I 是零, 故 $\overline{\varphi}(J) = 0$, 于是 $\overline{\varphi}$ 诱导 R/J 到 B 的代数同态 $\tilde{\varphi}$ 满足 $\varphi = \mathrm{M}_n(\tilde{\varphi})\mathfrak{i}_A$. $\tilde{\varphi}$ 的唯一性由 $\mathrm{M}_n(R/J)$ 作为 K-代数可由 $\{\mathfrak{i}_A(a_\lambda) | \lambda \in \Lambda\} \cup \mathrm{M}_n(K)$ 生成并且任何 R/J 到 B 的代数同态 ψ 满足 $\mathrm{M}_n(\psi)$ 固定 $\mathrm{M}_n(K)$ 不难得到. $\square$

Remark 1.18. 对任何带迹的代数 (A, C, τ), 我们将证明过程中构造的交换代数 R/J 记作 $\mathscr{B}_n(A)$, 以后固定此记号, 称为 A 的 n 维表示的**坐标环**. 称证明过程中的保迹同态 $\mathfrak{i}_A : A \to \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))$ 为 A 的**泛 n 维表示**.

Remark 1.19. 与不带迹的代数场景一样, 根据带迹的代数泛 n 维表示的泛性质, 我们可以得到 $\mathrm{GL}_n(K)$ 在坐标环 $\mathscr{B}_n(A)$ 以及 $\mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))$ 上的作用. 重复 [引理1.7] 前的讨论便知 $\mathfrak{i}_A$ 可视作 A 到 $\mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))^{\mathrm{GL}_n(K)}$ 的代数同态. 注意 $\mathscr{B}_n(A)^{\mathrm{GL}_n(K)}I_n \subseteq \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))^{\mathrm{GL}_n(K)}$ 以及 $\mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))^{\mathrm{GL}_n(K)}$ 中矩阵的迹都在 $\mathscr{B}_n(A)^{\mathrm{GL}_n(K)}$ 中, 所以 $(\mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))^{\mathrm{GL}_n(K)}, \mathscr{B}_n(A)^{\mathrm{GL}_n(K)}, \mathrm{tr}) \in \mathrm{ob}\mathcal{T}$ 且 $\mathfrak{i}_A : A \to \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))^{\mathrm{GL}_n(K)}$ 依然是保迹代数同态.

参考文献

[BG02] K.A. Brown and K.R. Goodearl. *Lectures on algebraic quantum groups.* Springer Basel AG, 2002.

[BY18] K.A. Brown and M.T. Yakimov. Azumaya loci and discriminant ideals of pi algebras. *Advances in Mathematics*, 340:1219–1255, 2018.

[DCP93] C De Concini and C Procesi. Quantum groups. *D-modules, Representation Theory, and Quantum Groups: Lectures given at the 2nd Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) held in Venezia, Italy, June 12–20, 1992*, pages 31–140, 1993.

[DCPRR05] Corrado De Concini, Claudio Procesi, N Reshetikhin, and M Rosso. Hopf algebras with trace and representations. *Inventiones mathematicae*, 161:1–44, 2005.

[MWY23] Zhongkai Mi, Quanshui Wu, and Milen Yakimov. The lowest discriminant ideal of a cayley-hamilton hopf algebra. *arXiv preprint arXiv:2307.15477*, 2023.

[Pro73] C. Procesi. *Rings with polynomial identities.* Marcel Dekker, 1973.

[Pro74] C. Procesi. Finite dimensional representations of algebras. *Israel Journal of Mathematics*, 19(1):169–182, 1974.

[Pro76] C. Procesi. The invariant theory of n× n matrices. *Advances in mathematics*, 19(3):306–381, 1976.

[Pro79] Claudio Procesi. Trace identities and standard diagrams. In *Ring theory (Proc. Antwerp Conf.(NATO Adv. Study Inst.), Univ. Antwerp, Antwerp, 1978)*, volume 51, pages 191–218, 1979.

[Pro87] Claudio Procesi. A formal inverse to the cayley-hamilton theorem. *Journal of algebra*, 107(1):63–74, 1987.

[Rei03] I. Reiner. *Maximal orders.* Oxford University Press, 2003.