复光滑簇的解析化

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2025 年 12 月 18 日

处理复仿射代数群的一个基本手段是将其 “复解析化” 为复 Lie 群后使用复流形的理论来研究复代数群. 这源于任何 d 维不可约光滑复仿射簇都能自然赋予 d 维复流形结构 (作为仿射簇的维数和作为复流形的维数相同). 更一般地, 复数域上任何不可约仿射簇的光滑轨迹都能够赋予典范的复流形结构 [Mum76, OV90]. 这份笔记的主要目标便是记录这一事实的证明 (相关基本术语见 [Har77, Huy05]):

Theorem 0.1 ([OV90, p.90])**.** 设 $X \subseteq \mathbb{C}^n$ 是不可约复仿射簇, X^{reg} 是 X 的所有 (Zariski 切空间意义下定义的) 光滑点构成的子集 (特别地, X^{reg} 是 X 的稠密开子集). 那么 X^{reg} 关于 $\mathbb{C}^n$ 上欧式拓扑具有自然的复流形结构, 并且作为复流形的维数就是 X 作为仿射簇的维数. 特别地, d 维光滑复仿射簇有典范 d 维复流形结构.

如果 G 是 d 维复仿射代数群, 那么 G 的不可约分支两两不相交且是 d 维光滑簇. 应用 [定理0.1] 可知 G 关于欧式拓扑具有的典范复流形结构构成复 Lie 群 [OV90, p.101]. 更一般地, 对不可约分支维数相同的复光滑仿射簇 X(例如复 Calabi-Yau 仿射簇), 我们也能够应用 [定理0.1] 赋予 X 上复流形结构. 因此, 若 C 是极大理想高度一致的 d 维正则交换仿射 $\mathbb{C}$-代数, 极大谱 $\mathrm{maxSpec}C$ 有典范的 d 维复流形结构.

基于 [定理0.1], 我们能够对不可约光滑复仿射簇 X 讨论其复解析化 X^{an} 上的全纯切空间和多重向量场. 一个基本的观察是这时 X 在 $p \in X$ 处的 Zariski 切空间和全纯切空间有典范同构, [命题2.1]. 进而我们能够将 X 上代数多重向量场视作 X^{an} 上的全纯多重向量场, 特别地, 得到不可约光滑 Poisson 簇 $(X, \{-,-\})$ 的复解析化 X^{an} 具有 Poisson 结构 $\pi \in \mathfrak{X}^2(X^{\mathrm{an}})$ 使得 $\mathbb{C}$-Poisson 代数 $\mathcal{H}(X^{\mathrm{an}})$, 复 Poisson 流形 (X^{an}, π) 上的全纯函数代数, 以正则函数代数 $\mathcal{O}(X)$ 为 Poisson 子代数 [BG03]. 因此我们能够对不可约光滑 Poisson 簇 X 讨论作为复 Poisson 流形 X^{an} 辛叶分解 $X^{\mathrm{an}} = \coprod \mathscr{S}_p(X^{\mathrm{an}})$, [Wei83], 这里每个辛叶 $\mathscr{S}_p(X^{\mathrm{an}})$ 具有辛流形结构, 任意两点有分段 Hamilton 道路相连, 且都是 X^{an} 的浸入子流形.

1 定理0.1的证明

1.1 记号与准备

在给出 [定理0.1] 的证明前我们引入一些记号并做一些准备. 设定义仿射簇 X 的理想可由 $\{f_1, ..., f_m\} \subseteq \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ 生成. 对每个 $p \in X$, T_pX 表示 X 在 p 处的 Zariski 切空间, 那么总有

$$\dim_{\mathbb{C}} T_pX = n - \mathrm{rank} J_p \geq \dim_p X = \dim X, \tag{1.1}$$

式(1.1)的最后一个等号来自 X 的不可约条件, 记号 J_p 表示下述 Jacobi 矩阵:

$$J_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}.$$

记 $r := n - \dim X$. 则 $p \in X^{\mathrm{reg}}$ 当且仅当 $\mathrm{rank} J_p = r$. 并注意到对任何 $q \in X$, (1.1)说明 $\mathrm{rank} J_q \leq r$. 所以

当 J 的分量视作 X 上正则函数时, J 的所有 $r+1$ 阶子式作为 X 上的正则函数都是零.

现在取定 $p \in X^{\mathrm{reg}}$, 那么总有 J_p 的 r 阶子式非零, 我们不妨设

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_r}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_r}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r}(p) \end{pmatrix} \neq 0. \tag{1.2}$$

对于一般情形, 下面的讨论依然成立, 区别是涉及到的指标 (来自子式的行标和列标) 更复杂. 我们有

Lemma 1.1 ([OV90]). 对 $1 \leq i \leq m$ 和 $1 \leq k \leq r$, 存在 $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ 中多项式 g_{ik} 作为 X 上正则函数有:

$$D\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{r} g_{ik} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}, \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n,$$

其中 D 表示由 J 的前 r 行和前 r 列给出的 r 阶子式 (这是多项式, 也可视作 X 上正则函数).

Proof. 如果 $1 \leq i \leq r$, 命 $g_{ik} = \delta_{ik} D$. 下设 $r+1 \leq i \leq m$, 对每个 $1+r \leq j \leq n$, 考虑 J 的前 r 行和第 i 行带上前 r 列与第 j 列构成的 $r+1$ 阶子式 (作为 X 上正则函数是零), 记该子式按照最后一列展开, $\partial f_k / \partial x_j$ 在 $r+1$ 阶子式中的代数余子式是 A_{kj}(当 $k = i$ 时, 代数余子式就是 D). 那么 A_{kj} 和关于 $j \geq r+1$ 的选取无关, 记作 A_k(例如 $A_i = D$). 那么对 $j \geq r+1$ 有 $A_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - A_{i-1} \frac{\partial f_r}{\partial x_j} + \cdots + (-1)^r A_1 = 0$. 并且该等式对 $1 \leq j \leq r$ 也成立: 如果 $j_0 \leq r$, 将 J 的前 r 行和第 i 行构成的 $(r+1) \times n$ 阶子矩阵, 取前 r 列, 但额外增加该子矩阵的第 j_0 列作为第 $r+1$ 列得到的矩阵行列式明显是零, 考察该 $r+1$ 阶行列式按照最后一列的展开. 故对

$$D\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = A_{i-1} \frac{\partial f_r}{\partial x_j} + \cdots + (-1)^{r-1} A_1 = 0,$$

适当调整系数的符号便得到多项式 g_{ik} 的存在性. □

1.2 定理0.1的证明

保持前面的记号. 现在我们证明 [定理0.1]: 只需要说明任何 $p \in X^{\mathrm{reg}}$, 存在 $\mathbb{C}^n$ 在欧式拓扑下的开子集 U, 使得 $X^{\mathrm{reg}} \cap U$ 到 $\mathbb{C}^{n-r}$ 的某个开子集有双全纯映射 φ_U, 并且当 $(X^{\mathrm{reg}} \cap U, \varphi_U)$ 和 $(X^{\mathrm{reg}} \cap V, \varphi_V)$ 的定义域有交集时, φ_U 和 φ_V 全纯相容. 现在我们由(1.2), 可应用全纯映射版本的隐函数定理得到存在 $\mathbb{C}^r$ 的开子集 U_1 和 $\mathbb{C}^{n-r}$ 的开子集 U_2 以及全纯映射 $g : U_2 \to U_1$ 使得 $p \in U_1 \times U_2$ 满足 D 关于 $U_1 \times U_2$ 中所有点是非零的并且对任何 $z = (z_1, ..., z_n) \in U_1 \times U_2$, $f_j(z) = f_j(p)$ 对所有的 $1 \leq j \leq r$ 成立当且仅当 $g(z_{r+1}, ..., z_n) = (z_1, ..., z_r)$. 因此, $z \in \mathbb{C}^n$ 在 $f_1, ..., f_r$ 的公共零点集 X' 中当且仅当 $g(z_{r+1}, ..., z_n) = (z_1, ..., z_r)$. 我们把 $g : U_2 \to U_1$ 写作 $g = (g_1, ..., g_r)$, 每个 g_j 是取值在 $\mathbb{C}$ 中的全纯函数. 我们总可适当选取 U_2 是道路连通的. 现在记 $U \coloneqq U_1 \times U_2$(那么 $p \in U \cap X \subseteq X^{\mathrm{reg}}$). 那么 $X' \cap U$ 到 $\mathbb{C}^{n-r}$ 的开子集 U_2 的有全纯映射 $\varphi_U : (z_1, ..., z_n) \mapsto (z_{r+1}, ..., z_n)$, 它有逆映射 $p \mapsto (g_1(p), ..., g_r(p), p)$, 所以 φ_U 定义了 $X' \cap U$ 到 $U_2 \subseteq \mathbb{C}^{n-r}$ 的双全纯映射. 我们断言

$$X' \cap U = X \cap U. \tag{1.3}$$

一旦断言(1.3)成立, 那么 $X' \cap U = X^{\mathrm{reg}} \cap U$ 并且根据我们关于 φ_U 的构造方式, 有交集有坐标卡并且当 $(X^{\mathrm{reg}} \cap U, \varphi_U)$ 和 $(X^{\mathrm{reg}} \cap V, \varphi_V)$ 自动全纯相容, 便能够得到 X^{reg} 是 $n - r = \dim X$ 维复流形.

现在我们验证(1.3)来完成证明. 只需要验证 $X' \cap U \subseteq X \cap U$. 我们记 $p = (p_1, ..., p_n)$. 考虑道路连通空间 U_2 中的光滑道路 $\gamma : [0, 1] \to U_2, t \mapsto (x_{r+1}(t), ..., x_n(t))$ 满足 $\gamma(0) = (p_{r+1}, ..., p_n)$, 那么我们能够得到 $X' \cap U$ 中光滑道路 $\theta : t \mapsto (g_1(x_{r+1}(t), ..., x_n(t)), ..., g_r(x_{r+1}(t), ..., x_n(t)), x_{r+1}(t), ..., x_n(t))$. 由 [引理1.1],

$$D(\theta(t))\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\theta(t)) = \sum_{k=1}^{r} g_{ik}(\theta(t))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\theta(t)) + \sum_{\ell=1}^{m} h_{i\ell}(\theta(t))f_\ell(\theta(t)), \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n,$$

其中 $h_{i\ell} \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. 对每个 j, 将上式两边乘上 $d(x_j(t))/dt$ 并求和得到

$$D(\theta(t))\frac{df_i(\theta(t))}{dt} = \sum_{k=1}^{r} g_{ik}(\theta(t))\frac{df_k(\theta(t))}{dt} + \sum_{\ell=1}^{m} \psi_{i\ell}(\theta(t))f_\ell(\theta(t)) = \sum_{\ell=1}^{m} \psi_{i\ell}(\theta(t))f_\ell(\theta(t)).$$

上式最后一个等号来自 $f_k(\theta(t)) = 0, \forall t \in [0, 1]$(因为 X' 是 $f_1, ..., f_r$ 的公共零点集). 现在一阶常微分方程组

$$\frac{df_i(\theta(t))}{dt} = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\psi_{i\ell}(\theta(t))}{D(\theta(t))} f_\ell(\theta(t))$$

有初值条件 $f_i(\theta(0)) = 0, i = 1, ..., m$, 并且满足 Picard-Lindelöf 定理 (解的存在唯一性定理) 条件, 所以有 $f_i(\theta(t)) = 0, \forall t \in [0, 1]$. 特别地, 根据 U_2 的道路连通性, 我们能够需求 $\theta(t)$ 是连接 p 和 $X' \cap U$ 中任给点的光滑道路来得到 $X' \cap U$ 中所有点都是 $f_1, ..., f_m$ 的公共零点, 故(1.3)成立. □

2 光滑 Poisson 簇的解析化

2.1 Zariski 切空间和全纯切空间

Proposition 2.1. 设 $X \subseteq \mathbb{C}^n$ 是 d 维不可约光滑复仿射簇, X^{an} 是 X 经 [定理0.1] 得到的 d 维复流形. 那么对任何 $p \in X$, 标准映射 $T_p(X^{\mathrm{an}}) \to T_pX$ 是单射, 特别地, 得到 $\mathbb{C}$-线性同构 $T_p(X^{\mathrm{an}}) \cong T_pX$. 特别地, 如果 G 是复仿射代数群, 那么 G 在单位元处的切空间 T_eG 与复 Lie 群 G^{an} 在 e 处的切空间有典范同构.

Proof. 这里标准映射 $T_p(X^{\mathrm{an}}) \to T_pX$ 将每个 $\nu \in T_p(X^{\mathrm{ann}})$ 映至 $(f \mapsto \nu([f])) \in T_pX$, 这里将 $T_p(X^{\mathrm{an}})$ 视作 X 在 p 处全纯函数芽环到 $\mathbb{C}$ 的导子模. 要证明命题只要说明如果 $\delta \in T_p(X^{\mathrm{an}})$ 作用所有 p 处的正则函数芽是零, 那么 δ 作用所有的全纯函数芽是零. 任取 X^{ann} 在 p 处的全纯函数芽 $[f]$, 这里 f 是 p 的 (关于复流形拓扑的) 开邻域 U 上的全纯函数. [定理0.1] 的证明过程表明可设全纯坐标卡 (U, φ) 上有局部坐标 $x_{i_1}, ..., x_{i_d}$, 这里 $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n$ 且 $\varphi : U \subseteq \mathbb{C}^n \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{C}^d$ 是标准投射给出的双全纯映射. 那么 $f\varphi^{-1}$ 是关于 $x_{i_1}, ..., x_{i_d}$ 的全纯函数. 根据 Hadamard 引理, 存在关于 $\varphi(p)$ 的开邻域 $\varphi(V) \subseteq \varphi(U)$ 使得在 $\varphi(V)$ 上 $f\varphi^{-1}$ 可以表示为 $f\varphi^{-1} = \sum_{k=1}^{d}(x_{i_k} - x_{i_k}(p))T^{(k)}$, 其中 T 是 $\varphi(V)$ 上全纯函数. 所以 f 在 V 上可以表示为

$$f = \sum_{k=1}^{d}(x_{i_k} - x_{i_k}(p))g_k, \tag{2.1}$$

其中 g_k 是 V 上的全纯函数. 对(2.1)定义的全纯函数芽等式两边作用 δ 得到 $\delta([f]) = 0$. $\square$

根据 [命题2.1], 对不可约复光滑仿射簇 X 和其复解析化 X^{an} 在每个 $p \in X$ 处有 Zariski 切空间 T_pX 和全纯切空间 $T_p(X^{\mathrm{an}})$ 视作等同. 点 p 处每个 Zariski 切向量由唯一的全纯切向量诱导. 故对每个 $k \in \mathbb{N}$ 有

$$\wedge^k T_p(X^{\mathrm{an}}) \xrightarrow{\cong} \wedge^k T_pX. \tag{2.2}$$

所以 X 上代数 k-向量场 $\pi \in \wedge^k \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(X))$ 可自然视作 X^{an} 上全纯 k-向量场.

2.2 光滑 Poisson 簇的解析化

设仿射簇 $X \subseteq \mathbb{C}^n$, 那么 $\mathcal{O}(X)$ 是 $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ 的商代数 $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]/I_X$ 且任何 X 上代数向量场 $\delta \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}\mathcal{O}(X)$ 都可以提升为某个 $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ 的作用 I_X 稳定的导子 $\widetilde{\delta}$: 首先 δ 诱导映射 $\delta' : \mathbb{C}[x_1, ..., x_n] \to \mathcal{O}(X) = \Bbbk[x_1, ..., x_n]/I_X$, 命 $\widetilde{\delta}(x_i)$ 是 $\delta'(x_i) \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]/I_X$ 的某个代表元, 那么 $f \mapsto \sum_{i=1}^{n}(\partial f/\partial x_i)\widetilde{\delta}(x_i)$ 定义了 $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 上导子 $\widetilde{\delta}$, $\widetilde{\delta}(I_X) \subseteq I_X$ 且诱导 δ. 这说明存在多项式函数 $h_{i_1 \cdots i_k} \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ 使得

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} h_{i_1 \cdots i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \tag{2.3}$$

能够诱导 π. 进而对任何 $p \in X$, 同构(2.2)说明

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} h_{i_1 \cdots i_k}(p) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\Big|_p \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\Big|_p \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\Big|_p \in \wedge^k T_pX \cong \wedge^k T_p(X^{\mathrm{an}})$$

于是(2.3)所定义的 $\mathbb{C}^n$ 上全纯向量场能够限制为 X^{an} 上全纯向量场 π^{an} 使得 π^{an} 能够诱导 π. 所以

Corollary 2.2 ([BG03])**.** 设 $(X, \{-,-\})$ 是 $\mathbb{C}$ 上仿射光滑 Poisson 簇, 其中 $\{-,-\}$ 是 X 的正则函数代数上的 Poisson 括号. 并记 X 的复解析化 X^{an} 的全纯函数代数为 $\mathcal{H}(X^{\mathrm{an}})$. 则有全纯双向量场 $\pi \in \mathfrak{X}^2(X^{\mathrm{an}})$ 使得 (X, π) 成为复 Poisson 流形且正则函数代数 $\mathcal{O}(X)$ 成为 $\mathcal{H}(X^{\mathrm{an}})$ 的 Poisson 子代数.

参考文献

[BG03] Kenneth A. Brown and Iain Gordon. Poisson orders, symplectic reflection algebras and representation theory. *J. Reine Angew. Math.*, 559:193–216, 2003.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume No. 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Huy05] Daniel Huybrechts. *Complex geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005. An introduction.

[Mum76] David Mumford. *Algebraic geometry. I*, volume No. 221 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. Complex projective varieties.

[OV90] A. L. Onishchik and È.B. Vinberg. *Lie groups and algebraic groups*. Springer Series in Soviet Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1990. Translated from the Russian and with a preface by D. A. Leites.

[Wei83] Alan Weinstein. The local structure of Poisson manifolds. *J. Differential Geom.*, 18(3):523–557, 1983.