交错张量与 Kähler 高阶形式

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 2 月 9 日

这份笔记主要记录光滑流形 $\mathcal{M}$ 上所有光滑 k-形式构成的模 $\Omega^k(\mathcal{M})$ 的等价刻画并介绍 $\Omega^k(\mathcal{M})$ 与 $\Omega^1(\mathcal{M})$ 之间的联系——$\Omega^k(\mathcal{M}) \cong \bigwedge^k_{C^\infty(\mathcal{M})} \Omega^1(\mathcal{M})$, 主要参考文献是 [Lee12] 和 [Nes03]. 从这个等式可自然地给出 Kähler 高阶形式的定义, 关于 Kähler 微分的基本概念可参见 [Eis04] 或 [Har77]. 全文考虑的流形均为实流形.

1 交错张量

本节固定 n 维光滑流形 $\mathcal{M}$, 记 $\mathcal{M}$ 上协变 k-张量丛为 $T^kT^*\mathcal{M}$, 其光滑截面模, 即 $\mathcal{M}$ 上所有光滑协变 k-张量场构成的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模, 记作 $\mathcal{T}^k(\mathcal{M})$. $\mathcal{M}$ 上所有光滑向量场构成的模记作 $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

如果 $A \in \mathcal{T}^k(\mathcal{M})$, 那么 A 可自然诱导多重 $C^\infty(\mathcal{M})$-线性函数

$$\mathcal{A}: \underbrace{\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \cdots \times \mathfrak{X}(\mathcal{M})}_{k\text{项}} \to C^\infty(\mathcal{M})$$
$$(X_1, ..., X_k) \mapsto A(X_1, ..., X_k),$$

其中 $A(X_1, ..., X_k): \mathcal{M} \to \mathbb{R}, p \mapsto A_p(X_1|_p, ..., X_k|_p)$. 如果 A 是光滑的交错 k-张量场, 那么 $\mathcal{A}$ 便是 $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 上的交错 k-重线性函数. 易见有 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同态 $\Theta: \mathcal{T}^k(\mathcal{M}) \to \{\mathcal{A}|\mathcal{A}\text{是}\mathfrak{X}(\mathcal{M})\text{上}k\text{-重}C^\infty(\mathcal{M})\text{-线性函数}\}$ 满足 $\Theta(A) = \mathcal{A}$, 这里 $\mathcal{A}$ 如上定义. 并且若把 Θ 限制在交错张量场上, 可将每个交错张量场对应到交错 $C^\infty(\mathcal{M})$-线性函数. 在讨论光滑交错张量场与交错 $C^\infty(\mathcal{M})$-线性函数的对应关系前, 先说明上述同态 Θ 是同构.

如果 $A, B \in \mathcal{T}^k(\mathcal{M})$ 满足 $\Theta(A) = \Theta(B)$, 则对任给 $p \in \mathcal{M}$ 以及含 p 的光滑坐标卡 (U, φ), 设 φ 的坐标表示为 $(x_i)_{i=1}^n$, 那么存在 p 的开邻域 B 使得 $\overline{B} \subseteq U$. 考察 U 上坐标向量场在 $\mathcal{M}$ 上的光滑延拓, 用 $\Theta(A), \Theta(B)$ 作用之, 可得 $A_p = B_p$, 所以 Θ 是单 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同态. 下面说明 Θ 是满射.

任取 k 重 $C^\infty(\mathcal{M})$-线性函数 $\mathcal{A}: \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \cdots \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$. 我们先说明 $\mathcal{A}$ 在光滑向量场 $X_1, ..., X_k$ 下的像 $\mathcal{A}(X_1, ..., X_k)$ 在每点 $p \in \mathcal{M}$ 处的取值由 X_i 在 p 附近的局部性态决定. 如果 X_i 在 p 的某个开邻域 U 上取值为零, 不妨设 U 是含 p 的某个光滑坐标卡的定义域. 那么可构造光滑函数 $\psi: \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 使得 $\psi(p) = 1$ 且 $\mathrm{Supp}\psi \subseteq U$. 进而 ψX_i 是零向量场, 进而 $0 = \mathcal{A}(X_1, ..., \psi X_i, ..., X_k)(p) = \psi(p)\mathcal{A}(X_1, ..., X_k)(p)$, 这说明 $\mathcal{A}(X_1, ..., X_k)(p) = 0$, 因此 $\mathcal{A}(X_1, ..., X_k)(p)$ 被 $X_1, ..., X_k$ 在 p 附近的性态决定.

下面我们说明 $\mathcal{A}$ 在光滑向量场 $X_1,...,X_k$ 下的像 $\mathcal{A}(X_1,...,X_k)$ 在每点 $p\in\mathcal{M}$ 处的取值由 $X_1|_p,...,X_k|_p$ 决定. 如果 $X_i|_p=0$, 设 X_i 在某个含 p 光滑坐标卡 (U,φ) 上可由局部坐标 $(x_i)_{i=1}^n$ 表示为

$$X_i=\sum_{j=1}^n X_i^j(\partial/\partial x_j).$$

这里每个分量函数 $X_i^j:U\to\mathbb{R}$ 光滑. 并且 $X_i^j(p)=0,\forall 1\le j\le n$.

设 p 有开邻域 $B\subseteq U$ 满足 $\overline{B}\subseteq U$, 将 $\overline{B}$ 上坐标向量场 $\partial/\partial x_j$ 光滑地延拓到 $\mathcal{M}$ 上, 记作 E_j. 同样把光滑函数 X_i^j 延拓为 $\mathcal{M}$ 上, 记作 f_i^j. 则满足 $E_j|_B=(\partial/\partial x_j)|_B$ 以及 $f_i^j|_B=X_i^j$. 那么在 B 上有 $\sum\limits_{j=1}^n f_i^jE_j=X_i$, 进而由前面得到的 $\mathcal{A}(X_1,...,X_k)(p)$ 被 $X_1,...,X_k$ 在 p 附近的性态决定可知

$$\mathcal{A}(X_1,...,X_k)(p)=\mathcal{A}(X_1,...,X_{i-1},\sum_{j=1}^n f_i^jE_j,X_{i+1},...,X_k)(p)=\sum_{j=1}^n f_i^j(p)A(X_1,...,X_{i-1},E_j,X_{i+1},...,X_k)(p).$$

现在由 $f_i^j(p)=X_i^j(p)=0$ 得到 $\mathcal{A}(X_1,...,X_k)(p)=0$, 这说明 $\mathcal{A}(X_1,...,X_k)(p)$ 只依赖于 $X_1|_p,...,X_k|_p$.

现在我们可以定义粗糙张量场 $A:\mathcal{M}\to T^kT^*\mathcal{M},p\mapsto A_p$ 满足 $A_p(v_1,...,v_k)=\mathcal{A}(V_1,...,V_k)(p)$, 其中 V_j 是 v_j 在整个 $\mathcal{M}$ 上的光滑延拓. 根据前面的讨论, $A_p:(T_p\mathcal{M})^k\to\mathbb{R}$ 是定义合理的映射, 于是由 $\mathcal{A}$ 的多重线性性立即看到 A_p 是多重 $\mathbb{R}$-线性函数, 因此 A 是定义合理的粗糙张量场. 现对任何光滑向量场 $X_1,...,X_k$ 有

$$A(X_1,...,X_k)(p)=A_p(X_1|_p,...,X_k|_p)=\mathcal{A}(X_1,...,X_k)(p),\forall p\in\mathcal{M}.$$

因此由 $\mathcal{A}(X_1,...,X_k)\in C^\infty(\mathcal{M})$ 可知 $A\in\mathcal{T}^k(\mathcal{M})$. 进而由 A 的构造可知 $\Theta(A)=\mathcal{A}$, 因此 Θ 是同构. 这里再指出当 $\mathcal{A}$ 是交错 $C^\infty(\mathcal{M})$-线性函数时, 我们构造的张量场 A 也是交错的. 现将前面的讨论总结为

Theorem 1.1. 前面定义的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同态 Θ 是模同构, 并且 $A\in\mathcal{T}^k(\mathcal{M})$ 交错当且仅当 $\Theta(A)$ 交错.

Remark. 该定理一般被称为**张量刻画引理**, 可类似对混合张量的情形证明相应结果.

记 $T^kT^*\mathcal{M}$ 中所有交错张量构成的子集为 $\Lambda^kT^*\mathcal{M}$, 即 $\Lambda^kT^*\mathcal{M}=\coprod\limits_{p\in\mathcal{M}}\Lambda^{(k)}(T_p^*\mathcal{M})$, 我们有标准线性同构

$$\Lambda^{(k)}(T_p^*\mathcal{M})\cong\wedge^kT_p^*\mathcal{M},$$

上式右侧是余切空间在 $\mathbb{R}$ 上的 k 次外幂. 将上述同构视作等同, 可知在 p 的任何光滑坐标卡 (U,φ) 的局部坐标表示 $(x_i)_{i=1}^n$ 下, $\Lambda^{(k)}(T_p^*\mathcal{M})$ 有基 $\{dx_{i_1}|_p\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}|_p|1\le i_1\le\cdots\le i_k\le n\}$. 可赋予 $\Lambda^kT^*\mathcal{M}$ 自然的拓扑结构与光滑结构使得它与标准投射 $\pi:\Lambda^kT^*\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 给出 $\mathcal{M}$ 上光滑向量丛. 称 $\Lambda^kT^*\mathcal{M}$ 的截面为 $\mathcal{M}$ 上**微分 k-形式**或 **k-形式**, k 被称为该形式的**次数**. 光滑的微分 k-形式有时也简称为**光滑 k-形式**. 我们把所有光滑 k-形式构成的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模记作 $\Omega^k(\mathcal{M})$. 例如 $\Omega^1(\mathcal{M})=\mathcal{T}^1(\mathcal{M})$. 那么根据 $\Lambda^kT^*\mathcal{M}$ 的定义以及 Θ 是保持交错性的模同构可知有 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构 $\Omega^k(\mathcal{M})\cong\{\mathcal{A}:\mathfrak{X}(\mathcal{M})\times\cdots\times\mathfrak{X}(\mathcal{M})\to C^\infty(\mathcal{M})|\mathcal{A}\text{是交错多重}C^\infty(\mathcal{M})\text{-线性函数}\}$. 特别地, 我们得到 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构 $\Omega^k(\mathcal{M})\cong\mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}\left(\bigwedge^k_{C^\infty(\mathcal{M})}\mathfrak{X}(\mathcal{M}),C^\infty(\mathcal{M})\right)$.

由 Swan 定理, $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 是有限生成投射 $C^\infty(\mathcal{M})$-模, 所以有下述 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构:

$$\Omega^k(\mathcal{M})\cong\mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\wedge^k_{C^\infty(\mathcal{M})}\mathfrak{X}(\mathcal{M}),C^\infty(\mathcal{M}))\cong\wedge^k_{C^\infty(\mathcal{M})}\mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\mathfrak{X}(\mathcal{M}),C^\infty(\mathcal{M}))\cong\wedge^k_{C^\infty(\mathcal{M})}\Omega^1(\mathcal{M}).$$

Theorem 1.2. 设 $\mathcal{M}$ 是光滑流形, 则对任何自然数 k 有 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构 $\Omega^k(\mathcal{M})\cong\bigwedge^k_{C^\infty(\mathcal{M})}\Omega^1(\mathcal{M})$.

因为 $\Omega^1(\mathcal{M})$ 作为有限生成 $C^\infty(\mathcal{M})$-模总可由一些恰当形式生成, 所以 $\Omega^k(\mathcal{M})$ 中任何元素都形如

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} f_{i_1\cdots i_k} dg_{i_1}\wedge\cdots\wedge dg_{i_k},$$

其中 $f_{i_1\cdots i_k}, g_{i_1},...,g_{i_k}\in C^\infty(\mathcal{M})$. 在流形的局部上可把 $g_{i_1},...,g_{i_k}$ 选取为局部坐标的坐标余切向量场.

2 Kähler 高阶形式

设 R 是含幺交换环 K 上的交换代数, 记 $(\Omega(R),\delta)$ 是 R 的 Kähler 微分模. 如果 $R=C^\infty(\mathcal{M})$ 是光滑流形 $\mathcal{M}$ 的光滑函数环, 那么 R 作为 $\mathbb{R}$-代数决定的 Kähler 微分模 $(\Omega(C^\infty(\mathcal{M})),\delta)$ 与 $(\Omega^1(\mathcal{M}),d)$ 一般不同, 这里 $d: C^\infty(\mathcal{M})\to\Omega^1(\mathcal{M})$ 是微分映射. 反例可参见 [Nes03, p.229, Proposition 14.10].

受 [定理1.2] 启发, 对 K-交换代数 R, 对每个自然数 k, 我们将 Kähler 微分模 $\Omega(R)$ 在 R 上的 k 次外幂 $\wedge_R^k\Omega(R)$ 记作 $\Omega^k(R)$. 其中的元素称为 R 的 **Kähler k-形式**. 如果 A 是 K 上本质有限型的交换代数, 由 Kähler 微分模的局部化性质易知 $\Omega^k(R)$ 是有限生成 R-模.

如果 R 是**光滑的**, 即满足任何 K-代数 S, 满足 $I^2=0$ 的理想 I 以及 K-代数同态 $\alpha: R\to S/I$, 都可将 α 提升到为 A 到 S 的 K-代数同态, 则可借助平凡扩张的性质证明 $\Omega(R)$ 是投射 R-模.

因此, 对本质有限型的光滑代数 R 以及自然数 k, 有 $\Omega^k(R)$ 是有限生成投射 R-模. 再结合 R-模同构

$$\mathfrak{X}^k(R)\cong \mathrm{Hom}_R(\Omega^k(R),R),$$

这里 $\mathfrak{X}^k(R)=\{F\in\mathrm{Hom}_K(\wedge_K^k R,R)|F\text{在每个分量上是}K\text{-导子}\}$ 为 R 上交错 k 重 K-线性导子全体, 可知

$$\Omega^k(R)\cong\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{X}^k(R),R).$$

Example 2.1. 对上式取 $k=1$, 则 $\mathfrak{X}^1(R)=\mathrm{Der}_K R$ 是 R 的导子模. 则 $\Omega(R)\cong\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Der}_K R,R)$.

Remark. 当 $R=C^\infty(\mathcal{M})$ 是光滑流形 $\mathcal{M}$ 的光滑函数环时, 同样有 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构

$$\Omega^1(\mathcal{M})\cong\mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\mathfrak{X}(\mathcal{M}),C^\infty(\mathcal{M})),$$

因此交换代数上的导子是光滑向量场的代数推广, Kähler 1-形式是光滑 1-形式的代数类似物.

参考文献

[Eis04] D. Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Springer Science+Business Media, 2004.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 1977.

[Lee12] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218. Springer Science & Business Media, 2012.

[Nes03] J. Nestruev. *Smooth manifolds and observables*, volume 220. Springer, 2003.