仿射簇的积与仿射代数群

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 11 月 21 日

1 仿射簇的积

本节介绍仿射簇的乘积, 并说明乘积簇的坐标环是原有坐标环的张量积 (见 [命题1.3]).

设 $\Bbbk$ 是域, 对仿射簇 $X \subseteq \Bbbk^m, Y \subseteq \Bbbk^n$, 记 $I = I(X) \subseteq \Bbbk[x_1, ..., x_m], J = I(Y) \subseteq \Bbbk[x_{m+1}, ..., x_{m+n}]$, 把 I, J 都视作多项式代数 $\Bbbk[x_1, ..., x_{n+m}]$ 的子集, 易见在仿射空间 $\Bbbk^{m+n}$ 中 $V(I) = X \times \Bbbk^n, V(J) = \Bbbk^m \times Y$, 故在 $\Bbbk^{n+m}$ 中 $V(I \cup J) = V(I) \cap V(J) = X \times Y$. 这说明对仿射簇 X, Y, 作为集合作笛卡尔积得到的集合 $X \times Y \subseteq \Bbbk^{n+m}$ 确实为仿射簇 (为 $\Bbbk^{n+m}$ 中一些多项式的公共零点集). 并且可直接验证

Proposition 1.1. 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^m, Y \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇. 那么 $(X \times Y, \{p_X, p_Y\})$ 是仿射簇范畴中 X 与 Y 的积, 其中 $p_X : X \times Y \to X, p_Y : X \times Y \to Y$ 是 $X \times Y$ 在各个分量上的标准投射.

Remark 1.2. 一般将仿射簇 $X \times Y$ 称为仿射簇 X 与 Y 的**乘积簇**.

我们知道代数闭域上仿射簇范畴和有限生成可约交换代数范畴是范畴对偶的, 所以一个基本的问题是乘积簇作为簇的积对应到代数范畴中的代数对象与原先两个仿射簇的坐标环有什么关系. 下面的结论表明当我们从几何的视角切换到代数视角来看 $X \times Y$ 是 X 和 Y 的积时, 坐标环 $A(X \times Y)$ 是 $A(X)$ 和 $A(Y)$ 的余积.

Proposition 1.3. 设 $\Bbbk$ 是域, 对仿射簇 $X \subseteq \Bbbk^m, Y \subseteq \Bbbk^n$, 记 $I = I(X) \subseteq \Bbbk[x_1, ..., x_m], J = I(Y) \subseteq \Bbbk[x_{m+1}, ..., x_{m+n}]$ 以及 $K = I(X \times Y) \subseteq \Bbbk[x_1, ..., x_{m+n}]$, 则有 $\Bbbk$-代数同构 $A(X) \otimes_\Bbbk A(Y) \cong A(X \times Y)$.

Proof. 易知 $A(X) \times A(Y) \to A(X \times Y), (\overline{f}, \overline{g}) \mapsto \overline{fg}$ 是定义合理的 $\Bbbk$-平衡映射, 它诱导 $\Bbbk$-线性映射 $\varphi : A(X) \otimes_\Bbbk A(Y) \to A(X \times Y)$ 使得 $\varphi(\overline{f} \otimes \overline{g}) = \overline{fg}$, 易验证 φ 是 $\Bbbk$-代数同态且是满射. 下面验证 φ 是单射: 若不然, 设 $\overline{f_1} \otimes \overline{g_1} + \cdots + \overline{f_s} \otimes \overline{g_s} \neq 0 \in \mathrm{Ker}\varphi$, 不妨设 $\overline{f_1}, ..., \overline{f_s}$ 是 $\Bbbk$-线性无关的. 这时

$$f_1(x)g_1(y) + f_2(x)g_2(y) + \cdots + f_s(x)g_s(y) = 0, \forall x \in X, y \in Y.$$

固定 y, 由 x 的任意性以及 $\{\overline{f_1}, ..., \overline{f_s}\}$ 是线性无关的迫使每个 $g_j(y) = 0$. 从而每个 $g_j \in I(Y) = J$, 即 $\overline{g_j} = 0, \forall 1 \leq j \leq s$. 这说明 $\overline{f_1} \otimes \overline{g_1} + \cdots + \overline{f_s} \otimes \overline{g_s} = 0$, 矛盾. 因此 φ 是 $\Bbbk$-代数同构. □

Remark 1.4. 证明过程中的代数同构 $\varphi : A(X) \otimes_\Bbbk A(Y) \to A(X \times Y)$ 的逆映射 φ^{-1} 满足将每个单项式所在等价类 $\overline{cx_1^{i_1} \cdots x_{n+m}^{i_{n+m}}}$ 映到 $\overline{cx_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m}} \otimes \overline{x_{m+1}^{i_{m+1}} \cdots x_{n+m}^{i_{n+m}}}$.

2 仿射代数群及其坐标环

本节介绍仿射代数群以及其坐标环上的 Hopf 代数结构 (见 [定理2.4]). 类似于拓扑群和 Lie 群, 仿射代数群的概念无非是对具有群结构的仿射簇要求群结构与簇结构具有某些相容性.

Definition 2.1 (仿射代数群)**.** 设群 $G \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, 如果 G 上乘法映射 $m: G \times G \to G$ 和求逆映射 $G \to G, g \mapsto g^{-1}$ 是仿射簇间的正则映射, 则称 G 是**仿射代数群**. 称如果仿射代数群间正则映射是群同态, 则称该正则映射为**仿射代数群同态**. 由此可定义出域 $\Bbbk$ 上**仿射代数群范畴**.

Example 2.2 (特殊线性群)**.** 通过 $\Bbbk$-线性同构将 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 与 $\Bbbk^{n^2}$ 视作等同. 那么特殊线性群 $\mathrm{SL}_n(\Bbbk) = \{A \in \mathrm{M}_n(\Bbbk) | \det A = 1\}$ 是仿射簇. 其上乘法运算明显是多项式映射, 所以特殊线性群是 (非交换) 仿射代数群.

Example 2.3 (单位圆周)**.** 考虑平面上单位圆周 $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\} = V(x^2 + y^2 - 1) \subseteq \mathbb{R}^2$, 通过复数的乘法赋予 S 上乘法运算, 那么 S 是实仿射代数群.

代数闭域上的仿射簇范畴与有限生成交换可约代数范畴间有标准的范畴对偶. 特别地, 两个仿射簇同构的充要条件是它们的坐标环代数同构. 下面我们考虑仿射代数群的坐标环, 我们将看到其上有 Hopf 代数结构.

给定代数闭域 $\Bbbk$ 上的仿射簇 $X \subseteq \Bbbk^n$, 其坐标环 $A(X) = \Bbbk[x_1, ..., x_n]/I(X)$ 可和 X 到 $\Bbbk$ 的多项式函数全体 $\{f : X \to \Bbbk | f \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]\}$ 视作等同, 那么 [命题1.3] 中的代数同构 $\varphi : A(X) \otimes_{\Bbbk} A(Y) \to A(X \times Y)$ 满足 $\varphi(f \otimes g) : X \times Y \to \Bbbk, (x, y) \mapsto f(x)g(y)$. 现在我们设 $G \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射代数群, 并记 $\varphi : A(G) \otimes_{\Bbbk} A(G) \to A(G \times G)$ 是标准代数同构. G 上乘法映射 $m : G \times G \to G$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "m \times \mathrm{id}_G"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G \times m"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}$$

设 $0 \in \Bbbk^n$, 群的单位元决定一标准映射 $e : \{0\} \to G, 0 \mapsto 1_G$, 它使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
& G \times G \arrow[dd, "m"] & \\
\{0\} \times G \arrow[ur, "e \times \mathrm{id}_G"] \arrow[dr] & & G \times \{0\} \arrow[ul, "\mathrm{id}_G \times e"'] \arrow[dl] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

此外, 因为群每个元素关于乘法运算有逆元, 记 $\mathrm{inv} : G \to G, g \mapsto g^{-1}$ 是求逆映射, $\beta_1 : G \to G \times G, g \mapsto (g^{-1}, g), \beta_2 : G \to G \times G, g \mapsto (g, g^{-1})$, 则有如下交换图：

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d] & G \times G \arrow[d, "m"] & G \arrow[l, "\beta_2"'] \arrow[d] \\
\{0\} \arrow[r, "e"'] & G & \{0\} \arrow[l, "e"]
\end{tikzcd}$$

现在我们给仿射代数群 G 的坐标环 $A(G)$ 赋予余代数结构. 正则映射 $m : G \times G \to G$ 逆变地诱导代数同态 $m^* : A(G) \to A(G \times G)$, $e : \{0\} \to G$ 也诱导代数同态 $e^* : A(G) \to A(\{0\}), f \mapsto fe$. 利用代数同构

$A(\{0\})\cong\Bbbk$ 得到代数同态 $\varepsilon: A(G)\to\Bbbk, f\mapsto f(1_G)$. 利用代数同构 $\varphi: A(G)\otimes_{\Bbbk}A(G)\to A(G\times G)$ 得到

$$A(G)\xrightarrow{m^*}A(G\times G)\xrightarrow{\varphi^{-1}}A(G)\otimes_{\Bbbk}A(G)$$

代数同态 $\Delta=\varphi^{-1}m^*: A(G)\to A(G)\otimes_{\Bbbk}A(G)$. 下面说明 $(A(G),\Delta,\varepsilon)$ 是 $\Bbbk$-余代数, 进而结合 Δ,ε 是代数同态便知 $A(G)$ 是双代数. 首先有下面两个交换图：

$$\begin{tikzcd}
A(G) \arrow[r, "m^*"] \arrow[d, "m^*"'] & A(G\times G) \arrow[d, "(m\times\mathrm{id}_G)^*"] \\
A(G\times G) \arrow[r, "(\mathrm{id}_G\times m)^*"'] & A(G\times G\times G)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& A(G) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "m^*"] & \\
A(\{0\}\times G) & & A(G\times\{0\}) \\
& A(G\times G) \arrow[ul, "(e\times\mathrm{id}_G)^*"] \arrow[ur, "(\mathrm{id}_G\times e)^*"'] &
\end{tikzcd}$$

记 $\overline{\varphi}^{-1}: A(G\times G\times G)\to A(G)\otimes_{\Bbbk}A(G)\otimes_{\Bbbk}A(G)$ 是 φ 诱导的代数同构, 它满足对任何 $f_1,f_2,f_3\in A(G)$ 有 $\overline{\varphi}(f_1\otimes f_2\otimes f_3): G\times G\times G\to\Bbbk,(a,b,c)\mapsto f_1(a)f_2(b)f_3(c)$ 直接地计算表明下图交换：

$$\begin{tikzcd}
A(G) \arrow[r, "m^*"] \arrow[d, "m^*"'] & A(G\times G) \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "(m\times\mathrm{id}_G)^*"] & A(G)\otimes_{\Bbbk}A(G) \arrow[dd, "\varphi^{-1}m^*\otimes\mathrm{id}_{A(G)}"] \\
A(G\times G) \arrow[r, "(\mathrm{id}_G\times m)^*"'] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & A(G\times G\times G) \arrow[dr, "\overline{\varphi}^{-1}"] & \\
A(G)\otimes_{\Bbbk}A(G) \arrow[rr, "\mathrm{id}_{A(G)}\otimes\varphi^{-1}m^*"] & & A(G)\otimes_{\Bbbk}A(G)\otimes_{\Bbbk}A(G)
\end{tikzcd}$$

而上图的交换性也说明了图

$$\begin{tikzcd}
A(G) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A(G)\otimes_{\Bbbk}A(G) \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{id}_{A(G)}"] \\
A(G)\otimes_{\Bbbk}A(G) \arrow[r, "\mathrm{id}_{A(G}\otimes\Delta"] & A(G)\otimes_{\Bbbk}A(G)\otimes_{\Bbbk}A(G)
\end{tikzcd}$$

交换. 此外, 下图的交换性也可直接计算验证.

$$\begin{tikzcd}
& & A(G) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "m^*"] & & \\
& A(\{0\}\times G) \arrow[dl, "\varphi_1^{-1}"'] & & A(G\times\{0\}) \arrow[dr, "\varphi_2^{-1}"] & \\
\Bbbk\otimes_{\Bbbk}A(G) & & A(G\times G) \arrow[ul, "(e\times\mathrm{id}_G)^*"] \arrow[ur, "(\mathrm{id}_G\times e)^*"'] \arrow[d, "\varphi^{-1}"] & & A(G)\otimes_{\Bbbk}\Bbbk \\
& & A(G)\otimes_{\Bbbk}A(G) \arrow[llu, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}_{A(G)}"] \arrow[rru, "\mathrm{id}_{A(G)}\otimes\varepsilon"'] & &
\end{tikzcd}$$

于是我们可得 $(A(G),\Delta,\varepsilon)$ 是 $\Bbbk$-余代数. 总结一下, 现在我们说明了仿射代数群的坐标环 $A(G)$ 上有自然的双代数结构 $(A(G),\mu,u;\Delta,\varepsilon)$, 其中 μ 是坐标环上乘法映射, $u:\Bbbk\to A(G)$ 是单位元映射. 下面我们说明求逆映射 $\mathrm{inv}:G\to G$ 所 (逆变) 诱导的 $\Bbbk$-代数同态 $s:A(G)\to A(G)$ 是双代数 $(A(G),\mu,u;\Delta,\varepsilon)$ 上的对极映射, 可直接计算验证下图交换：

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk \arrow[d, "u"'] & & A(G) \arrow[ll, "\varepsilon"'] \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[d, "\Delta=\varphi^{-1}m^*"] & & \Bbbk \arrow[d, "u"] \\
A(G) & & A(G)\otimes_{\Bbbk}A(G) \arrow[ll, "\mu(s\otimes\mathrm{id}_{A(G)})"'] \arrow[rr, "\mu(\mathrm{id}_{A(G)}\otimes s)"] & & A(G)
\end{tikzcd}$$

于是我们得到了下述结果.

Theorem 2.4. 设 G 是代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射代数群, 那么 $(A(G),\mu,u;\Delta,\varepsilon,s)$ 是交换有限生成可约 Hopf 代数.

Remark 2.5. 在 Hopf 代数的早期发展中, 主要例子来源于代数拓扑中一些特殊拓扑空间 (例如球面 S^3) 的上同调环以及仿射代数群的坐标环. 上述定理便说任何仿射代数群的坐标环上有天然 Hopf 代数结构.

对任给代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射代数群 G_1,G_2 以及仿射代数群同态 $\varphi:G_1\to G_2$, 可逆变诱导正则映射 $\varphi^*:A(G_1)\to A(G_2)$. 利用 φ 保持乘法可验证 φ^* 是 Hopf 代数同态. 因此 $\Bbbk$ 上仿射代数群范畴到 Hopf 代数范畴有自然的逆变函子. 这使得人们可以用 Hopf 代数的工具来研究仿射代数群.

Example 2.6. 如果代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射簇 $X\neq\varnothing$ 满足坐标环 $A(X)$ 是 Artin 的, 那么 X 是 0 维簇 (即有限个点构成的仿射簇). 所以对任何正整数 n, n 维仿射代数群 G 的坐标环都是无限维 Hopf 代数.

参考文献

[Mil17] James S Milne. *Algebraic groups: the theory of group schemes of finite type over a field*, volume 170. Cambridge University Press, 2017.

[Mon93] Susan Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings.* Number 82. American Mathematical Soc., 1993.