


仿射超曲面

戚天成 

复旦大学 数学科学学院

2024 年 2 月 2 日

超曲面是仿射平面曲线与超平面的自然推广. 这份笔记主要介绍仿射空间中超曲面的基本性质与例子.

1 仿射超曲面

我们已经接触过许多仿射超曲面, 例如 \mathbb{R}^2 中的单位圆周 $V(x^2 + y^2 - 1)$ 以及抛物线 $V(x^2 - y)$.

Definition 1.1. 设 \mathbb{k} 是域, $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ 是非常数多项式. 称 $V(f) \subseteq \mathbb{k}^n$ 是 f 决定的仿射超曲面.

Remark 1.2. 根据定义 (f) 是多项式代数 $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ 的非零真理想, 所以 $\text{ht}(f)$ 作为所有含 f 的素理想的高度下确界不低于 1. 再由 Krull 主理想定理便知 $\text{ht}(f) = 1$, 所以 $\text{k.dim} \mathcal{O}(V(f)) = \text{k.dim} \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] - \text{ht}(f) = n - 1$, 其中 $\mathcal{O}(V(f))$ 表示 $V(f)$ 的坐标环. 由此可知代数闭域上仿射超曲面的余维数是 1. 事实上, $V(f)$ 是 $n - 1$ 维等维仿射簇 (即所有的不可约分支具有相同的维数). 设 $f = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_s^{n_s}$ 是多项式 f 的不可约分解, 这里 p_1, \dots, p_s 是两两不相伴的不可约多项式. 那么 $V(f) = V(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_s^{n_s}) = V(p_1) \cup \cdots \cup V(p_s)$, 不难看出这给出 $V(f)$ 的不可约分支分解 (事实上, 假设 $V(p_i) \subseteq V(p_j)$, 根据 Hilbert 零点定理可知 $(p_i) \supseteq (p_j)$, 这迫使 p_i 与 p_j 相伴), 所以由每个 $V(p_i)$ 是 $n - 1$ 维簇可知 $V(f)$ 是 $n - 1$ 维等维仿射簇.

Proposition 1.3. 设 \mathbb{k} 是代数闭域, $X \subseteq \mathbb{k}^n$ 是超曲面. 则 X 不可约 $\Leftrightarrow X$ 是某不可约多项式的零点集.

Proof. 充分性由 Hilbert 零点定理便知. 必要性: 设 $X = V(f)$, 则由 Hilbert 零点定理得到 $\sqrt{(f)}$ 是素理想, 可设不可约多项式 $p \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ 满足 $\sqrt{(f)} = (p)$. 那么 f 整除 p 的某个正整数幂, 所以 f 相伴于 p 的某个正整数幂, 这也说明 $X = V(f) = V(p)$ 是不可约多项式 p 的零点集. \square

事实上, n 维仿射空间中任何 $n - 1$ 维等维闭子簇都是超曲面, 由此可给出超曲面的刻画:

Theorem 1.4. 设 \mathbb{k} 是代数闭域, n 是正整数, $X \subseteq \mathbb{k}^n$ 是仿射簇. 则 X 是超曲面 $\Leftrightarrow X$ 是 $n - 1$ 维等维簇.

Proof. 之前的讨论已经证明了必要性. 下证充分性: 易见只需证明 X 不可约的情形, 因为一旦证明结论对不可约簇成立, 那么一般情形时, 设 X 有不可约分支分解 $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$, 每个 X_i 作为 $n - 1$ 维不可约簇是超曲面 $X_i = V(f_i)$, 这里 f_i 是某个不可约多项式, 进而 $X = V(f_1) \cup \cdots \cup V(f_r) = V(f_1 \cdots f_r)$ 也是超曲面. 现设 X 不可约, 那么 $I(X) \subseteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ 是素理想, 所以对任何非常数多项式 $f \in I(X)$, 设 f 可分解为一些不可

约多项式的乘积 $f = q_1 \cdots q_t$, 那么存在某个 $q_j \in I(X)$, 于是 $X \subseteq V(q_j)$, 现在利用 $\dim X = \dim V(q_j) = n - 1$ 可知 $X = V(q_j)$, 这说明 X 是超曲面. \square

Example 1.5. 如果不可约仿射簇 X 的维数为 1, 则称 X 是仿射曲线. 例如单位圆周 $V(x^2 + y^2 - 1) \subseteq \mathbb{C}^2$ 和尖点曲线 $V(x^3 - y^2) \subseteq \mathbb{C}^2$ 都是仿射曲线. 称 \mathbb{k}^2 中仿射曲线为平面仿射曲线. 根据 [定理1.4] 可知代数闭域 \mathbb{k} 上平面仿射曲线 X 等价于 \mathbb{k}^2 中不可约超曲面. 所以存在不可约多项式 $p \in \mathbb{k}[x, y]$ 使得 $X = V(p)$. 我们指出决定仿射曲线的不可约多项式在相伴意义下被曲线本身唯一确定: 如果不可约多项式 $p, q \in \mathbb{k}[x, y]$ 满足 $V(p) = V(q)$, 那么 Hilbert 零点定理表明 $(p) = (q)$. 这说明 p 与 q 相差一非零常数. 一般地, 利用 Hilbert 定理定理易证任给 \mathbb{k}^n 中不可约超曲面 X , 决定 X 的不可约多项式在相伴意义下被曲面唯一确定.

Example 1.6. 设 \mathbb{k} 是域, 如果 $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ 是 1 次多项式, 即形如 $f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n - b$ 的多项式, 这里 a_j 不全为零, 那么也把超曲面 $V(f)$ 称为超平面. 例如 \mathbb{k}^2 中的仿射超曲面就是直线. 域 \mathbb{k} 上任何 n 元线性方程组的解集都可以表示为 \mathbb{k}^n 中有限多个仿射超平面的交. 一般地, 对域 \mathbb{k} 上线性空间 V 上的非零线性函数 $f: V \rightarrow \mathbb{k}$, f 被 $\text{Ker}f = f^{-1}(0)$ 和 $f^{-1}(1)$ 唯一确定. 即若 $f, g: V \rightarrow \mathbb{k}$ 都是非零线性函数, 满足 $f^{-1}(1) = g^{-1}(1)$ 以及 $\text{Ker}f = \text{Ker}g$, 那么 $f = g$. 如果 V 是 \mathbb{k} 上 n 维线性空间, 那么任何非零线性函数 $f: V \rightarrow \mathbb{k}$ 的核的线性维数是 $n - 1$. 反之, V 的任何 $n - 1$ 维线性子空间恰好是 V 上某个非零线性函数的核. 因此一般将 n 维线性空间 V 的 $n - 1$ 维子空间称为 V 中线性超平面. 如果 V 的非空子集 W 满足任给 $w \in W$, $-w + W$ 是线性超平面, 则称 W 是 V 中仿射超平面. 线性超平面是特殊的仿射超平面. 如果 $V = \mathbb{k}^n$, 那么 V 中仿射超平面等价于 \mathbb{k}^n 中超平面 (某个 1 次多项式的零点集). 设 \mathcal{M} 是 n 维光滑流形, 那么任何 \mathcal{M} 上向量场可以可视化为将流形上每个点 p 处赋予一个切向量 $v_p \in T_p\mathcal{M}$. 仿射超曲面使得余切向量场也能够可视化. 根据定义, \mathcal{M} 上的余切向量场将流形上每个点 p 赋予一个余切向量 $w_p \in T_p^*\mathcal{M}$. 而 w_p 被 $w_p^{-1}(0)$ 和 $w_p^{-1}(1)$ 这两个仿射超平面唯一决定, 并注意到 $w_p^{-1}(1)$ 与 $w_p^{-1}(0)$ 是平行的. 所以余切向量场可理解为在每点 p 处赋予切空间 $T_p\mathcal{M}$ 中平行的仿射超平面对 $(w_p^{-1}(0), w_p^{-1}(1))$.

Example 1.7. 设 n 是正整数, 称 $V(x^n + y^n - 1) \subseteq \mathbb{Q}^2$ 是 Fermat 曲线. 易见方程 $x^n + y^n = z^n$ 有非零整数解的充要条件是 $V(x^n + y^n - 1) \neq \emptyset$. Fermat 大定理表明当 $n \geq 3$ 时, $V(x^n + y^n - 1) = \emptyset$.

Example 1.8. 设 n 是正整数, \mathbb{k} 是域, 那么特殊线性群 $\text{SL}_n(\mathbb{k}) = \{A \in \text{M}_n(\mathbb{k}) \mid \det A = 1\}$ 可视作行列式函数在 \mathbb{k}^{n^2} 中的零点集, 故 $\text{SL}_n(\mathbb{k})$ 也是仿射超曲面.

参考文献

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 1977.

[Sha94] I. R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry 1*, volume 2. Springer, 1994.