伴随函子

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 8 月 8 日

伴随函子在数学中无处不在, 在代数学中它是强有力的工具.

1 概念与例子

Definition 1.1 (伴随函子)**.** 设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 是范畴, $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}, G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 是函子. 称 F 是 G 的**右伴随函子** (或 G 是 F **左伴随函子**), 如果存在映射

$$\eta:\mathrm{ob}\mathcal{D}\times\mathrm{ob}\mathcal{C}\to\bigcup_{(X,Y)\in\mathrm{ob}\mathcal{D}\times\mathrm{ob}\mathcal{C}}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GX,Y),\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,FY)),(X,Y)\mapsto\eta_{X,Y},$$

使得 η 对每个变量自然. 这里 η 称为 F 与 G 的**联络** (有时称 $\eta_{X,Y}$ 是**伴随同构**).

Remark 1.2. 容易验证一个函子的左 (右) 伴随函子若存在, 则在自然同构意义下唯一. 如果 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 都是加性范畴, 额外要求定义中 $\eta_{X,Y}$ 是加群同态, 所以这时可直接验证加性范畴间伴随函子必是加性函子.

Example 1.3. 设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 是范畴, $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}, G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 是一对等价函子, 那么 G 是 F 的左伴随函子.

模范畴间的张量函子与 Hom 函子就是一对伴随函子.

Example 1.4. 设 R,R' 是含幺环, ${}_{R'}T_R$ 是 R'-R 双模, 那么 $-\otimes_{R'}T:\mathbf{Mod}\text{-}R'\to\mathbf{Mod}\text{-}R$ 是 $\mathrm{Hom}_R(T_R,-):\mathbf{Mod}\text{-}R\to\mathbf{Mod}\text{-}R'$ 的左伴随函子, $T\otimes_R -:R\text{-}\mathbf{Mod}\to R'\text{-}\mathbf{Mod}$ 是 $\mathrm{Hom}_{R'}({}_{R'}T,-)$ 的左伴随函子.

我们马上来看一个张量函子与 Hom 函子是一对伴随函子的简单应用.

Application 1.5. 设 $\alpha:R\to T$ 是保幺环同态, 于是 T 有自然的 R-T 双模结构并且任何右 T-模可天然视作右 R-模. 如果 ${}_RT$ 平坦 (即这里的环扩张平坦), 那么任何内射右 T-模作为右 R-模也内射.

Proof. 任取内射右 T-模 Q. 考虑自然同构 $\mathrm{Hom}_R(-,Q_R)\cong\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{Hom}_T({}_RT_T,Q_T))\cong\mathrm{Hom}_T(-\otimes_R T,Q_T)\cong\mathrm{Hom}_T(-,Q_T)(-\otimes_R T)$ 是正合函子的合成. 这说明 Q_R 是内射模. □

Remark 1.6. 若含幺环 R 的乘闭子集 S 是右分母集, 那么右局部化 R_S 是平坦左 R-模, 所以我们马上看到任何内射右 R_S-模作为右 R-模也是内射模.

对含幺环 R 的右分母集 S, 我们有局部化函子 $(-)_S: \mathbf{Mod}\text{-}R \to \mathbf{Mod}\text{-}R_S$. 同时, 任何右 R_S-模可天然视作右 R-模, 这给出函子 $F: \mathbf{Mod}\text{-}R_S \to \mathbf{Mod}\text{-}R$, 对固定的右 R-模 X 以及右 R_S-模 Y, 记 $\theta_X: X \to X_S$ 是局部化标准映射. 作

$$\begin{gathered}\eta_{X,Y}: \mathrm{Hom}_{R_S}(X_S, Y) \to \mathrm{Hom}_R(X, FY) \\ \varphi \mapsto \varphi\theta_X\end{gathered}$$

根据局部化的泛性质, 易知 $\eta_{X,Y}$ 是加群同构. 现定义

$$\eta: \mathrm{ob}\mathbf{Mod}\text{-}R \times \mathrm{ob}\mathbf{Mod}\text{-}R_S \to \bigcup_{(X,Y)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{R_S}(X_S, Y), \mathrm{Hom}_R(X, FY)), (X, Y) \mapsto \eta_{X,Y},$$

其中 $(X, Y) \in \mathrm{ob}\mathbf{Mod}\text{-}R \times \mathrm{ob}\mathbf{Mod}\text{-}R_S$. 可直接验证 η 关于变量 X, Y 都是自然的. 因此

Example 1.7. 设 R 是含幺环, S 有右分母集, 那么局部化函子 $(-)_S: \mathbf{Mod}\text{-}R \to \mathbf{Mod}\text{-}R_S$ 与上述将 R_S-模可天然视作右 R-模所定义的函子 $F: \mathbf{Mod}\text{-}R_S \to \mathbf{Mod}\text{-}R$ 是一对伴随函子, F 是 $(-)_S$ 的右伴随.

2 基本性质

设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 是范畴, $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是函子, 并设 F 是 G 的右伴随函子, 并有联络

$$\eta: \mathrm{ob}\mathcal{D} \times \mathrm{ob}\mathcal{C} \to \bigcup_{(B,A) \in \mathrm{ob}\mathcal{D} \times \mathrm{ob}\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GB, A), \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B, FA)), (B, A) \mapsto \eta_{B,A},$$

命

$$\zeta: \mathrm{ob}\mathcal{C} \to \bigcup_{A \in \mathrm{ob}\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GFA, A), A \mapsto \zeta_A = \eta^{-1}_{FA,A}(1_{FA}),$$

$$\xi: \mathrm{ob}\mathcal{D} \to \bigcup_{B \in \mathrm{ob}\mathcal{D}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B, FGB), B \mapsto \xi_B = \eta_{B,GB}(1_{GB}),$$

通过直接验证可知 ζ 是 GF 到 $1_{\mathcal{C}}$ 的自然变换, ξ 是 $1_{\mathcal{D}}$ 到 FG 的自然变换. 并且在固定前面的记号下有

Proposition 2.1. 对任给 $\mathcal{D}$ 中对象 B 和 $\mathcal{C}$ 中对象 A, 有下面两图交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GB, A) \arrow[d, "1"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B, FA) \arrow[l, "\eta^{-1}_{B,A}"'] \arrow[d, "G"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GB, A) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GB, GFA) \arrow[l, "(\eta^{-1}_{FA,A}(1_{FA}))_*"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GB, A) \arrow[r, "\eta_{B,A}"] \arrow[d, "F"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B, FA) \arrow[d, "1"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FGB, FA) \arrow[r, "(\eta_{B,GB}(1_{GB}))^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B, FA)
\end{tikzcd}$$

Foxby Equivalence. 设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 是范畴, $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是函子, 并设 F 是 G 的右伴随函子, 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}$ 中所有使得 $\eta^{-1}_{FA,A}(1_{FA})$ 成为同构的对象 A 构成的全子范畴, $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{D}$ 中所有使得 $\eta_{B,GB}(1_{GB})$ 的对象 B 构成的全子范畴, 那么 F 与 G 可定义合理地限制为 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 间一对等价函子.

3 伴随函子与正合性

本节我们说明 Abel 范畴间的左伴随函子右正合, 右伴随函子左正合. 首先需要

Lemma 3.1. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 是 $\mathcal{A}$ 中态射序列, 则
(1) 态射序列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 正合, 如果对任何 $\mathcal{A}$ 中对象 X, 下述态射序列正合：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C,X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,X)$$

(2) 态射序列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 正合, 如果对任何 $\mathcal{A}$ 中对象 X, 下述态射序列正合：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,C)$$

Proof. (1) 先证 $gf=0$, 为此, 取 $X=C$, 那么由 $f^*g^*(1_C)=0$ 得到 $gf=0$. 再证 $\mathrm{Im}f$ 到 $\mathrm{Ker}g$ 的标准 monic 态 l 是同构. 取 $X=B/\mathrm{Im}f$, $\pi: B\to B/\mathrm{Im}f$ 是标准投射, 那么 $f^*(\pi)=0$, 所以存在 $h\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C,B/\mathrm{Im}f)$ 使得 $g^*(h)=\pi$. 这意味着 $k:\mathrm{Ker}g\to B$ 也是 $\pi: B\to B/\mathrm{Im}f$ 的核, 因此 l 是同构.

(2) 先证 $gf=0$. 取 $X=A$, 进而 $g_*f_*(1_A)=0$ 表明 $gf=0$. 再证 $\mathrm{Im}f$ 到 $\mathrm{Ker}g$ 的标准 monic 态 l 是同构. 取 $X=\mathrm{Ker}g$, 那么标准 monic 态 $k:\mathrm{Ker}g\to B$ 满足 $g_*(k)=0$, 因此存在态射 $h:\mathrm{Ker}g\to A$ 使得 $fh=k$. 这意味着标准 monic 态 $j:\mathrm{Im}f\to B$ 也是 g 的核, 故 l 是同构. □

Proposition 3.2. 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 都是 Abel 范畴, $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是 $G:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ 的右伴随函子, 那么 F 是左正合函子, G 是右正合函子.

Proof. 以 F 为例验证, G 类似可证. 设 F 和 G 间的联络为

$$\eta: \mathrm{ob}\mathcal{B}\times\mathrm{ob}\mathcal{A} \to \bigcup_{(X,Y)\in\mathrm{ob}\mathcal{B}\times\mathrm{ob}\mathcal{A}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GX,Y),\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X,FY)), (X,Y)\mapsto \eta_{X,Y},$$

任取 $\mathcal{A}$ 中正合列 $0\longrightarrow A\xrightarrow{f} B\xrightarrow{g} C$, 需要验证 $0\longrightarrow FA\xrightarrow{Ff} FB\xrightarrow{Fg} FC$ 是 $\mathcal{B}$ 中正合列. 那么对任何 $\mathcal{B}$ 中对象 X, 有下述交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GX,A) & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GX,B) & \xrightarrow{g_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GX,C) \\
 & \downarrow{\scriptstyle \eta_{X,A}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{X,B}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{X,C}} \\
0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X,FA) & \xrightarrow{(Ff)_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X,FB) & \xrightarrow{(Fg)_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X,FC)
\end{array}$$

其中竖直方向态射均为同构, 上行是正合列. 故下行也正合, 再应用前面的引理即得结论. □

参考文献

[PQ18] Zhang Pu and Wu Quanshui. *Basic Algebra Handout(Chinese Edition)*. Higher Education Press, 2018.