

Yoneda 扩张与 Ext 代数初步

戚天成 

复旦大学 数学科学学院

2026 年 2 月 26 日

这份笔记主要用于记录具有足够多投射对象或内射对象的 Abel 范畴中高阶 Ext 群关于 Yoneda 扩张的刻画, 并额外补充了一些 Hopf 代数的 Yoneda 代数的初步内容.

1 回顾: Yoneda 1-扩张

固定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 以及其中对象 X, Y . 回忆 X 被 Y 的一个扩张, 或 **Yoneda 1-扩张**, 是指形如

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

的短正合列. 这里对象 E 也被称为 X 被 Y 扩张的**扩张对象**. 如果有 X 被 Y 的两个扩张:

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow E_1 \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow E_2 \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

称这两个扩张是**等价的**, 如果存在态射 $\gamma: E_1 \rightarrow E_2$ 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 1_Y & & \downarrow \gamma & & \downarrow 1_X & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (1.1)$$

根据五引理, 图(1.1)中的态射 $\gamma: E_1 \rightarrow E_2$ 是同构. 所以上述定义的等价概念定义了所有 X 被 Y 的扩张构成的类上的等价关系 (若 X 被 Y 的扩张 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$ 等价, 记作 $\mathbf{E}_1 \sim \mathbf{E}_2$), 扩张等价类全体记作 $\mathcal{E}(X, Y)$. 若有 X 被 Y 的扩张 $\mathbf{E}_1: 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{g_1} X \longrightarrow 0$ 与扩张 $\mathbf{E}_2: 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{f_2} E_2 \xrightarrow{g_2} X \longrightarrow 0$ 那么

$$0 \longrightarrow Y \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}} E_1 \oplus E_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}} X \oplus X \longrightarrow 0,$$

定义了 $X \oplus X$ 被 $Y \oplus Y$ 的扩张, 称为扩张 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$ 的直和, 记作 $\mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{E}_2$, 一般 $\mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{E}_2$ 和 $\mathbf{E}_2 \oplus \mathbf{E}_1$ 不等价. 回忆满足任何态射有核的加性范畴中拉回总存在; 满足任何态射有余核的加性范畴中推出总存在. 因此我们能

够在 $\mathcal{A}$ 中谈论拉回和推出. 如果有上下两行正合的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow 1_Z \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z \longrightarrow 0 \end{array} \quad (1.2)$$

那么图(1.2)的左边方块既是拉回方块又是推出方块. 类似地, 若有下述上下两行正合的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1_X & & \downarrow \beta & & \downarrow \delta \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \longrightarrow 0 \end{array} \quad (1.3)$$

那么图(1.3)右边的方块既是拉回方块又是推出方块. 故图(1.1)的两边方块都是拉回方块也都是推出方块.

我们也可以利用拉回和推出来构造扩张. 固定扩张 $\mathbf{E} : 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$ 和态射 $h : Y \rightarrow L$. 我们作 f 和 h 的推出方块:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow h' & & \\ & & L & \xrightarrow{f'} & P & & \end{array}$$

那么 f 是 monic 态蕴含 f' 也是 monic 态. 设 $c : P \rightarrow C$ 是 f' 的余核, 那么有唯一的态射 $t : X \rightarrow C$ 使得

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow h' & & \downarrow t \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f'} & P & \xrightarrow{c} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

交换, 并且推出的基本性质表明 t 是同构. 注意到上图的下行给出 C 被 L 的一个扩张. 命 $c' = t^{-1}c$, 则有

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow h' & & \downarrow 1_X \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f'} & P & \xrightarrow{c'} & X \longrightarrow 0 \end{array}$$

是上下两行正合的交换图. 因此 f 和 h 的推出诱导 X 被 L 的一个扩张 $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f'} P \xrightarrow{c'} X \longrightarrow 0$. 并且由推出在同构意义下唯一, 不难看到由 f 和 h 的扩张诱导出的扩张在扩张等价意义下唯一. 我们将前面由推出得到的 X 被 L 的扩张记作 $h\mathbf{E}$. 因为图(1.2)的左边是推出方块, 所以不难验证对扩张 $\mathbf{E}$ 以及态射 $h : Y \rightarrow L, h' : L \rightarrow T$ 有扩张等价

$$(h'h)\mathbf{E} \sim h'(h\mathbf{E}). \quad (1.4)$$

对偶地, 如果有态射 $s : W \rightarrow X$, 考虑 s 和 g 的拉回方块

$$\begin{array}{ccccccc} & & Q & \xrightarrow{g'} & W & & \\ & & \downarrow s' & & \downarrow s & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & X \longrightarrow 0 \end{array}$$

因为 g 是 epic 态, 所以 g' 也是 epic 态. 设 $k: K \rightarrow Q$ 是 g' 的核, 得到上下两行正合的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{k} & Q & \xrightarrow{g'} & W & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow q & & \downarrow s' & & \downarrow s & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

于是 q 是同构, 命 $k' = kq^{-1}: Y \rightarrow Q$, 那么得到下述上下两行正合的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{k'} & Q & \xrightarrow{g'} & W & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 1_Y & & \downarrow s' & & \downarrow s & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

同样由拉回的同构唯一性得到上图的上行定义出的 W 被 Y 的扩张在等价下唯一, 记作 $\mathbf{E}s$. 对任何态射 $s: W \rightarrow X$ 以及 $s': Q \rightarrow W$, 我们也有扩张等价

$$\mathbf{E}(ss') \sim (\mathbf{E}s)s'. \quad (1.5)$$

Example 1.1 ([ZW18]). 设 X, Y 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中对象, $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ 都是 X 被 Y 的扩张. 那么易验证 $\mathbf{E}_1 \sim 1_Y \mathbf{E}_1$ 以及 $\mathbf{E}_2 \sim \mathbf{E}_2 1_X$. 如果有扩张等价 $\mathbf{E}_1 \sim \mathbf{E}'_1$ 以及 $\mathbf{E}_2 \sim \mathbf{E}'_2$, 易见 $\mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{E}_2 \sim \mathbf{E}'_1 \oplus \mathbf{E}'_2$. 如果 $\mathbf{E}_1 \sim \mathbf{E}_2$, 那么对任何态射 $h: Y \rightarrow L$ 和态射 $s: W \rightarrow X$ 有 $h\mathbf{E}_1 \sim h\mathbf{E}_2$ 以及 $\mathbf{E}_1 s \sim \mathbf{E}_2 s$.

之后为了说明在 $\mathcal{E}(X, Y)$ 上有定义合理的加法群结构, 我们需要

Lemma 1.2 ([ZW18]). 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴.

(1) 设 $\mathcal{A}$ 中有上下两行正合的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & Y' & \xrightarrow{f'} & E' & \xrightarrow{g'} & X' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

并记上行的扩张是 $\mathbf{E}$, 下行的扩张是 $\mathbf{E}'$. 那么 $\alpha\mathbf{E} \sim \mathbf{E}'\gamma$.

(2) 设有 X 被 Y 的扩张 $\mathbf{E}: 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$ 以及态射 $s: W \rightarrow X, h: Y \rightarrow L$, 那么 $(h\mathbf{E})s \sim h(\mathbf{E}s)$ (作为 W 被 L 的扩张).

(3) 设有 X 被 Y 的扩张 $\mathbf{E}: 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$, 考虑态射 $\begin{pmatrix} 1_Y \\ 1_Y \end{pmatrix}: Y \rightarrow Y \oplus Y$. 则

$$\begin{pmatrix} 1_Y \\ 1_Y \end{pmatrix} \mathbf{E} \sim \mathbf{E} \oplus \mathbf{E} \begin{pmatrix} 1_X \\ 1_X \end{pmatrix}.$$

类似地, 也有 $(1_Y, 1_Y)(\mathbf{E} \oplus \mathbf{E}) \sim \mathbf{E}(1_X, 1_X)$.

(4) 设 $\mathbf{E}, \mathbf{E}'$ 是 X 被 Y 的扩张, $s: W \rightarrow X, s': W' \rightarrow X'$ 是态射. 那么有

$$\mathbf{E}s \oplus \mathbf{E}'s' \sim (\mathbf{E} \oplus \mathbf{E}') \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s' \end{pmatrix}.$$

类似地, 如果有态射 $h: Y \rightarrow L, h': Y' \rightarrow L'$, 我们有

$$h\mathbf{E} \oplus h'\mathbf{E}' \sim \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix} (\mathbf{E} \oplus \mathbf{E}').$$

(5) 设 $\mathbf{E}, \mathbf{E}'$ 是 X 被 Y 的扩张, 则

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_Y \\ 1_Y & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{E} \oplus \mathbf{E}') \sim (\mathbf{E}' \oplus \mathbf{E}) \begin{pmatrix} 0 & 1_X \\ 1_X & 0 \end{pmatrix}.$$

Proof. (1) 设下图的第一行给出 $\mathbf{E}'\gamma$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y' & \xrightarrow{u} & W & \xrightarrow{v} & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1_{Y'} & & \downarrow t & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & Y' & \xrightarrow{f'} & E' & \xrightarrow{g'} & X' \longrightarrow 0 \end{array}$$

根据条件, $\gamma g = g' \beta$, 所以由拉回的性质, 存在唯一的态射 $t': E \rightarrow W$ 使得 $tt' = \beta$ 以及 $vt' = g$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow t' & & \downarrow 1_X \\ 0 & \longrightarrow & Y' & \xrightarrow{u} & W & \xrightarrow{v} & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1_{Y'} & & \downarrow t & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & Y' & \xrightarrow{f'} & E' & \xrightarrow{g'} & X' \longrightarrow 0 \end{array}$$

下面我们验证 $t'f = u\alpha$, 一旦证明该断言, 则下图的左边是推出方块:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow t' & & \downarrow 1_X \\ 0 & \longrightarrow & Y' & \xrightarrow{u} & W & \xrightarrow{v} & X \longrightarrow 0 \end{array}$$

那么上图的下行给出的扩张 $\mathbf{E}'\gamma$ 与 $\alpha\mathbf{E}$ 等价. 所以要得到 $\alpha\mathbf{E} \sim \mathbf{E}'\gamma$ 只需验证 $t'f = u\alpha$.

但现在 $t'f: Y \rightarrow W$ 满足 $0 = \gamma vt'f = g'tu\alpha = g'tt'f = \gamma v u \alpha$. 另一方面, 也有 $vt'f = gf = 0, tt'f = \beta f = f'\alpha$ 以及 $v u \alpha = 0 = gf, tu\alpha = f'\alpha$, 所以由推出的定义得到 $t'f = u\alpha$.

(2) 设下图的第一行给出 $\mathbf{E}s$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{u} & T & \xrightarrow{v} & W \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1_Y & & \downarrow q & & \downarrow s \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & X \longrightarrow 0 \end{array}$$

再设下图第二行给出 $h\mathbf{E}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow l & & \downarrow 1_X & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{j} & Q & \xrightarrow{p} & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由此结合前面两个交换图, 可应用 (1) 得到 $(h\mathbf{E})s \sim h(\mathbf{E}s)$.

(3) 注意到 $\mathbf{E}$ 到 $\mathbf{E}$ 有 $(1,1)^T$ 诱导的竖直方向的态射给出交换图, 再应用 (1) 即可. 类似可证第二个结论.

(4) 通过考察下面两个态射

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s' \end{pmatrix} : W \oplus W' \rightarrow X \oplus X, \begin{pmatrix} 1_Y & 0 \\ 0 & 1_{Y'} \end{pmatrix} : Y \oplus Y' \rightarrow Y \oplus Y'$$

可以得到一个上行为 $\mathbf{E}s \oplus \mathbf{E}'s'$ 下行为 $\mathbf{E} \oplus \mathbf{E}'$ 的交换图, 由此保证

$$\mathbf{E}s \oplus \mathbf{E}'s' \sim (\mathbf{E} \oplus \mathbf{E}') \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s' \end{pmatrix}.$$

另一种情况可类似处理.

(5) 注意到 $\mathbf{E} \oplus \mathbf{E}'$ 到 $\mathbf{E}' \oplus \mathbf{E}$ 有 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 给出的交换图, 再应用 (1) 得到结论. $\square$

任给 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中对象 X, Y , 若 $\mathbf{E}, \mathbf{E}' \in \mathcal{E}(X, Y)$, 那么 [例1.1] 和 [引理1.2(2)] 表明

$$[\mathbf{E}] + [\mathbf{E}'] := [(1_Y, 1_Y)(\mathbf{E} \oplus \mathbf{E}') \begin{pmatrix} 1_X \\ 1_X \end{pmatrix}] \quad (1.6)$$

是定义合理的 X 被 Y 的扩张等价类 (不依赖于代表元选取), 称之为扩张等价类 $[\mathbf{E}]$ 与 $[\mathbf{E}']$ 的 **Baer** 和. 根据 [引理1.2(5)] 不难验证 Baer 和满足交换律, 利用 [引理1.2(2)(4)], 式(1.4)和式(1.5)可验证

$$([\mathbf{E}] + [\mathbf{E}']) + [\mathbf{E}'] = [\mathbf{E}] + ([\mathbf{E}'] + [\mathbf{E}']).$$

所以 $\mathcal{E}(X, Y)$ 关于扩张等价类的 Baer 和构成交换半群, 命 $\mathbf{0}$ 是下述短正合列所在的等价类:

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_Y \\ 0 \end{pmatrix}} Y \oplus X \xrightarrow{(0, 1_X)} X \longrightarrow 0.$$

那么对任何扩张 $\mathbf{E}: 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$, 扩张 $\mathbf{0} \oplus \mathbf{E}$ 为

$$0 \longrightarrow Y \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}} Y \oplus X \oplus E \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}} X \oplus X \longrightarrow 0.$$

可直接验证对象 $X \oplus E$ 带上态射 $\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}: Y \rightarrow X \oplus E$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}: Y \oplus X \oplus E \rightarrow X \oplus E$ 给出 $\mathbf{0} \oplus \mathbf{E}$ 左边的 monic 态与 $(1, 1): Y \oplus Y \rightarrow Y$ 的推出. 于是下图的下行给出 $(1, 1)(\mathbf{0} \oplus \mathbf{E})$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} g \\ 1 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}} & X \oplus E & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}} & X \oplus X & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (1.7)$$

图(1.7)的交换性保证了右边的方块是拉回, 所以 $\mathbf{E}$ 等价于 $(1, 1)(\mathbf{0}, \mathbf{E}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 这说明

扩张等价类全体 $\mathcal{E}(X, Y)$ 只要是集合, 便关于 Baer 和构成以 $[0]$ 为零元的交换幺半群.

不难验证 $0\mathbf{E} \sim \mathbf{0}$, 所以 $[0] = [0\mathbf{E}]$, 应用下面的 [引理1.3] 便知 $[0] = [1\mathbf{E}] + [(-1)\mathbf{E}] = [\mathbf{E}] + [(-1)\mathbf{E}]$.

Lemma 1.3 ([ZW18]). 设 $\mathbf{E}$ 是 X 被 Y 的扩张, $h, h' : Y \rightarrow L$ 是态射. 那么 $[(h + h')\mathbf{E}] = [h\mathbf{E}] + [h'\mathbf{E}]$.

Proof. 我们计算

$$\begin{aligned}
[(h + h')\mathbf{E}] &= [(h, h') \begin{pmatrix} 1_Y \\ 1_Y \end{pmatrix} \mathbf{E}] \\
&= [(h, h')(\mathbf{E} \oplus \mathbf{E}) \begin{pmatrix} 1_X \\ 1_X \end{pmatrix}] && \text{利用 [引理1.2(3)]} \\
&= [(1_Y, 1_Y) \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix} (\mathbf{E} \oplus \mathbf{E}) \begin{pmatrix} 1_X \\ 1_X \end{pmatrix}] \\
&= [(1_Y, 1_Y)(h\mathbf{E} \oplus h'\mathbf{E}) \begin{pmatrix} 1_X \\ 1_X \end{pmatrix}] && \text{利用 [引理1.2(4)]} \\
&= [h\mathbf{E}] + [h'\mathbf{E}].
\end{aligned}$$

□

因此前面的讨论表明扩张等价类全体 $\mathcal{E}(X, Y)$ 只要是集合, 便关于 Baer 和构成以 $[0]$ 为零元的加法群, 注意到 X 被 Y 的扩张 $\mathbf{E}$ 是可裂的当且仅当 $\mathbf{E} \sim \mathbf{0}$. 下面我们说明有足够多投射对象或有足够多内射对象的 Abel 范畴中, $\mathcal{E}(X, Y)$ 不仅是集合, 也与 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y)$ 有加群同构.

Theorem 1.4 (扩张等价类与 1 阶 Ext 群, [ZW18]). 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象或有足够多内射对象的 Abel 范畴, X, Y 是 $\mathcal{A}$ 中对象. 那么 $\mathcal{E}(X, Y)$ 是集合且有加群同构 $\mathcal{E}(X, Y) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y)$.

Proof. 这里仅处理 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象的情形. 可设有短正合列 $0 \longrightarrow K \xrightarrow{j} P \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$, 其中 P 是投射对象, 将该短正合列记作 $\mathbf{P}$. 因为 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(P, Y) = 0$, 所以我们有正合列

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \xrightarrow{\pi^*} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Y) \xrightarrow{j^*} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K, Y) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y) \longrightarrow 0.$$

这说明 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y)$ 给出态射 j^* 的余核对象, 所以只要建立 $\text{Coker } j^*$ 和 $\mathcal{E}(X, Y)$ 之间的保持加法的双射便能够得到加群同构 $\mathcal{E}(X, Y) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y)$. 定义映射 $\phi : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K, Y) \rightarrow \mathcal{E}(X, Y)$, $f \mapsto [f\mathbf{P}]$. 易知 $\phi(0) = \mathbf{0}$. 下面我们说明 ϕ 是满射, 一旦证明该断言, 由 Bernays-Gödel 公理系统中的替换公理得到 $\mathcal{E}(X, Y)$ 是集合, 并且 [引理1.3] 保证了 ϕ 是加群同态. 任取 X 被 Y 的扩张 $\mathbf{E} : 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$, 由 g 是 epic 态以及 P 是投射对象得到有态射 $s : P \rightarrow E$ 使得 $gs = \pi$.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{j} & P & \xrightarrow{\pi} & X \longrightarrow 0 \\
& & & & \downarrow s & & \downarrow 1_X \\
0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & X \longrightarrow 0
\end{array}$$

因此我们得到唯一的态射 $t: K \rightarrow Y$ 使得 $ft = sj$, 即有下述交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{j} & P & \xrightarrow{\pi} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow t & & \downarrow s & & \downarrow 1_X & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

所以上图左边的方块是推出, 进而 $t\mathbf{P} \sim \mathbf{E}$. 我们得到 ϕ 是满射.

现在对任何态射 $\ell: P \rightarrow Y$, 总有下列交换图 (下行是标准的可裂短正合列):

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{j} & P & \xrightarrow{\pi} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \ell j & \nearrow \ell & \downarrow \left(\begin{smallmatrix} \ell \\ \pi \end{smallmatrix}\right) & & \downarrow 1_X & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Y \oplus X & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

所以 $\phi(\text{Im}j^*) = [\mathbf{0}]$, 由此得到满加群同态 ϕ 诱导加群同态 $\bar{\phi}: \text{Coker}j^* = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K, Y)/\text{Im}j^* \rightarrow \mathcal{E}(X, Y)$, $f + \text{Im}j^* \mapsto [f\mathbf{P}]$. 下面我们通过验证满加群同态 ϕ 是单射来得到结论. 设态射 $f: K \rightarrow Y$ 满足 $[f\mathbf{P}] = [\mathbf{0}]$. 下证 $f \in \text{Im}j^*$ 来得到 $\bar{\phi}$ 是单射. 设下图的下行给出 $f\mathbf{P}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{j} & P & \xrightarrow{\pi} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow 1_X & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{\ell} & Q & \xrightarrow{p} & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

根据假设, 下行是可裂短正合列, 所以存在态射 $t: Q \rightarrow Y$ 使得 $1_Y = t\ell$. 进而 $\ell f = gj$ 蕴含 $f = tgj \in \text{Im}j^*$. 因此 $\bar{\phi}$ 是单射, 给出加群同构 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y) \cong \text{Coker}j^* \cong \mathcal{E}(X, Y)$. $\square$

2 推广: Yoneda n -扩张

固定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 以及对象 X, Y , 再设 n 是正整数. 称下述形式的正合列为 X 被 Y 的 **Yoneda n -扩张**:

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow K^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow K^{-1} \longrightarrow K^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

当 $n=1$ 时, 回到 X 被 Y 的扩张/Yoneda 1-扩张的概念. 为了方便将 Yoneda n -扩张简称为 n -扩张.

设有两个 n -扩张 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{K}'$:

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow K^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow K^{-1} \longrightarrow K^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow (K')^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow (K')^{-1} \longrightarrow (K')^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

如果存在下述形式的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & K^{-n+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & K^{-1} & \longrightarrow & K^0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 1_Y & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1_X & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & (K')^{-n+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & (K')^{-1} & \longrightarrow & (K')^0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

那么记 $\mathbf{K} \rightsquigarrow \mathbf{K}'$ 或 $\mathbf{K}' \leftrightsquigarrow \mathbf{K}$. 如果 X 被 Y 的 n -扩张 $\mathbf{E}, \mathbf{E}'$ 满足存在一系列 n -扩张 $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k$ 使得

$$\mathbf{E} \rightsquigarrow \mathbf{E}_1 \leftrightsquigarrow \mathbf{E}_2 \rightsquigarrow \cdots \leftrightsquigarrow \mathbf{E}_{k-1} \rightsquigarrow \mathbf{E}_k \leftrightsquigarrow \mathbf{E}',$$

那么定义 $\mathbf{E} \sim \mathbf{E}'$. 易见 $\sim$ 在所有 X 被 Y 的 Yoneda n -扩张构成的类上定义了等价关系, n -扩张 $\mathbf{E}$ 所在的等价类记作 $[\mathbf{E}]$, X 被 Y 所有的 n -扩张等价类记作 $\mathcal{E}^n(X, Y)$. 如果 X 被 Y 的 n -扩张 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{E}'$ 满足 $\mathbf{E} \rightsquigarrow \mathbf{E}'$, 那么 $\mathbf{E} \sim \mathbf{E}'$: 因为总有 $\mathbf{E}' \rightsquigarrow \mathbf{E}'$, 所以有 $\mathbf{E} \rightsquigarrow \mathbf{E}' \rightsquigarrow \mathbf{E}'$, 我们得到 $\mathbf{E} \sim \mathbf{E}'$.

如果有 n -扩张 $0 \longrightarrow Y \longrightarrow K^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow K^{-1} \longrightarrow K^0 \xrightarrow{s} X \longrightarrow 0$ 和 m -扩张

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{t} E^{-m+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{-1} \longrightarrow E^0 \longrightarrow W \longrightarrow 0,$$

那么我们得到 W 被 Y 的 $(n+m)$ -扩张 (如果 n -扩张记作 $\mathbf{K}$, m -扩张记作 $\mathbf{E}$, 那么下面的扩张记作 $\mathbf{KE}$)

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow K^{-n} \longrightarrow \cdots \longrightarrow K^{-1} \xrightarrow{t} K^0 \xrightarrow{ts} E^{-m+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^0 \longrightarrow W \longrightarrow 0.$$

如果 X 被 Y 的 n -扩张 $\mathbf{K}, \mathbf{K}'$ 等价, W 被 X 的 m -扩张 $\mathbf{E}, \mathbf{E}'$, 易验证 $\mathbf{KE} \sim \mathbf{K'E'}$. 所以

$$\mathcal{E}^n(X, Y) \times \mathcal{E}^m(W, X) \rightarrow \mathcal{E}^{n+m}(W, Y), ([\mathbf{K}], [\mathbf{E}]) \mapsto [\mathbf{KE}]$$

是定义合理的映射, 称该映射是扩张等价类的 **Yoneda 积**, 易见 Yoneda 积满足结合律.

对 $n \geq 2$, 任何 n -扩张都可以分解为长度更短的扩张的 Yoneda 积. 具体地, 考虑 n -扩张 $\mathbf{E}$:

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow E^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{-1} \longrightarrow E^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

对 $-n+1 \leq i \leq -1$, 记上面 E^i 到 E^{i+1} 的态射为 $d^i: E^i \rightarrow E^{i+1}$. 记 $K^i = \text{Im}d^i = \text{Ker}d^{i+1}$, 那么 $\mathbf{E}$ 可表示为下面两个高阶 Yoneda 扩张的 Yoneda 积:

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow E^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^i \longrightarrow K^i \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow K^i \longrightarrow E^{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

于是 $\mathbf{E}$ 可以表示为 n 个 Yoneda 1-扩张的 Yoneda 积. 设有分解 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{n-1} \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_0$, 其中

$$\mathbf{E}_{n-1}: 0 \longrightarrow Y \longrightarrow E^{-n+1} \longrightarrow K^{-n+1} \longrightarrow 0,$$

$$\mathbf{E}_{n-2}: 0 \longrightarrow K^{-n+1} \longrightarrow E^{-n+2} \longrightarrow K^{-n+1} \longrightarrow 0,$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{E}_1: 0 \longrightarrow K^{-2} \longrightarrow E^{-1} \longrightarrow K^{-1} \longrightarrow 0,$$

$$\mathbf{E}_0: 0 \longrightarrow K^{-1} \longrightarrow E^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

对任何态射 $h: Y \rightarrow L$ 和 $s: W \rightarrow X$, 可定义

$$h\mathbf{E} := (h\mathbf{E}_{n-1})\mathbf{E}_{n-2} \cdots \mathbf{E}_1\mathbf{E}_0, \quad \mathbf{E}s := \mathbf{E}_{n-1}\mathbf{E}_{n-2} \cdots \mathbf{E}_1(\mathbf{E}_0s). \quad (2.1)$$

这里定义的 $h\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{E}s$ 在 n -扩张等价下唯一. 易知对任何正整数 $n \geq 2$ 有

$$(h\mathbf{E})s \sim h(\mathbf{E}s). \quad (2.2)$$

在 [引理1.2(2)] 中我们已经得到式(2.2)对 1-扩张也成立.

Example 2.1 ([ZW18]). 设有扩张 $\mathbf{E}: 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} X \longrightarrow 0$, 态射 $g: W \rightarrow X$ 以及扩张

$$\mathbf{F}: 0 \longrightarrow W \xrightarrow{\ell} F \xrightarrow{t} Z \longrightarrow 0.$$

我们说明有 $(\mathbf{E}g)\mathbf{F} \rightsquigarrow \mathbf{E}(g\mathbf{F})$: 首先 $\mathbf{E}g$ 可由下图的上行给出:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{j} & Q & \xrightarrow{p} & W \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1_Y & & \downarrow s & & \downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{u} & E & \xrightarrow{v} & X \longrightarrow 0 \end{array}$$

其次扩张 $g\mathbf{F}$ 由下图的下行给出:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & W & \xrightarrow{\ell} & F & \xrightarrow{t} & Z \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g & & \downarrow \sigma & & \downarrow 1_Z \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\lambda} & T & \xrightarrow{\xi} & Z \longrightarrow 0 \end{array}$$

于是下述交换图说明有 $(\mathbf{E}g)\mathbf{F} \rightsquigarrow \mathbf{E}(g\mathbf{F})$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{j} & Q & \xrightarrow{\ell p} & F \xrightarrow{t} Z \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1_Y & & \downarrow s & & \downarrow \sigma \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{u} & E & \xrightarrow{\lambda v} & T \xrightarrow{\xi} Z \longrightarrow 0 \end{array}$$

我们也可以类似 Yoneda 1-扩张情形通过分量直和来定义高阶 Yoneda 扩张的直和. 利用高阶 Yoneda 扩张的典范分解以及拉回和推出的基本性质, 我们不难导出 [引理1.2] 相应的结论:

Lemma 2.2 ([ZW18]). 设 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{E}'$ 都是 X 被 Y 的 n -扩张. 那么

- (1) $\mathbf{E} \rightsquigarrow \mathbf{E}'$ 当且仅当 $1_Y \mathbf{E} \rightsquigarrow \mathbf{E}'$, 也当且仅当 $\mathbf{E} \rightsquigarrow \mathbf{E}' 1_X$.
- (2) 如果 $\mathbf{E} \rightsquigarrow \mathbf{E}'$ 且 $\mathbf{F} \rightsquigarrow \mathbf{F}'$, 那么 $\mathbf{E} \oplus \mathbf{F} \rightsquigarrow \mathbf{E}' \oplus \mathbf{F}'$.
- (3) 如果 $\mathbf{E} \rightsquigarrow \mathbf{E}'$, 那么对任给态射 $h: Y \rightarrow L$ 和 $s: W \rightarrow X$ 有 $h\mathbf{E} \rightsquigarrow h\mathbf{E}'$ 以及 $\mathbf{E}s \rightsquigarrow \mathbf{E}'s$.
- (4) 如果有态射 $h: Y \rightarrow L, h': L \rightarrow Q, s: W \rightarrow X, s': T \rightarrow W$, 那么 $h'h\mathbf{E} \rightsquigarrow h'(h\mathbf{E})$ 且 $\mathbf{E}(ss') \rightsquigarrow (\mathbf{E}s)s'$.
- (5) 有

$$\begin{pmatrix} 1_Y \\ 1_Y \end{pmatrix} \mathbf{E} \rightsquigarrow (\mathbf{E} \oplus \mathbf{E}) \begin{pmatrix} 1_X \\ 1_X \end{pmatrix}, \quad (1_Y, 1_Y)(\mathbf{E} \oplus \mathbf{E}) \rightsquigarrow \mathbf{E}(1_X, 1_X).$$

- (6) 如果 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{F}'$ 都是 Z 被 X 的 n -扩张, 那么 $(\mathbf{E} \oplus \mathbf{E}')(\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}') \rightsquigarrow \mathbf{E}\mathbf{F} \oplus \mathbf{E}'\mathbf{F}'$.
- (7) 设 $s: W \rightarrow X, s': W' \rightarrow X'$ 是态射. 那么有

$$\mathbf{E}s \oplus \mathbf{E}'s' \sim (\mathbf{E} \oplus \mathbf{E}') \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s' \end{pmatrix}.$$

类似地, 如果有态射 $h: Y \rightarrow L, h': Y' \rightarrow L'$, 我们有

$$h\mathbf{E} \oplus h'\mathbf{E}' \sim \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix} (\mathbf{E} \oplus \mathbf{E}').$$

(8) 有

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_Y \\ 1_Y & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{E} \oplus \mathbf{E}') \sim (\mathbf{E}' \oplus \mathbf{E}) \begin{pmatrix} 0 & 1_X \\ 1_X & 0 \end{pmatrix}.$$

现在对任何 $\mathbf{E}, \mathbf{E}' \in \mathcal{E}^n(X, Y)$, 可同样用式(1.6)来定义 Baer 和 $[\mathbf{E}] + [\mathbf{E}']$. 利用式(2.2)和 [引理2.2(2)(3)] 可验证 Yoneda n -扩张的 Baer 和定义合理. 使用 [引理2.2] 可类似 1-扩张情形得到 $\mathcal{E}^n(X, Y)$ 只要是集合, 便关于 Baer 和构成交换半群. 之后将说明 $\mathcal{E}^n(X, Y)$ 只要是集合, 便关于 Baer 和构成加法群.

Proposition 2.3 (Baer 和与 Yoneda 积的相容性, [ZW18]). 设 $\mathbf{E}, \mathbf{E}'$ 都是 X 被 Y 的 n -扩张, $\mathbf{F}$ 是 W 被 X 的 m -扩张. 那么 $([\mathbf{E}] + [\mathbf{E'}])[\mathbf{F}] = [\mathbf{EF}] + [\mathbf{E'F}]$. 类似地, 对 Y 被 Z 的 m -扩张 $\mathbf{K}$, 有 $[\mathbf{K}]([\mathbf{E}] + [\mathbf{E'}]) = [\mathbf{KE}] + [\mathbf{KE'}]$.

Proof. 由 Baer 和的定义以及式(2.2), $([\mathbf{E}] + [\mathbf{E'}])[\mathbf{F}] = [(1_Y, 1_Y)(\mathbf{E} \oplus \mathbf{E'}) \left(\begin{smallmatrix} 1_X \\ 1_X \end{smallmatrix} \right) F]$, 结合 [引理2.2(5)(6)] 得到

$$([\mathbf{E}] + [\mathbf{E'}})[\mathbf{F}] = [(1_Y, 1_Y)(\mathbf{EF} \oplus \mathbf{E'F}) \left(\begin{smallmatrix} 1_W \\ 1_W \end{smallmatrix} \right)].$$

而 Baer 和的定义表明上式等号右边就是 $[\mathbf{EF}] + [\mathbf{E'F}]$. 类似可证第二个结论. $\square$

下面设正整数 $n \geq 2$, 如下定义扩张等价类 $[\mathbf{0}] \in \mathcal{E}^n(X, Y)$: 当 $n = 2$ 时, $[\mathbf{0}]$ 表示下述扩张所在等价类:

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{1_Y} Y \xrightarrow{0} X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0.$$

当 $n \geq 3$ 时, $[\mathbf{0}]$ 表示下述扩张所在等价类:

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{1_Y} Y \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0.$$

下面我们验证对任何 n -扩张 $[\mathbf{E}]$ 有 $[\mathbf{0}] + [\mathbf{E}] = [\mathbf{E}]$ 来得到 $[\mathbf{0}]$ 是交换半群 $\mathcal{E}^n(X, Y)$ 的单位元. 记

$$t^{-n} = \begin{pmatrix} 1_Y & 0 \\ 0 & d^{-n} \end{pmatrix} : Y \oplus Y \rightarrow Y \oplus E^{-n+1}$$

$$\ell^0 = \begin{pmatrix} 1_X & 0 \\ 0 & d^{-0} \end{pmatrix} : X \oplus E^0 \rightarrow X \oplus X,$$

那么下面的交换图的下行给出 $(1_Y, 1_Y)(\mathbf{0} \oplus \mathbf{E})$:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y \oplus Y & \xrightarrow{t^{-n}} & Y \oplus E^{-n+1} & \longrightarrow & E^{-n+2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & E^{-1} & \longrightarrow & X \oplus E^0 & \xrightarrow{\ell^0} & X \oplus X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow (1_Y, 1_Y) & & \downarrow (d^{-n}, 1_{E^{-n+1}}) & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \downarrow 1_{X \oplus X} & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{d^{-n}} & E^{-n+1} & \longrightarrow & E^{-n+2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & E^{-1} & \longrightarrow & X \oplus E^0 & \longrightarrow & X \oplus X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由此易知 $\mathbf{E}$ 给出 $(1_Y, 1_Y)(\mathbf{0} \oplus \mathbf{E}) \left(\begin{smallmatrix} 1_X \\ 1_X \end{smallmatrix} \right)$, 所以 $[\mathbf{0}] + [\mathbf{E}] = [\mathbf{E}]$, 我们得到

扩张等价类全体 $\mathcal{E}^n(X, Y)$ 只要是集合, 便关于 Baer 和构成以 $[\mathbf{0}]$ 为单位元交换么半群.

现在任取 X 被 Y 的 n -扩张 $\mathbf{E}, \mathbf{E}'$ 和态射 $h, h' : X \rightarrow L$, 通过将 $\mathbf{E}, \mathbf{E}'$ 表示为 1-扩张的 Yoneda 积再利用 [引理1.3] 得到

$$[(h + h')\mathbf{E}] = [h\mathbf{E}] + [h'\mathbf{E}]. \quad (2.3)$$

而不难看到 $[0\mathbf{E}] = [\mathbf{0}]$, 所以应用式(2.3)以及 $[1_Y\mathbf{E}] = [\mathbf{E}]$ 可知 $[\mathbf{E}] + [(-1)\mathbf{E}] = [\mathbf{0}]$, 所以前面证明了

如果 $\mathcal{E}^n(X, Y)$ 是集合, 那么它关于 Baer 和构成以 $[0]$ 为单位元的加法群.

我们当然也有 [定理1.4] 对高阶 Yoneda 扩张的相应版本.

Theorem 2.4 (高阶 Yoneda 扩张与 Ext 群, [ZW18]). 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象或有足够多内射对象的 Abel 范畴, X, Y 是 $\mathcal{A}$ 中对象且正整数 $n \geq 2$. 那么 $\mathcal{E}^n(X, Y)$ 是集合, 带上 Baer 和是交换群且有群同构

$$\mathcal{E}^n(X, Y) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y).$$

Proof. 我们仅处理 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象的情形. 取定对象 X 的投射分解

$$\dots \longrightarrow P^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} \dots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{d^0} X \longrightarrow 0.$$

命 $K^{-n} := \text{Im} d^{-n}$, 那么我们得到正合列 (记作 $\mathbf{P}$)

$$0 \longrightarrow K^{-n} \xrightarrow{j} P^{-n+1} \xrightarrow{d^{-n+1}} \dots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{d^0} X \longrightarrow 0. \quad (2.4)$$

那么 $\mathbf{P}$ 是一个 X 被 K^{-n} 的 Yoneda n -扩张. 由于 $P^{-n-1} \xrightarrow{d^{-n-1}} P^{-n} \xrightarrow{d^{-n}|} K^{-n} \longrightarrow 0$ 正合, 得到

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K^{-n}, Y) \xrightarrow{(d^{-n}|)^*} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P^{-n}, Y) \xrightarrow{(d^{-n-1})^*} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P^{-n-1}, Y)$$

是正合的. 特别地, 态射 $(d^{-n}|)^* : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K^{-n}, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P^{-n}, Y)$ 是 $(d^{-n-1})^*$ 的核.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Im}(d^{-n})^* & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \dots \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P^{-n+1}, Y) & \xrightarrow{(d^{-n})^*} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P^{-n}, Y) & \xrightarrow{(d^{-n-1})^*} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P^{-n-1}, Y) \\ & \searrow j^* & & \nearrow (d^{-n}|)^* & \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K^{-n}, Y) & & \\ & \nearrow & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$

于是不难看到 $\text{Coker} j^*$ 可用于计算 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$. 我们能够显式写出加群同构:

$$\begin{aligned} \text{Coker} j^* &= \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K^{-n}, Y) / \text{Im} j^* \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y) = \text{Ker}(d^{-n-1})^* / \text{Im}(d^{-n})^* \\ f + \text{Im} j^* &\mapsto f(d^{-n}|) + \text{Im}(d^{-n})^*. \end{aligned} \quad (2.5)$$

命 $\phi : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K^{-n}, Y) \rightarrow \mathcal{E}^n(X, Y)$, $f \mapsto [f\mathbf{P}]$, 由式(2.3)得到映射 ϕ 保持加法. 对任何态射 $f : P^{-n+1} \rightarrow Y$, 下述交换图说明 $\phi(\text{Im} j^*) = 0$:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & K^{-n} & \xrightarrow{j} & P^{-n+1} & \longrightarrow & P^{-n+2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P^{-1} & \longrightarrow & P^0 & \xrightarrow{d^0} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f j & \swarrow f & \downarrow f & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow d^0 & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{1_Y} & Y & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{1_X} & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

所以 ϕ 诱导映射 $\bar{\phi} : \text{Coker} j^* \rightarrow \mathcal{E}^n(X, Y)$, $f + \text{Im} j^* \mapsto [f\mathbf{P}]$. 对任何 X 被 Y 的 n -扩张 $\mathbf{E}$:

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow E^{-n+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow E^{-1} \longrightarrow E^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

根据比较引理的证明过程, 总存在态射 $f: K^{-n} \rightarrow Y$ 以及下述形式的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & K^{-n} & \xrightarrow{j} & P^{-n+1} & \xrightarrow{d^{-n+1}} & \cdots & \longrightarrow & P^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & P^0 & \xrightarrow{d^0} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1_X & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E^{-n+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & E^{-1} & \longrightarrow & E^0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

并且如果还有态射 $g: K^{-n} \rightarrow Y$ 满足存在上述形式的交换图, 则 $f - g \in \text{Im}j^*$. 下证有定义合理的映射

$$\psi: \mathcal{E}^n(X, Y) \rightarrow \text{Coker}j^*, [\mathbf{E}] \mapsto f + \text{Im}j^*.$$

根据前面的讨论, 只需验证当 $\mathbf{E} \sim \mathbf{E}'$ 时, 用 $[\mathbf{E}]$ 和 $[\mathbf{E}']$ 定义出的态射 $f: K^{-n} \rightarrow Y$ 以及 $f': K^{-n} \rightarrow Y$ 有

$$f - f' \in \text{Im}j^*.$$

易见我们只需处理 $\mathbf{E} \rightsquigarrow \mathbf{E}'$ 或 $\mathbf{E} \leftarrow \mathbf{E}'$ 的情形. 当 $\mathbf{E} \rightsquigarrow \mathbf{E}'$ 时, 结论明显成立. 当 $\mathbf{E} \leftarrow \mathbf{E}'$ 时, 可得下述形式的交换图 (这里 $\mu^j: (E')^j \rightarrow E^j$ 来自 $\mathbf{E} \leftarrow \mathbf{E}'$ 的条件, 虚线态射来自所在三角形截面态射的合成):

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & K^{-n} & \xrightarrow{j} & P^{-n+1} & \xrightarrow{d^{-n+1}} & \cdots & \longrightarrow & P^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & P^0 & \xrightarrow{d^0} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow \zeta^{-n+1} & & & & \downarrow \zeta^{-1} & & \downarrow \zeta^0 & & \downarrow 1_X & & \\ 0 & \xrightarrow{f'} & Y & \longrightarrow & (E')^{-n+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & (E')^{-1} & \longrightarrow & (E')^0 & \xrightarrow{1_X} & X & \longrightarrow & 0 \\ & \swarrow 1_X & \searrow \mu^{-n+1} & & \swarrow \mu^{-1} & & \swarrow \mu^0 & & \swarrow 1_X & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E^{-n+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & E^{-1} & \longrightarrow & E^0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

于是由前面的讨论可知 $\mathbf{E} \leftarrow \mathbf{E}'$ 也有 $f - f' \in \text{Im}j^*$. 故映射 $\psi: \mathcal{E}^n(X, Y) \rightarrow \text{Coker}j^*$ 定义合理.

容易验证 $\psi\bar{\phi}$ 是 $\text{Coker}j^*$ 上恒等映射, 下面验证 $\bar{\phi}\psi$ 是 $\mathcal{E}^n(X, Y)$ 上恒等映射来得到结论. 任取 X 被 Y 的 n -扩张 $\mathbf{E}: 0 \longrightarrow Y \longrightarrow E^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{-1} \longrightarrow E^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$, 再设有交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & K^{-n} & \xrightarrow{j} & P^{-n+1} & \xrightarrow{d^{-n+1}} & \cdots & \longrightarrow & P^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & P^0 & \xrightarrow{d^0} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow \gamma^{-n+1} & & & & \downarrow \gamma^{-1} & & \downarrow \gamma^0 & & \downarrow 1_X & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{s} & E^{-n+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & E^{-1} & \longrightarrow & E^0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

我们断言 $f\mathbf{P} \rightsquigarrow \mathbf{E}$, 一旦证明该断言便知 $[\mathbf{E}] = [f\mathbf{P}] = \bar{\phi}\psi([\mathbf{E}])$. 现在下图的下行给出 $f\mathbf{P}$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & K^{-n} & \xrightarrow{j} & P^{-n+1} & \xrightarrow{d^{-n+1}} & P^{-n+2} & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{d^{-1}} & P^0 & \xrightarrow{d^0} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow h & & \downarrow 1_{P^{-n+2}} & & & & \downarrow 1_{P^0} & & \downarrow 1_X & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{t} & Q & \longrightarrow & P^{-n+2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P^0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

根据推出的定义, 存在唯一的态射 $q: Q \rightarrow E^{-n+1}$ 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} K^{-n} & \xrightarrow{j} & P^{-n+1} \\ \downarrow f & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{t} & Q \\ & \searrow q & \downarrow \gamma^{-n+1} \\ & & E^{-n+1} \end{array}$$

s (从 Y 到 E^{-n+1} 的曲线箭头)

现在考察下面的交换图便知 $f\mathbf{P} \rightsquigarrow \mathbf{E}$, 得到断言:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & K^{-n} & \xrightarrow{j} & P^{-n+1} & \xrightarrow{d^{-n+1}} & P^{-n+2} & \longrightarrow & \dots & \xrightarrow{d^{-1}} & P^0 & \xrightarrow{d^0} & X & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow f & & \downarrow h & & \downarrow 1_{P^{-n+2}} & & & & \downarrow 1_{P^0} & & \downarrow 1_X & & \\
0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{t} & Q & \longrightarrow & P^{-n+2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P^0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow 1_Y & & \downarrow q & & \downarrow \gamma^{-n+2} & & & & \downarrow \gamma^0 & & \downarrow 1_X & & \\
0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{s} & E^{-n+1} & \longrightarrow & E^{-n+2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E^0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

因此我们得到 $\bar{\phi}$ 和 ψ 是互逆的映射, 进而 $\mathcal{E}^n(X, Y)$ 是集合, 于是 $\mathcal{E}^n(X, Y)$ 关于 Baer 和构成加法群. 现在由 $\bar{\phi}$ 保持加法得到加群同构 $\mathcal{E}^n(X, Y) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$. $\square$

Remark 2.5. 保持前面的记号. 根据 [定理1.4] 和 [定理2.4] 的证明过程, 当 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象时, 对正整数 n , 每个态射 $f: K^{-n} \rightarrow Y$, 对应的 n -扩张就是 $[f\mathbf{P}]$, 其中 $\mathbf{P}$ 是下述正合列:

$$0 \longrightarrow K^{-n} \xrightarrow{j} P^{-n+1} \xrightarrow{d^{-n+1}} \dots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{d^0} X \longrightarrow 0,$$

这里 $K^{-n} = \text{Im}d^{-n} = \text{Ker}d^{-n+1}$ 且 $(d^{-n})^*: \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K^{-n}, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P^{-n}, Y)$ 是加群嵌入. 于是态射 $f: K^{-n} \rightarrow Y$ 对应 $f(d^{-n}) \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P^{-n}, Y)$, 任何 $\text{Ker}(d^{-n-1})^*$ 中的态射都具有该形式. 任给扩张 $\mathbf{E}$:

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow E^{-n+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow E^{-1} \longrightarrow E^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

存在态射 $f: K^{-n} \rightarrow Y$ 以及下述形式的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & K^{-n} & \xrightarrow{j} & P^{-n+1} & \xrightarrow{d^{-n+1}} & \dots & \longrightarrow & P^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & P^0 & \xrightarrow{d^0} & X & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow f & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1_X & & \\
0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E^{-n+1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E^{-1} & \longrightarrow & E^0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

于是(2.5)说明扩张 $\mathbf{E}$ 对应 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y) \cong \text{Ker}(d^{-n-1})^* / \text{Im}(d^{-n})^*$ 中的上同调类为 $f(d^{-n}) + \text{Im}(d^{-n})^*$.

对一般的 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, 只要导出范畴 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 存在, 即态射类都是集合, 那么 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ 可被定义为 $\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, Y[n])(= \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(X, Y[n]))$. 这时, 任何 $\mathcal{A}$ 中对象之间的态射 $f: X \rightarrow X'$ 诱导的加群同态 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(f, Y): \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X', Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ 是 $f^*: \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(X', Y[n]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(X, Y[n]), \alpha \mapsto \alpha f$, 对第二分量上对象间的态射也有相应说明. 下面我们谈论 Abel 范畴的导出范畴时, 默认所有态射类是集合. 当 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象或有足够多内射对象的 Abel 范畴时, 这与原本的 Ext 群定义一致:

如果我们取定对象 X 的投射分解 $\dots \longrightarrow P^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} \dots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{\varepsilon} X \longrightarrow 0$, 并记 $P^\bullet$ 是复形: $\dots \longrightarrow P^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} \dots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \longrightarrow 0$. 那么 $P^\bullet$ 到 $Y[n]$ 的链映射集中在 n 次位置. 对任何 $f + \text{Im}(d^{-n})^* \in \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$, 记 $\tilde{f}$ 是 f 诱导的 $P^\bullet$ 到 $Y[n]$ 的链映射, $\tilde{\varepsilon}$ 表示 $P^\bullet$ 到 $X = X[0]$ 的拟同构, 那么标准加群同构 $\theta: \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, Y[n])$ 满足

$$\theta(f + \text{Im}(d^{-n})^*) = \tilde{f}\tilde{\varepsilon}^{-1} \quad (2.6)$$

下面我们给出 $\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, Y[n])$ 和 $\mathcal{E}^n(X, Y)$ 之间加群同构的对应. 任给 $[\mathbf{E}] \in \mathcal{E}^n(X, Y)$, 其中 $\mathbf{E}$ 为

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow E^{-n+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow E^{-1} \longrightarrow E^0 \xrightarrow{s} X \longrightarrow 0,$$

根据比较引理, 我们有交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E^{-n+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & E^{-1} & \longrightarrow & E^0 & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow & & \alpha^{-n} \uparrow & & \alpha^{-n+1} \uparrow & & & & \alpha^{-1} \uparrow & & \alpha^0 \uparrow & & \\
P^{-n-1} & \xrightarrow{d^{-n-1}} & P^{-n} & \xrightarrow{d^{-n}} & P^{-n+1} & \xrightarrow{d^{-n}} & \cdots & \longrightarrow & P^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & P^0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中 α^0 满足 $s\alpha^0 = \varepsilon$. 注意到 $\alpha^{-n} \in \text{Ker}(d^{-n-1})^*$, 记 $K^{-n} = \text{Im}d^{-n}$, $j: K^{-n} \rightarrow P^{-n+1}$ 是嵌入, 则有交换图:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E^{-n+1} \\
\uparrow & & \alpha^{-n} \uparrow & & \uparrow \\
P^{-n-1} & \xrightarrow{d^{-n-1}} & P^{-n} & \xrightarrow{d^{-n}} & P^{-n+1} \\
& & \nearrow d^{-n}| & & \nwarrow j \\
& & K^{-n} & &
\end{array}$$

由 [定理2.4] 的证明过程, 存在态射 $h: K^{-n} \rightarrow Y$ 使得 $[h\mathbf{P}] = [\mathbf{E}]$ 且下图交换, 其中 $\mathbf{P}$ 由式(2.4)定义:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E^{-n+1} \\
\uparrow & & \alpha^{-n} \uparrow & & \uparrow \\
P^{-n-1} & \xrightarrow{d^{-n-1}} & P^{-n} & \xrightarrow{d^{-n}} & P^{-n+1} \\
& & \nearrow d^{-n}| & & \nwarrow j \\
& & K^{-n} & &
\end{array}$$

(Note: A dashed arrow labeled h points from K^{-n} to Y in the original image.)

所以 $[\mathbf{E}]$ 对应的 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ 中元素是 $\alpha^{-n} + \text{Im}(d^{-n})^*$, 这对应 $\text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(X, Y[n])$ 中态射 $\widetilde{\alpha^{-n}}\tilde{\varepsilon}^{-1}$.

注意到链映射 $\widetilde{\alpha^{-n}}$ 可表示为下面两个链映射的合成:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow & & 1_Y \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E^{-n+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & E^{-1} & \longrightarrow & E^0 & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow & & \alpha^{-n} \uparrow & & \alpha^{-n+1} \uparrow & & & & \alpha^{-1} \uparrow & & \alpha^0 \uparrow & & \\
P^{-n+1} & \longrightarrow & P^{-n} & \longrightarrow & P^{-n+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P^{-1} & \longrightarrow & P^0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

并且我们有 $\tilde{s}\alpha = \tilde{\varepsilon}$, 所以如果记 $\tilde{E}$ 是复形

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow E^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{-1} \longrightarrow E^0 \longrightarrow 0,$$

那么 $\widetilde{\alpha^{-n}}\tilde{\varepsilon}^{-1} = \widetilde{1_Y}\alpha\tilde{\varepsilon}^{-1} = \widetilde{1_Y}\tilde{s}^{-1}$. 前面的讨论证明了

Proposition 2.6 ([GM03]). 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴, X, Y 是 $\mathcal{A}$ 中对象, n 是正整数. 命 $\zeta: \mathcal{E}^n(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(X, Y[n]), [\mathbf{E}] \mapsto \zeta([\mathbf{E}])$ 满足对每个扩张 $\mathbf{E}$:

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow E^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{-1} \longrightarrow E^0 \xrightarrow{s} X \longrightarrow 0,$$

$\zeta([\mathbf{E}])$ 是下述右分式所在等价类定义出的导出范畴中的态射:

$$\begin{array}{ccc}
& \tilde{E} & \\
s \swarrow & & \searrow \widetilde{1_Y} \\
X & & Y[n]
\end{array}$$

其中 $\tilde{E}$ 是复形 $0 \longrightarrow Y \longrightarrow E^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{-1} \longrightarrow E^0 \longrightarrow 0$. 那么 $\zeta : \mathcal{E}^n(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(X, Y[n])$ 是定义合理的加群同构.

Remark 2.7. 对每个正整数 n , 记 $\zeta_{X,Y}^n : \mathcal{E}^n(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(X, Y[n])$ 是 [命题2.6] 给出的加群同构. 命 $\mathcal{E}^0(X, Y) := \text{Hom}_A(X, Y)$, 则有典范加群同构 $\zeta_{X,Y}^0 : \mathcal{E}^0(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(X, Y)$, 可直接验证对任何正整数 n, m , X 被 Y 的 n -扩张 $[\mathbf{E}]$ 和 Y 被 Z 的 m -扩张 $[\mathbf{F}]$ 有:

$$\zeta_{X,Z}^{n+m}([\mathbf{F}][\mathbf{E}]) = (\zeta_{Y,Z}^m(\mathbf{F})[m])\zeta_{X,Y}^n(\mathbf{E}). \quad (2.7)$$

下面我们说明当 n 或 $m = 0$ 时, 式(2.7)也成立. 先设 $m = 0$, 我们需要验证对任何态射 $f : Y \rightarrow Z$ 和 X 被 Y 的 n -扩张 $\mathbf{E} : 0 \longrightarrow Y \longrightarrow E^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{-1} \longrightarrow E^0 \xrightarrow{s} X \longrightarrow 0$, 有

$$\zeta_{X,Z}^n([f\mathbf{E}]) = (\zeta_{Y,Z}^0(f)[n])\zeta_{X,Y}^n([\mathbf{E}]). \quad (2.8)$$

设 n -扩张由下面的交换图的下行给出:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E^{-n+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & E^{-1} & \longrightarrow & E^0 & \xrightarrow{s} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow & & & & \downarrow 1_{E^{-1}} & & \downarrow 1_{E^0} & & \downarrow 1_X & & \\ 0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & E^{-1} & \longrightarrow & E^0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2.9)$$

记 $\tilde{E}$ 和 $\hat{E}$ 分别是下面两个复形:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E^{-n+1} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^0 \longrightarrow 0, \\ & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^0 \longrightarrow 0. \end{array}$$

记图(2.9)给出的 $\tilde{E}$ 到 $\hat{E}$ 的链映射是 γ . 注意到式(2.8)的等号右边由下述右分式所在等价类给出:

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{E} & & \\ & \swarrow 1_{\tilde{E}} & & \searrow \widetilde{1}_Y & \\ & \tilde{E} & & Y[n] & \\ \swarrow \tilde{s} & & \searrow \widetilde{1}_Y & \swarrow 1_{Y[n]} & \searrow f[n] \\ X & & Y[n] & & Z[n] \end{array}$$

所以下述交换图蕴含式(2.8)成立:

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{E} & & \\ & \swarrow 1_{\tilde{E}} & & \searrow \widetilde{1}_Y & \\ & \tilde{E} & & Y[n] & \\ \swarrow \tilde{s} & & \searrow \widetilde{1}_Y & \swarrow 1_{Y[n]} & \searrow f[n] \\ X & & Y[n] & & Z[n] \\ \swarrow \tilde{s} & & \searrow \widetilde{1}_Z & & \\ & & \hat{E} & & \end{array}$$

(Note: The diagram above is a simplified representation of the complex commutative diagram in the image, which includes additional arrows and labels like γ and $\tilde{f}$.)

类似地, 可验证式(2.7)在 $n = 0$ 的情形也成立.

因此 [命题2.6] 考虑的扩张等价类集与导出范畴 Hom 集的加群同构与 Yoneda 积相容.

现在设 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象. 同构 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ 表明我们可以利用 Yoneda 积赋予

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(X, X) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, X) \quad (2.10)$$

上环结构使之成为 $\mathbb{N}$ -分次环, 齐次元间的乘法来自扩张等价类的 Yoneda 积, 零次部分的态射与高次部分的扩张等价类的乘积来自式(2.1). 加法群 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(X, X)$ 上乘法满足分配律来自 [命题2.3] 和式(2.3), 结合律来自式(2.2)以及扩张等价类关于 Yoneda 积具有结合律. 将分次环 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(X, X)$ 称为对象 X 的 **Yoneda 环**. 例如, 当 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象且 X 的投射对象时, $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(X, X) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X)$.

根据 [注记2.7], 由 [命题2.6] 给出的 $\mathbb{N}$ -分次加群同构

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(X, X) \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, X[n]) \quad (2.11)$$

在式(2.11)的右边通过对 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, X[n]), g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, X[m])$ 定义 $f \circ g := (f[m])g$ 使式(2.11)的右边成为 $\mathbb{N}$ -分次环后, (2.11)成为 $\mathbb{N}$ -分次环同构.

Remark 2.8. 更一般地, 对 $\mathcal{A}$ 中任何对象 X, Y, Z , Yoneda 积给出映射

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(Y, Z) \times \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Z).$$

于是命 $Y = Z$ 或 $Y = X$ 可知 $\mathbb{N}$ -分次加群 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(X, Y)$ 是 Yoneda 环 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(X, X)$ 上的分次右模, 也是 Yoneda 环 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(Y, Y)$ 上的分次左模.

设 $\mathbb{k}$ 是域. 当 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{k}$ -线性 Abel 范畴时, $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(X, X)$ 上带有自然的 $\mathbb{k}$ -线性结构, 并且根据加群同构 $\mathcal{E}^n(X, Y) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ 的证明, 当定义 $\mathcal{E}^n(X, Y)$ 上 $\mathbb{k}$ -数乘作用为 $\alpha \cdot [\mathbf{E}] = [\alpha 1_Y \mathbf{E}] = [\mathbf{E} \alpha 1_X], \alpha \in \mathbb{k}$, 那么前面的加群同构 $\mathcal{E}^n(X, Y) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ 便成为 $\mathbb{k}$ -线性空间同构. 这时 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(X, X)$ 是域 $\mathbb{k}$ 上的 $\mathbb{N}$ -分次代数, 也称为 X 的 **Yoneda 代数**. 同时式(2.11)也是 $\mathbb{k}$ -代数同构. 若 $\mathcal{A}$ 是局部有限的 $\mathbb{k}$ -线性 Abel 范畴, 那么每个 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, X)$ 是有限维 $\mathbb{k}$ -线性空间, 并且当 X 进一步是单对象且 $\mathbb{k}$ 是代数闭域时, Schur 引理表明 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X) = \mathbb{k}$, 即这时 Yoneda 代数 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(X, X)$ 还是连通分次的.

之后我们将在 [定理3.1] 说明 Hopf 代数的 Yoneda 代数是分次交换的, 所以这里再回顾些相关术语.

设 $S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$ 是 $\mathbb{N}$ -分次环. 回忆 S 的理想 I 被称为**齐次理想**, 如果 $I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (I \cap S_d)$, 这等价于理想 I 可由一些齐次元生成. 例如齐次理想族的和, 交都是齐次理想. 称 S 的真齐次理想 P 是**齐次素理想**, 如果对任何 S 的齐次理想 $A, B, AB \subseteq P$ 蕴含 $A \subseteq P$ 或 $B \subseteq P$. 易见 S 的真齐次理想 P 是齐次素理想当且仅当对 S 的任何齐次元 $a, b, aSb \subseteq P$ 蕴含 $a \in P$ 或 $b \in P$. 于是知当 S 是交换分次环或分次交换的分次环时, S 的真齐次理想 P 是齐次素理想当且仅当对任何齐次元 $a, b \in P, ab \in P$ 蕴含 $a \in P$ 或 $b \in P$. 一般地, 如果 $\mathbb{N}$ -分次环 S 的真齐次理想 P 满足对任何齐次元 $a, b \in P, ab \in P$ 蕴含 $a \in P$ 或 $b \in P$, 那么 P 是齐次素理想, 称满足该性质的齐次素理想 P 是**齐次完全素理想**. 如果 $\alpha: S \rightarrow T$ 是 $\mathbb{N}$ -分次环之间的分次环同态, 那么 T 的任何齐次完全素理想 Q 满足 $\alpha^{-1}(Q)$ 是 S 的齐次完全素理想. 分次环 S 的极大齐次理想是齐次素理想, 并且利用 Zorn 引理易知任何真齐次理想都含于某个极大齐次理想中.

将 $\bigoplus_{d=1}^{\infty} S_d$ 记作 S_+ , 这是 S 的真齐次理想. 当 S_0 是整环时 (例如 S 连通分次), S_+ 是齐次素理想. 命

$$\mathrm{Proj}(S) := \{I \subseteq S \mid I \text{ 是齐次素理想且 } I \not\subseteq S_+\}. \quad (2.12)$$

类似于交换环的素谱, 我们说明 $\mathrm{Proj}(S)$ 上有自然的拓扑空间结构: 对每个齐次理想 I , 命

$$V(I) = \{P \in \mathrm{Proj}(S) \mid P \supseteq I\}.$$

那么 $V(0) = \mathrm{Proj}(S)$, $V(S) = \emptyset$, 对任何 S 的齐次理想 I, J , 明显有 $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$. 如果 $\{I_k\}_{k \in \Gamma}$ 是 S 的齐次理想族, 那么 $V(\sum_{k \in \Gamma} I_k) = \bigcap_{k \in \Gamma} V(I_k)$. 于是我们得到 $\mathrm{Proj}(S)$ 有唯一的拓扑结构使得具有形式 $V(I)$, I 是齐次理想, 的所有子集构成 $\mathrm{Proj}(S)$ 中的所有闭集. 当 S 交换时, $\mathrm{Proj}(S)$ 是用于定义射影概形的底空间.

Example 2.9. 设域 $\mathbb{k}$ 上的 $\mathbb{N}$ -分次环 S 是分次交换且 $\mathrm{char} \mathbb{k} \neq 2$. 这时 $T := \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_{2d}$ 是 S 的分次子代数, 且 T 是交换的. 由 S 的分次交换性可知任何奇数次齐次元 x 满足 $x^2 = -x^2$, 所以 $x^2 = 0$. 这说明对任何正奇数 $2k+1$ 有 S_{2k+1} 含于 S 的所有齐次素理想中. 命 $j: T \rightarrow S$ 是标准嵌入, 那么 $j^*: \mathrm{Proj}(S) \rightarrow \mathrm{Proj}(T)$, $P \mapsto P \cap T$ 是连续映射. 任何 T 的齐次素理想 Q 满足 $Q + \bigoplus_{k=0}^{\infty} S_{2k+1}$ 是 S 的齐次素理想且在 j^* 下的像是 Q , 这说明 j^* 是满射. 如果 S 的齐次素理想 P, Q 满足 $j^*(P) = j^*(Q)$, 那么 $P \cap T = Q \cap T$. 但 $P = P \cap T + \bigoplus_{k=0}^{\infty} S_{2k+1}$ 且 $Q = Q \cap T + \bigoplus_{k=0}^{\infty} S_{2k+1}$, 所以 $P = Q$. 至此我们说明了 j^* 是双射. 对任何 S 的齐次素理想 I , 易验证

$$j^*(V(I)) = V(I \cap T),$$

所以 j^* 还是闭映射, 我们得到 $j^*: \mathrm{Proj}(S) \rightarrow \mathrm{Proj}(T)$, $P \mapsto P \cap T$ 是拓扑同胚.

对 $\mathbb{N}$ -分次环 A 和任何 $\mathbb{Z}$ -分次左 A -模 M , 易知 $\mathrm{Ann}_A M$ 是 A 的真齐次理想, 于是 M 可定义 $\mathrm{Proj}(A)$ 的闭子集 $V(\mathrm{Ann}_A M)$. 现在设 A 是交换的, 那么我们可考虑 A 的局部化. 具体地, 设 S 是 A 的乘闭子集, 那么 S 中所有齐次元构成集合 S_h 同样是 A 的乘闭子集. 易见任何分次 A -模 M 关于 S 的局部化是零模当且仅当 M 关于 S_h 的局部化是零模. 对分次 A -模 M 和整数 i , 命

$$(S_h^{-1}M)_i := \{x/s \in S_h^{-1}M \mid x \in M, s \in S \text{ 都是齐次元, 且 } \deg x - \deg s = i\}.$$

易证 $S_h^{-1}M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (S_h^{-1}M)_i$. 特别地, $S_h^{-1}A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (S_h^{-1}A)_i$ 是 $\mathbb{N}$ -分次环且 $S_h^{-1}M$ 是分次 $S_h^{-1}A$ -模. 当 P 是 A 的齐次素理想时, 命 $S = A - P$, 那么 $M_{(P)} := S_h^{-1}M$ 被称为 M 在 P 处的齐次局部化 [LW25]. 根据前面的讨论, $M_P = 0$ 当且仅当 $M_{(P)} = 0$. 所以当分次模 M 是有限生成 A -模时, 任何齐次素理想 P 满足 $M_{(P)} \neq 0$ 的充要条件是 $P \supseteq \mathrm{Ann}_A M$. 对任何 (未必有限生成的) 分次 A -模 M , $M = 0$ 当且仅当对任何齐次素理想 P 有 $M_{(P)} = 0$, 也当且仅当对任何极大齐次理想 Q 有 $M_{(Q)} = 0$.

一般地, 含么环 A 关于乘闭子集 S 的右局部化 A_S 存在当且仅当对任何 $a \in A, s \in S$ 有 $aS \cap sA \neq \emptyset$ 且 $sa = 0$ 蕴含存在 $t \in S$ 使得 $at = 0$. 于是可直接验证分次交换的 $\mathbb{N}$ -分次环 A 关于一些齐次元构成的乘闭子集 S 的右局部化 A_S 总存在. 进而我们也能够处理分次交换的分次环上模的局部化 (例如关于某个齐次素理想的局部化). 下面设 A 是分次交换的. 类似交换情形, 任何分次右 A -模 M 关于一些齐次元构成的乘闭子集 S 的右局部化 M_S 也有自然的分次右 A_S -模结构 (A_S 是分次环). 这时也将分次右 A -模 M 关于齐次素理想 P 给出的齐次元乘闭子集 $(A - P)_h$ 的局部化记作 $M_{(P)}$. 设 M 是有限生成分次右 A -模, 易验证对任何齐次素理想 P , $M_{(P)} \neq 0$ 当且仅当 $P \supseteq \mathrm{Ann}_A M$.

3 Hopf 代数的 Yoneda 代数

本节固定域 $\mathbb{k}$ 上的 Hopf 代数 H . 下面我们使用 [SA04] 中的讨论说明对平凡左 H -模 $\mathbb{k}$, Yoneda 代数 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ 是分次交换的 [GK93]. 任意两个左 H -模 X, Y 的 $\mathbb{k}$ -张量积 $X \otimes Y = X \otimes_{\mathbb{k}} Y$ 有典范左 H -模结构使得任意两个左 H -模复形的 $\mathbb{k}$ -张量积复形都是左 H -模复形, 于是我们能够将左 H -模复形的 $\mathbb{k}$ -张量积诱导至有界导出范畴 $\mathcal{D}^b(H\text{-Mod})$ 上得到双函子 $-\otimes- : \mathcal{D}^b(H\text{-Mod}) \times \mathcal{D}^b(H\text{-Mod}) \rightarrow \mathcal{D}^b(H\text{-Mod})$. 不难看到 $\mathcal{D}^b(H\text{-Mod})$ 关于 $\otimes$ 构成么半范畴, 并且如果记 $T = [1] : \mathcal{D}^b(H\text{-Mod}) \rightarrow \mathcal{D}^b(H\text{-Mod})$ 是复形平移给出的范畴自同构, 那么我们可以定义如下函子间的自然变换: 对任何 $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathcal{D}^b(H\text{-Mod})$, 命

$$\lambda_{X^\bullet, Y^\bullet} : (X^\bullet \otimes TY^\bullet) \rightarrow T(X^\bullet \otimes Y^\bullet)$$

满足对任何 $p+q=n$ 以及 $x^p \otimes y^{q+1} \in X^p \otimes (TY^\bullet)^q \subseteq (X^\bullet \otimes TY^\bullet)^n$ 有 $\lambda_{X^\bullet, Y^\bullet}(x^p \otimes y^{q+1}) = (-1)^n x^p \otimes y^{q+1}$. 那么 $\lambda : - \otimes (T-) \xrightarrow{\cong} T(- \otimes -)$ 是定义合理的自然同构. 类似我们有不用添加符号的标准自然同构

$$\rho_{X^\bullet, Y^\bullet} : (TX^\bullet \otimes Y^\bullet) \rightarrow T(X^\bullet \otimes Y^\bullet).$$

将平凡模 $\mathbb{k}$ 视作集中在 0 次部分的复形, 命 $\ell_{X^\bullet} : \mathbb{k} \otimes X^\bullet \rightarrow X^\bullet$ 满足对任何 $\alpha \in \mathbb{k}$ 和 $x^n \in X^n$ 有

$$\ell_{X^\bullet}^n : \mathbb{k} \otimes X^n \rightarrow X^n, \alpha \otimes x^n \mapsto (-1)^{n(n-1)/2} \alpha x^n.$$

那么 $\ell : \mathbb{k} \otimes - \rightarrow -$ 是自然同构; 我们也有不带符号的典范自然同构 $r : - \otimes \mathbb{k} \rightarrow -$. 于是有交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k} \otimes TX^\bullet & \xrightarrow{\ell_{TX^\bullet}} & TX^\bullet \\ \lambda_{\mathbb{k}, X^\bullet} \downarrow & & \downarrow 1 \\ T(\mathbb{k} \otimes X^\bullet) & \xrightarrow{T\ell_{X^\bullet}} & TX^\bullet \end{array} \quad (3.1)$$

$$\begin{array}{ccc} TX^\bullet \otimes \mathbb{k} & \xrightarrow{r_{TX^\bullet}} & TX^\bullet \\ \rho_{X^\bullet, \mathbb{k}} \downarrow & & \downarrow 1 \\ T(X^\bullet \otimes \mathbb{k}) & \xrightarrow{Tr_{X^\bullet}} & TX^\bullet \end{array} \quad (3.2)$$

$$\begin{array}{ccc} TX^\bullet \otimes TY^\bullet & \xrightarrow{\rho_{X^\bullet, TY^\bullet}} & T(X^\bullet \otimes TY^\bullet) \\ \lambda_{TX^\bullet, Y^\bullet} \downarrow & -1 & \downarrow T\lambda_{X^\bullet, Y^\bullet} \\ T(TX^\bullet \otimes Y^\bullet) & \xrightarrow{T\rho_{X^\bullet, Y^\bullet}} & T^2(X^\bullet \otimes Y^\bullet) \end{array} \quad (3.3)$$

在谈论复形明确时, 将前面定义的自然变换 ℓ, r, λ, ρ 省略下标记号, 并将复形 $X^\bullet$ 简写作 X .

对任何 $X, Y \in \mathcal{D}^b(H\text{-Mod})$, 命 λ_0, ρ_0 是 $X \otimes Y$ 到自身的恒等态射. 对任何正整数 n , 命

$$\lambda_n : (T^{n-1}\lambda)(T^{n-2}\lambda) \cdots (T\lambda)\lambda : X \otimes T^n Y \rightarrow T^n(X \otimes Y),$$

$$\rho_n : (T^{n-1}\rho)(T^{n-2}\rho) \cdots (T\rho)\rho : T^n X \otimes Y \rightarrow T^n(X \otimes Y),$$

$$\lambda_{-n} = T^{-n}\lambda_n^{-1} : X \otimes T^{-n}Y \rightarrow T^{-n}(X \otimes Y),$$

$$\rho_{-n} = T^{-n} \rho_n^{-1} : T^{-n} X \otimes Y \rightarrow T^{-n}(X \otimes Y).$$

这里最后两个态射来自: 对 $\lambda_n : X \otimes Y = X \otimes T^n T^{-n} Y \rightarrow T^n(X \otimes T^{-n} Y)$ 的逆 $\lambda_n^{-1} : T^n(X \otimes T^{-n} Y) \rightarrow X \otimes Y$ 作用 T^{-n} 以及对 $\rho_{-n} : T^n T^{-n} X \otimes Y \rightarrow T^n(T^{-n} X \otimes Y)$ 的逆作用 T^{-n} 得到. 于是对任何整数 n 有自然变换

$$\lambda_n : - \otimes (T^n -) \rightarrow T^n(- \otimes -), \quad \rho_n : (T^n -) \otimes - \rightarrow T^n(- \otimes -).$$

从(3.1), (3.2)和(3.3)得到

$$\ell = (T^n \ell) \lambda_n : \mathbb{k} \otimes (T^n -) \rightarrow T^n, \quad (3.4)$$

$$r = (T^n r) \rho_n : (T^n -) \otimes \mathbb{k} \rightarrow T^n, \quad (3.5)$$

$$(T^n \lambda_m) \rho_n = (-1)^{mn} (T^m \rho_n) \lambda_m : (T^n -) \otimes (T^m -) \rightarrow T^{m+n}(- \otimes -). \quad (3.6)$$

下面我们说明 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k}) = \bigoplus_{n=0}^\infty \text{Hom}_{\mathcal{D}(H\text{-Mod})}(\mathbb{k}, \mathbb{k}[n]) = \bigoplus_{n=0}^\infty \text{Hom}_{\mathcal{D}(H\text{-Mod})}(\mathbb{k}, T^n \mathbb{k})$ 是分次交换的. 根据分次代数同构(2.11), 只需验证对导出范畴中的态射 $f : \mathbb{k} \rightarrow T^p \mathbb{k}$ 和 $g : \mathbb{k} \rightarrow T^q \mathbb{k}$ 有 $f \cdot g = (-1)^{pq} g \cdot f$.

现在对任给导出范畴中的态射 $f : \mathbb{k} \rightarrow T^p \mathbb{k}$ 和 $g : \mathbb{k} \rightarrow T^q \mathbb{k}$, 命 $f \star g : \mathbb{k} \rightarrow T^{p+q} \mathbb{k}$ 是下面态射的合成:

$$\mathbb{k} \xrightarrow{r^{-1}} \mathbb{k} \otimes \mathbb{k} \xrightarrow{f \otimes g} T^p \mathbb{k} \otimes T^q \mathbb{k} \xrightarrow{\rho_p} T^p(\mathbb{k} \otimes T^q \mathbb{k}) \xrightarrow{T^p \lambda_q} T^p(\mathbb{k} \otimes \mathbb{k}) \xrightarrow{T^{p+q} \ell} T^{p+q} \mathbb{k}.$$

现在(3.4)和(3.5)保证了有下述交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{k} & \xleftarrow{r} & \mathbb{k} \otimes \mathbb{k} & & & & \\ f \downarrow & & f \otimes 1 \downarrow & \searrow f \otimes g & & & \\ T^p \mathbb{k} & \xleftarrow{r} & T^p \mathbb{k} \otimes \mathbb{k} & \xrightarrow{1 \otimes g} & T^p \mathbb{k} \otimes T^q \mathbb{k} & & \\ 1 \downarrow & & \downarrow \rho_p & & \downarrow \rho_p & & \\ T^p \mathbb{k} & \xleftarrow{T^p r} & T^p(\mathbb{k} \otimes \mathbb{k}) & \xrightarrow{T^p(1 \otimes g)} & T^p(\mathbb{k} \otimes T^q \mathbb{k}) & & \\ & \searrow 1 & \downarrow T^p \ell & & \downarrow T^p \ell & \searrow T^p \lambda_q & \\ & & T^p \mathbb{k} & \xrightarrow{T^p g} & T^{p+q} \mathbb{k} & \xleftarrow{T^{p+q} \ell} & T^{p+q}(\mathbb{k} \otimes \mathbb{k}) \end{array}$$

所以我们得到 $g \cdot f = f \star g$, 等号左边是 Yoneda 积. 再结合(3.6), 我们得到交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbb{k} & \xleftarrow{\ell=r} & \mathbb{k} \otimes \mathbb{k} & & & & & & & & \\ g \downarrow & & 1 \otimes g \downarrow & \searrow f \otimes g & & & & & & & \\ T^q \mathbb{k} & \xleftarrow{\ell} & \mathbb{k} \otimes T^q \mathbb{k} & \xrightarrow{f \otimes 1} & T^p \mathbb{k} \otimes T^q \mathbb{k} & \xrightarrow{\rho_p} & T^p(\mathbb{k} \otimes T^q \mathbb{k}) & & & & \\ 1 \downarrow & & \downarrow \lambda_q & & \downarrow \lambda_q & & \downarrow (-1)^{pq} T^p \lambda_q & & & & \\ T^q \mathbb{k} & \xleftarrow{T^q \ell} & T^q(\mathbb{k} \otimes \mathbb{k}) & \xrightarrow{T^q(f \otimes 1)} & T^q(T^p \mathbb{k} \otimes \mathbb{k}) & \xrightarrow{T^q \rho_p} & T^{p+q}(\mathbb{k} \otimes \mathbb{k}) & & & & \\ & \searrow 1 & \downarrow T^q r & & \downarrow T^q r & \swarrow T^{p+q} r & \downarrow T^{p+q} \ell & & & & \\ & & T^q \mathbb{k} & \xrightarrow{T^q f} & T^{p+q} \mathbb{k} & \xrightarrow{1} & T^{p+q} \mathbb{k} \end{array}$$

由此得到 $f \cdot g = (-1)^{pq} f \star g$. 于是我们得到下述定理.

Theorem 3.1 (Yoneda 代数的分次交换性, [GK93, SA04]). 设 H 是域 $\mathbb{k}$ 上 Hopf 代数, 那么 H 的 Yoneda 代数 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ 是分次交换代数. 特别地, $\text{Ext}_H^{2\bullet}(\mathbb{k}, \mathbb{k}) \subseteq \text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ 是交换分次代数. 由于 $\text{Hom}_H(\mathbb{k}, \mathbb{k}) \cong \mathbb{k}$ 总成立, 所以 Yoneda 代数 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ 是分次交换的连通分次代数.

Remark 3.2. 通常也将 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ 记作 $H^\bullet(H, \mathbb{k})$. 对余交换 Hopf 代数可利用 Ext 群的 Yoneda 扩张等价类刻画, [定理2.4], 来使用杯积给出更直接的证明, 见 [Ben91, Corollary 3.2.2]. 对域 $\mathbb{k}$ 上任何有限张量范畴 $\mathcal{C}$, 同样的方法也能得到 Yoneda 代数 $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ 是分次交换的, 这里 $\mathbf{1}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的幺元对象.

Example 3.3. 设 H 是域 $\mathbb{k}$ 上的有限维 Hopf 代数, 并设 $\text{char } \mathbb{k} = 2$. 那么 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ 是交换代数.

Example 3.4. 如果域 $\mathbb{k}$ 上的有限维 Hopf 代数 H 是半单的, 那么 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k}) = \mathbb{k}$.

Example 3.5 (Golod-Venkov-Evens, [Gol59, Ven59, Eve61]). 设 G 是有限群, 可以证明群代数 $\mathbb{k}G$ 的 Yoneda 代数 $\text{Ext}_{\mathbb{k}G}^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ 是域 $\mathbb{k}$ 上的有限生成代数.

有限维 Hopf 代数 H 的 Yoneda 代数 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ 有助于从张量范畴角度理解 H 的表示论.

Example 3.6 (Ginzburg-Kumar, Bendel-Nakano-Parshall-Pillen, [GK93, BNPP14]). 设 $\mathfrak{g}$ 是有限维复单 Lie 代数, $\ell \geq 3$ 是奇数且和 $\mathfrak{g}$ 根系的坏素数互素, 当 $\mathfrak{g} = G_2$ 时 ℓ 与 3 互素, 当 $\mathfrak{g} = B_n$ 或 C_n 时也要求 $\ell \geq 5$. 那么对 Lusztig 小量子群 $u_\epsilon(\mathfrak{g})$, 有 $\text{Ext}_{u_\epsilon(\mathfrak{g})}^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ 是域 $\mathbb{k}$ 上的有限生成代数. 记 h 是 $\mathfrak{g}$ 的 Coxeter 数, 当 $\ell > h$ 时, Ginzburg-Kumar 得到对任何自然数 k 有 $\text{Ext}_{u_\epsilon(\mathfrak{g})}^{2k+1}(\mathbb{k}, \mathbb{k}) = 0$ 且有分次代数同构

$$\text{Ext}_{u_\epsilon(\mathfrak{g})}^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k}) \cong \mathcal{O}(\mathcal{N}),$$

其中 $\mathcal{N} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}_x \text{ 是幂零变换}\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的幂零锥.

Remark 3.7. 在 [FP86] 中 Friedlander-Pardhall 计算了正特征单连通单代数群的 Lie 代数的包络代数以及限制包络代数的上同调环, Ginzburg-Kumar 的工作可视作限制包络代数场景结论的量子版本.

Etingof-Ostrik [EO04] 猜测对代数闭域 $\mathbb{k}$ 上任何有限张量范畴 $\mathcal{C}$, 幺元对象 $\mathbf{1}$ 的 Yoneda 代数 $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ 是 $\mathbb{k}$ 上的有限生成代数 (利用 [定理3.1] 的讨论同样能够证明 $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ 是分次交换的).

对任何左 H -模 M , 也有 Yoneda 代数 $\text{Ext}_H^\bullet(M, M)$. 于是由 $- \otimes M$ 是 $H\text{-Mod}$ 上的正合函子知有合理的映射 $\theta_M : \text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k}) \rightarrow \text{Ext}_H^\bullet(M, M)$ 满足将

$$0 \longrightarrow \mathbb{k} \longrightarrow E^{-i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{-1} \longrightarrow E^0 \longrightarrow \mathbb{k} \longrightarrow 0$$

所在的扩张等价类映至下述扩张所在的等价类:

$$0 \longrightarrow M \cong \mathbb{k} \otimes M \longrightarrow E^{-i+1} \otimes M \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{-1} \otimes M \longrightarrow E^0 \otimes M \longrightarrow \mathbb{k} \otimes M \cong M \longrightarrow 0.$$

易见 $\theta_M : \text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k}) \rightarrow \text{Ext}_H^\bullet(M, M)$ 是 $\mathbb{k}$ -分次代数同态. 这使得任何 $\text{Ext}_H^\bullet(M, M)$ -模能够视作分次 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ -模. 例如, 根据 [注记2.8], 对任何左 H -模 N , $\text{Ext}_H^\bullet(M, N)$ 能够视作分次左 $\text{Ext}_H^\bullet(N, N)$ -模也能够视作分次右 $\text{Ext}_H^\bullet(M, M)$ -模, 那么 $\text{Ext}_H^\bullet(M, N)$ 能够视作分次左 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ -模也能够视作分次右 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ -模. 不难看到对任何左 H -模 M, N , $\text{Ext}_H^\bullet(M, N)$ 是分次 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ - $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ 双模. 使用导出范畴的语言, 代数同态 $\theta_M : \text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k}) \rightarrow \text{Ext}_H^\bullet(M, M)$ 可视作 $\bigoplus_{n=0}^\infty \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(H\text{-Mod})}(\mathbb{k}, \mathbb{k}[n])$ 到 $\bigoplus_{n=0}^\infty \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(H\text{-Mod})}(M, M[n])$ 的映射 $\alpha_n \mapsto \ell_{M[n]}^{-1}(\alpha \otimes \text{id}_M)\ell_M^{-1}$, 这里 $\alpha_n \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(H\text{-Mod})}(\mathbb{k}, \mathbb{k}[n])$.

Remark 3.8. 在代数同态 θ_M 的定义中如果用 $M \otimes -$ 代替 $- \otimes M$, 同样可定义出 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ 到 $\text{Ext}_H^\bullet(M, M)$ 的代数同态. 当 H 是余交换 Hopf 代数时, 这两种定义得到的代数同态相同.

Remark 3.9. 任取 $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(H\text{-Mod})}(\mathbb{k}, \mathbb{k}[n])$ 和 $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(H\text{-Mod})}(M, N[m])$, 那么有交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{k} \otimes M & \xrightarrow{\text{id} \otimes \beta} & \mathbb{k} \otimes N[m] & \xrightarrow{\cong} & N[m] \\ \theta_M(\alpha) \downarrow & & \downarrow \alpha \otimes \text{id} & & \downarrow \alpha \otimes \text{id} & & \downarrow \theta_{N[m]}(\alpha) \\ M[n] & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{k}[n] \otimes M & \xrightarrow{\text{id} \otimes \beta} & \mathbb{k}[n] \otimes N[m] & \xrightarrow{\cong} & N[n+m] \end{array}$$

这说明 $\theta_{N[m]}(\alpha)\beta = \beta[n]\theta_M(\alpha)$. 于是 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ 在 $\text{Ext}_H^\bullet(M, N)$ 上的左作用和右作用一致. 所以当 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ 是交换代数时, $\text{Ext}_H^\bullet(M, N)$ 是 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ 上对称双模.

利用 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ 在 $\text{Ext}_H^\bullet(M, N)$ 上的左作用和右作用一致易用 Ext 群的导出范畴描述验证对任何左 H -模 X_1, X_2, Y_1, Y_2, X, Y , 有 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ -模同构 $\text{Ext}_H^\bullet(X, Y_1 \oplus Y_2) \cong \text{Ext}_H^\bullet(X, Y_1) \oplus \text{Ext}_H^\bullet(X, Y_2)$ 以及 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ -模同构 $\text{Ext}_H^\bullet(X_1 \oplus X_2, Y) \cong \text{Ext}_H^\bullet(X_1, Y) \oplus \text{Ext}_H^\bullet(X_2, Y)$.

Proposition 3.10. 设 H 是域 $\mathbb{k}$ 上 Hopf 代数, 并设有左 H -模短正合列 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$. 那么对任何左 H -模 X 有 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ -模正合列 $\text{Ext}_H^\bullet(X, M) \xrightarrow{f_*} \text{Ext}_H^\bullet(X, N) \xrightarrow{g_*} \text{Ext}_H^\bullet(X, L)$ 和

$$\text{Ext}_H^\bullet(X, L) \xrightarrow{g^*} \text{Ext}_H^\bullet(X, N) \xrightarrow{f^*} \text{Ext}_H^\bullet(X, M).$$

Proof. 以第一种情况为例, 这里同态 $f_* : \text{Ext}_H^\bullet(X, M) \rightarrow \text{Ext}_H^\bullet(X, N)$, $(\alpha_n : X \rightarrow M[n])_{n=0}^\infty \mapsto (f[n]\alpha_n : X \rightarrow N[n])_{n=0}^\infty$, 同态 $g_* : \text{Ext}_H^\bullet(X, N) \rightarrow \text{Ext}_H^\bullet(X, L)$, $(\beta_n : X \rightarrow N[n])_{n=0}^\infty \mapsto (g[n]\beta_n : X \rightarrow L[n])_{n=0}^\infty$ 明显是右 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ -模同态, [注记3.9]. 加群同态序列 $\text{Ext}_H^\bullet(X, M) \xrightarrow{f_*} \text{Ext}_H^\bullet(X, N) \xrightarrow{g_*} \text{Ext}_H^\bullet(X, L)$ 的正合性来自给定短正合列导出的 Ext 群长正合列. $\square$

Remark 3.11. 对左 H -模短正合列 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$, 存在 $\mathcal{D}(H\text{-Mod})$ 中的好三角

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \xrightarrow{h} M[1],$$

其中 $h : L \rightarrow M[1]$ 是导出范畴中的态射. 由此可知对任何左 H -模 X , 上述短正合列诱导的 Ext 群长正合列中连接同态 $\delta^n : \text{Ext}_H^n(X, L) \rightarrow \text{Ext}_H^{n+1}(X, M)$ 可由 $h[n] : L[n] \rightarrow M[n+1]$ 诱导: $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(H\text{-Mod})}(X, L[n]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(H\text{-Mod})}(X, M[n+1]), \theta \mapsto h[n]\theta$. 类似地, 连接同态 $\partial^n : \text{Ext}_H^n(M, X) \rightarrow \text{Ext}_H^{n+1}(L, X)$ 来自

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(H\text{-Mod})}(M, X[n]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(H\text{-Mod})}(L, X[n+1]), \theta \mapsto \theta[1]h.$$

由此可知 $\delta : \text{Ext}_H^\bullet(X, L) \rightarrow \text{Ext}_H^{\geq 1}(X, M)$ 和 $\partial : \text{Ext}_H^\bullet(M, X) \rightarrow \text{Ext}_H^{\geq 1}(L, X)$ 是 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ -模同态. 于是与 [命题3.10] 类似, 我们有 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ -模正合列

$$\text{Ext}_H^\bullet(X, N) \xrightarrow{g_*} \text{Ext}_H^\bullet(X, L) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_H^{\geq 1}(X, M) \xrightarrow{(f_*)_{\geq 1}} \text{Ext}_H^{\geq 1}(X, N),$$

$$\text{Ext}_H^\bullet(N, X) \xrightarrow{f^*} \text{Ext}_H^\bullet(M, X) \xrightarrow{\partial} \text{Ext}_H^{\geq 1}(L, X) \xrightarrow{(g^*)_{\geq 1}} \text{Ext}_H^{\geq 1}(N, X).$$

设有限维 Hopf 代数 H 满足 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ 是交换的. 对任何左 H -模 X, Y , $\text{Ext}_H^\bullet(X, Y)$ 是 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ 上的分次对称双模, [注记3.9]. 记 $I(X, Y)$ 是 $\text{Ext}_H^\bullet(X, Y)$ 作为 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ -模的零化子, 这是 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ 的齐次理想. 再记 $\mathfrak{m}_0 = \text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})_+$ 是增广理想. 称 $V(X, Y) := \{\mathfrak{m}_0\} \cup \{\mathfrak{m} \in \text{Proj}(\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})) \mid I(X, Y) \subseteq \mathfrak{m}\}$ 是关于 X 和 Y 的支簇. 当 $\text{Ext}_H^\bullet(X, Y)$ 是有限生成 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ -模时, $\mathfrak{m} \in \text{Proj}(\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k}))$ 满足 $\mathfrak{m} \in V(X, Y)$ 当且仅当 $\text{Ext}_H^\bullet(X, Y)_{(\mathfrak{m})} \neq 0$. 这解释了“支簇”的命名缘由. 记 $V(X, X)$ 为 $V(X)$.

Proposition 3.12. 设域 $\mathbb{k}$ 上有限维 Hopf 代数 H 满足 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ 是交换仿射的且对任何有限生成 H -模 X, Y 有 $\text{Ext}_H^\bullet(X, Y)$ 是有限生成 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ -模. 那么

(1) 设 $0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow 0$ 是有限生成左 H -模的短正合列. 则

$$V(Y, X_i) \subseteq V(Y, X_j) \cup V(Y, X_k), \quad V(X_i, Y) \subseteq V(X_j, Y) \cup V(X_k, Y)$$

对所有满足 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ 的指标 i, j, k 成立.

(2) 对任何有限生成左 H -模 X, Y , 有 $V(X, Y) \subseteq V(X) \cap V(Y)$.

(3) 设 $0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow 0$ 是有限生成左 H -模的短正合列. 那么 $V(X_i) \subseteq V(X_j) \cup V(X_k)$ 对任何指标 $1 \leq i, j, k \leq 3$ 成立.

(4) 对任何有限生成投射左 H -模 P , $V(P) = \{\mathfrak{m}_0\}$.

(5) 对任何有限生成左 H -模 X, Y 有 $V(X \oplus Y) = V(X) \cup V(Y)$.

(6) 对任何有限生成左 H -模 X, Y 有 $V(X \otimes Y) \subseteq V(X)$. 特别地, 若有左 H -模同构 $X \otimes Y \cong Y \otimes X$ (例如 H 是余交换的或 H 是拟三角的), 那么 $V(X \otimes Y) \subseteq V(X) \cap V(Y)$.

Proof. (1) 这来自 [命题3.10] 和 [注记3.11].

(2) 因为 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ 在 $\text{Ext}_H^\bullet(X, Y)$ 上的作用来自 $\text{Ext}_H^\bullet(X, X)$ 或 $\text{Ext}_H^\bullet(Y, Y)$, 所以考虑 $\text{Ext}_H^\bullet(X, X)$ 与 $\text{Ext}_H^\bullet(Y, Y)$ 的乘法单位元易知 $I(X, X), I(Y, Y) \subseteq I(X, Y)$. 故 支簇的定义得到结论.

(3) 由 (1) 可知 $V(X_i) = V(X_i, X_i) \subseteq V(X_i, X_j) \cup V(X_i, X_k)$. 再应用 (2) 即可.

(4) 这时 $\text{Ext}_H^\bullet(P, P) = \text{Hom}_H(P, P)$, 所以 $\mathfrak{m}_0 \subseteq \text{Ann}_{\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})} \text{Ext}_H^\bullet(P, P)$.

(5) 根据 [注记3.9], 有 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ -模同构

$$\text{Ext}_H^\bullet(X \oplus Y, X \oplus Y) \cong \text{Ext}_H^\bullet(X, X) \oplus \text{Ext}_H^\bullet(X, Y) \oplus \text{Ext}_H^\bullet(Y, X) \oplus \text{Ext}_H^\bullet(Y, Y),$$

这蕴含 $V(X), V(Y) \subseteq V(X \oplus Y)$. 而 $V(X \oplus Y) \subseteq V(X) \cup V(Y)$ 来自 (3).

(6) 由定义, $\text{Ext}_H^\bullet(X \otimes Y, X \otimes Y)$ 的 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ -模结构来自代数同态 $\theta_{X \otimes Y} : \text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k}) \rightarrow \text{Ext}_H^\bullet(X \otimes Y, X \otimes Y)$, 易见存在代数同态 $\tau : \text{Ext}_H^\bullet(X, X) \rightarrow \text{Ext}_H^\bullet(X \otimes Y, X \otimes Y)$ 使得 $\theta_{X \otimes Y} = \tau \theta_X$. 因此 $I(X, X) \subseteq I(X \otimes Y, X \otimes Y)$. 这说明 $V(X \otimes Y) \subseteq V(X)$. $\square$

Remark 3.13. 在 [NP23, Theorem 4.8] 中 Negron-Pevtsova 得到代数闭域上任何整体维数有限的仿射 Hopf 代数 U 和光滑仿射 Hopf 代数 C , 如果 U 在 C 上有限生成, 那么有限维 Hopf 代数 $H = U/C^+U$ 的上同调代数是有限生成的且对任何有限生成 H -模 X, Y 有 $\text{Ext}_H^\bullet(X, Y)$ 是有限生成 $\text{Ext}_H^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ -模.

Remark 3.14. 对一般的有限维 Hopf 代数 H 上的有限维模 X, Y , 未必有 $V(X \otimes Y) \subseteq V(X) \cap V(Y)$ 成立. Benson-Witherspoon 构造了正特征的代数闭域上有限维 Hopf 代数 H 和适当的有限维 H -模 X, Y 满足 $V(X) \cap V(Y) = \emptyset$ 且 $V(X \otimes Y) \neq V(Y \otimes X)$ 均非空, 见 [BW14, Example 3.2]. 如果有限维 Hopf 代数 H 满足对任何有限维模 X, Y 有 $V(X \otimes Y) = V(X) \cap V(Y)$, 则称 H 满足张量积性质. Ostrik 在 [Ost98, Remark 3.7] 猜想 Lusztig 小量子群 $u_\epsilon(\mathfrak{g})$ 满足张量积性质. 也见 [BPW24] 关于一般有限张量范畴不具有张量积性质的支簇的讨论.

参考文献

- [Ben91] D. J. Benson. *Representations and cohomology. I*, volume 30 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991. Basic representation theory of finite groups and associative algebras.
- [BNPP14] Christopher P. Bendel, Daniel K. Nakano, Brian J. Parshall, and Cornelius Pillen. Cohomology for quantum groups via the geometry of the nullcone. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 229(1077):x+93, 2014.
- [BPW24] Petter Andreas Bergh, Julia Yael Plavnik, and Sarah Witherspoon. Support varieties without the tensor product property. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 56(6):2150–2161, 2024.
- [BW14] Dave Benson and Sarah Witherspoon. Examples of support varieties for Hopf algebras with noncommutative tensor products. *Arch. Math. (Basel)*, 102(6):513–520, 2014.
- [EGNO15] Pavel Etingof, Shlomo Gelaki, Dmitri Nikshych, and Victor Ostrik. *Tensor categories*, volume 205 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [EO04] Pavel Etingof and Viktor Ostrik. Finite tensor categories. *Mosc. Math. J.*, 4(3):627–654, 782–783, 2004.
- [Eve61] Leonard Evens. The cohomology ring of a finite group. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 101:224–239, 1961.
- [FP86] Eric M. Friedlander and Brian J. Parshall. Cohomology of Lie algebras and algebraic groups. *Amer. J. Math.*, 108(1):235–253, 1986.
- [GK93] Victor Ginzburg and Shrawan Kumar. Cohomology of quantum groups at roots of unity. *Duke Math. J.*, 69(1):179–198, 1993.
- [GM03] Sergei I. Gelfand and Yuri I. Manin. *Methods of homological algebra*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.
- [Gol59] E. Golod. The cohomology ring of a finite p -group. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 125:703–706, 1959.
- [Lor18] Martin Lorenz. *A tour of representation theory*, volume 193 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2018.
- [LW25] Haonan Li and Quanshui Wu. Regular $\mathbb{Z}$ -graded local rings and graded isolated singularities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 153(10):4255–4270, 2025.
- [NP23] Cris Negron and Julia Pevtsova. Support for integrable Hopf algebras via noncommutative hypersurfaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (3):1882–1958, 2023.

- [Ost98] V. V. Ostrik. Cohomological supports for quantum groups. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 32(4):22–34, 95, 1998.
- [SA04] Mariano Suarez-Alvarez. The Hilton-Heckmann argument for the anti-commutativity of cup products. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(8):2241–2246, 2004.
- [Ven59] B. B. Venkov. Cohomology algebras for some classifying spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 127:943–944, 1959.
- [Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [Zha15] Pu Zhang. *Triangular Category and Derived Category*, volume 155 of *Modern Mathematics Foundation Series*. Science Press, 2015.
- [ZW18] Pu Zhang and Quanshui Wu. *Basic Algebra Lecture Notes*, volume 66 of *Modern Mathematics Foundation Series*. Higher Education Press, 2018.