Wedderburn 主定理

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 1 月 31 日

这份笔记主要记录可分代数的基本概念以及 Wedderburn 主定理的证明, 主要参考文献是 [Jac09] 和 [Wei94]. 由于水平有限, 虽然我全力以赴, 但还是无法避免笔记中存在不足与错误, 欢迎大家指出, 谢谢.

1 可分代数

可分代数是域论中可分扩张的自然推广. 回忆域的代数扩张 $K \subseteq L$ 被称为**可分扩张**, 如果 L 中任何元素在 K 上最小多项式无重根. 接下来我们将把有限维可分扩张推广为一种特殊的有限维半单代数. 首先注意

Lemma 1.1. 设 $K \subseteq L$ 是域的有限扩张, 则 $K \subseteq L$ 可分 $\Leftrightarrow$ 对 K 的任何域扩张 F, $L \otimes_K F$ 是 Artin 半单环.

Proof. 充分性：假设 $K \subseteq L$ 不是可分扩张, 那么存在 $\alpha \in L$ 使得 α 在 K 上的最小多项式 $m(x)$ 有重根. 考虑 K 的代数闭包 $\overline{K}$, 那么 $m(x)$ 在 $\overline{K}$ 上可表示为 $m(x) = (x-\beta)^2 g(x)$, 这里 $\beta \in \overline{K}, g(x) \in \overline{K}[x]$. 现考虑 $L \otimes_K \overline{K}$ 的 K-子代数 $K(\alpha) \otimes_K \overline{K}$, 由于 K-代数同构 $K(\alpha) \otimes_K \overline{K} \cong K[x]/(m(x)) \otimes_K \overline{K} \cong \overline{K}[x]/(m(x))$. 注意到 $\overline{K}[x]/(m(x))$ 有非零幂零元 $\overline{x-\beta}$, 所以 $L \otimes_K \overline{K}$ 不是 Artin 半单的. 必要性：设 $K \subseteq L$ 是有限可分扩张, 那么本原元定理表明存在 $\alpha \in L$ 使得 $L = K(\alpha)$. 设 α 在 K 上最小多项式是 $m(x)$, 则 $m(x)$ 无重根, 所以对 K 的任何域扩张 $F[x]$, $m(x)$ 在 $F[x]$ 中可分解为一些两两不相伴的不可约多项式的乘积, 设两两不相伴的首一不可约多项式 $p_1(x), p_2(x), ..., p_s(x) \in F[x]$ 满足 $m(x) = p_1(x) \cdots p_s(x)$. 于是由 $L \otimes_K F = K(\alpha) \otimes_K F$ 以及 $K(\alpha) \cong K[x]/(m(x))$ 可知有 K-代数同构 $L \otimes_K F \cong F[x]/(m(x))$. 应用中国剩余定理可知

$$L \otimes_K F \cong F[x]/(p_1(x)) \times F[x]/(p_2(x)) \times \cdots \times F[x]/(p_s(x)),$$

即 $L \otimes_K F$ 同构于有限多个域的直积, 这说明 $L \otimes_K F$ 是 Artin 半单环. □

设 A 是域 F 上有限维代数, 如果对任给域扩张 $E \supseteq F$, $A \otimes_F E$ 是 Artin 半单代数, 则称 A 是**可分代数**. [引理1.1] 表明有限扩张 $K \subseteq L$ 是可分的当且仅当 ${}_K L$ 是可分代数.

Proposition 1.2. 设 F 是域, A 是可分 F-代数, 则 A^e 是 Artin 半单代数.

Proof. 设 E 是 F 的代数闭包. 因为 A 是有限维 F-代数, 故 $A \otimes_F E$ 是域 E 上有限维代数. 因为 $A \otimes_F E$ 是 Artin 半单环, 所以存在有限个极大理想 $I_1, I_2, ..., I_s$ 使得

$$\Theta : A \otimes_F E \to (A \otimes_F E)/I_1 \oplus (A \otimes_F E)/I_2 \oplus \cdots \oplus (A \otimes_F E)/I_s, x \mapsto (x + I_1, x + I_2, ..., x + I_s)$$

是 E-代数同构. 由单环结构定理证明过程知每个 $(A\otimes_F E)/I_k$ 代数同构于某个除环 (它某个不可约模自同态环) 上的矩阵环. 因 E 是代数闭域, 且每个 $(A\otimes_F E)/I_k$ 是有限维 E-代数, 故其上不可约模的自同态环作为 E-代数同构于 E, 进而知存在矩阵环 $M_{n_1}(E), M_{n_2}(E), ..., M_{n_s}(E)$ 使得有 E-代数同构 $A\otimes_F E\cong M_{n_1}(E)\oplus M_{n_2}(E)\oplus\cdots\oplus M_{n_s}(E)$. 于是有 E-代数同构 $A^{op}\otimes_F E=(A\otimes_F E)^{op}\cong (M_{n_1}(E))^{op}\oplus (M_{n_2}(E))^{op}\oplus\cdots\oplus (M_{n_s}(E))^{op}\cong M_{n_1}(E)\oplus M_{n_2}(E)\oplus\cdots\oplus M_{n_s}(E)$. 于是有 E-代数同构 $A^e\otimes_F E=(A\otimes_F A^{op})\otimes_F E\cong (A\otimes_F A^{op})\otimes_F (E\otimes_E E)\cong A\otimes_F (E\otimes_E E)\otimes_F A^{op}\cong (A\otimes_F E)\otimes_E (E\otimes_F A^{op})\cong (M_{n_1}(E)\oplus M_{n_2}(E)\oplus\cdots\oplus M_{n_s}(E))\otimes_E (M_{n_1}(E)\oplus M_{n_2}(E)\oplus\cdots\oplus M_{n_s}(E))\cong \oplus_{i=1}^s\oplus_{j=1}^s M_{n_in_j}(E)$, 所以 $A^e\otimes_F E$ 是 Artin 半单代数. 命 $\varphi: A^e\to A^e\otimes_F E, x\mapsto x\otimes 1_F$, 易见这是单 $F-$ 代数同态. 由于 A^e 是有限维 $F-$ 代数, 故 A^e 是左 Artin 环, 要证明它是半单的, 由 Artin 半单环结构定理, 只需证明 A^e 是半本原的. 我们来证明 $\mathrm{Jac}(A^e)=0$. 任取 $x\in \mathrm{Jac}(A^e)$, 我们断言对任何 $\sum\limits_{i=1}^{l} x_i\otimes k_i\in A^e\otimes_F E (x_i\in A^e, k_i\in E, 1\le i\le l)$, $(\sum\limits_{i=1}^{l} x_i\otimes k_i)(x\otimes 1_F)$ 是 $A^e\otimes_F E$ 中幂零元, 由此说明 $x\otimes 1_F$ 是 $A^e\otimes_F E$ 中左拟正则元, 从而得到 $x\otimes 1_F\in \mathrm{Jac}(A^e\otimes_F E)$. 因为 A^e 是左 Artin 环, 所以 $\mathrm{Jac}(A^e)$ 是幂零理想, 于是存在正整数 t 使得 $(\mathrm{Jac}(A^e))^t=0$. 下证 $[(\sum\limits_{i=1}^{l} x_i\otimes k_i)(x\otimes 1_F)]^t=0$, 对于

$$[(\sum_{i=1}^{l} x_i\otimes k_i)(x\otimes 1_F)]^t=(\sum_{i=1}^{l} x_ix\otimes k_i)^t,$$

将等式右边展开知存在 $y_1, y_2, ..., y_l\in (\mathrm{Jac}(A^e))^t, a_1, a_2, ..., a_l\in E$ 使

$$(\sum_{i=1}^{l} x_ix\otimes k_i)^t=y_1\otimes a_1+y_2\otimes a_2+\cdots+y_l\otimes a_l.$$

而 $(\mathrm{Jac}(A^e))^t=0$, 所以 $y_1=y_2=\cdots=y_l=0$, 故上式等号右边是零, 断言得证. 所以 $x\otimes 1_F\in \mathrm{Jac}(A^e\otimes_F E)=0, \forall x\in \mathrm{Jac}(A^e)$. 故 $x=0, \forall x\in \mathrm{Jac}(A^e)$. 这就得到 $\mathrm{Jac}(A^e)=0$, 所以 A^e 是 Artin 半单环. □

Remark 1.3. 因为 Artin 半单环上的模均投射, 所以可分代数 A 作为 A^e-模也投射.

2 Wedderburn 主定理

下面我们可以给出 Wedderburn 主定理的证明.

Wedderburn Principal Theorem. 设 A 是域 F 上有限维代数, 记 $N=\mathrm{Jac}(A)$, 若 $\overline{A}=A/N$ 是可分代数, 则存在 A 的一个子代数 S 使得 $A=N+S$ 且 $N\cap S=\{0\}$, 即作为 F-线性空间有直和分解 $A=N\oplus S$.

Proof. 我们先证明结论对 $N^2=\{0\}$ 的情形成立, 再对 $\dim_F A$ 作归纳证明一般的情形.

Step1. 设 $N^2=\{0\}$, 因为 N 是 A 的 F-子空间, 所以存在补空间 V 使得 $A=N\oplus V$, 并且可选取 V 使得 $1_A\in V$(这是因为商空间 A/N 非零). 我们有标准投射 $p: A\to\overline{A}, a\mapsto a+N$, 它满是 F-代数同态, 以及 F-线性映射 $i:\overline{A}\to A, (n+v)+N\mapsto v$, 这里 $n\in N, v\in V$ 是代表元 $n+v$ 的分解, 那么 $pi=\mathrm{id}_{\overline{A}}$ 且 $i(1_A+N)=1_A$. 下面基于线性映射 i 构造一代数同态 $i':\overline{A}\to A$ 使得 $pi'=\mathrm{id}_{\overline{A}}$, 一旦这样的代数同态 i' 存在, 那么 $A=\mathrm{Ker}p\oplus i'(\overline{A})=N\oplus S$, 这里直和是线性空间的直和, $S=i'(\overline{A})$ 是 A 的子代数. 现令 $f:\overline{A}\times\overline{A}\to N$ 满足 $f(a+N, b+N)=i(ab+N)-i(a+N)i(b+N)$, f 作为映射明显是定义合理的, 且 $p(i(ab+N)-i(a+N)i(b+N))=(ab+N)-(a+N)(b+N)=0+N$ 表明

$i(ab+N)-i(a+N)i(b+N)\in \mathrm{Ker}p=N$. 易见 f 是 F-双线性映射, 即 $f\in C^2(\overline{A},N)$. 我们说明 N 上有 $\overline{A}$-$\overline{A}$ 双模结构：$\overline{A}\times N\to N,(a+N,x)\mapsto i(a+N)x, N\times\overline{A}\to N,(x,a+N)\mapsto xi(a+N)$, 因为 $N^2=\{0\}$, 所以上述数乘作用给出 N 的双模结构. 进而知 N 有左 $\overline{A}^e$-模结构, 我们知道代数 $\overline{A}$ 系数在 N 中的上同调由下述 F-模复形给出：

$$0\longrightarrow C^0(\overline{A},N)\xrightarrow{\delta^0}C^1(\overline{A},N)\xrightarrow{\delta^1}C^2(\overline{A},N)\xrightarrow{\delta^2}\cdots,$$

其中 $C^0(\overline{A},N)=N, C^n(\overline{A},N)$ 表示 $\overline{A}^n$ 到 N 的 n-线性映射全体, $\delta^0:N\to C^1(\overline{A},N), n\mapsto\delta^0(n):\overline{A}\to N, x\mapsto xn-nx$, 对每个 $n\geq 1$, $\delta^n:C^n(\overline{A},N)\to C^{n+1}(\overline{A},N)$ 满足对每个 $f\in C^n(\overline{A},N)$ 有

$$\delta^n(f)(x_1,x_2,...,x_{n+1})=x_1f(x_2,...,x_{n+1})+\sum_{i=1}^{n}(-1)^if(x_1,...,x_ix_{i+1},...,x_{n+1})+(-1)^{n+1}f(x_1,...,x_n)x_{n+1}.$$

直接计算可知 $\delta^2(f)(a+N,b+N,c+N)=(a+N)f(b+N,c+N)-f(ab+N,c+N)+f(a+N,bc+N)-f(a+N,b+N)(c+N)=i(a+N)i(bc+N)-i(a+N)i(b+N)i(c+N)-i(abc+N)+i(ab+N)i(c+N)+i(abc+N)-i(a+N)i(bc+N)-i(ab+N)i(c+N)+i(a+N)i(b+N)i(c+N)=0$, 所以 $f\in Z^2(\overline{A},N)$. 因为 $\overline{A}$ 是可分代数, 所以它的包络代数 $\overline{A}^e$ 是 Artin 半单代数, 这表明其上模均投射, 从而 $\mathrm{Ext}^2_{\overline{A}^e}(\overline{A},N)=0$, 因此 $f\in Z^2(\overline{A},N)=B^2(\overline{A},N)$. 于是存在 $g\in C^1(\overline{A},N)$ 使得 $f=\delta^1(g)$, 记 $i':\overline{A}\to A, a+N\mapsto i(a+N)+g(a+N)$, 那么 $pi'=pi=\mathrm{id}_{\overline{A}}$. 下面验证 i' 是环同态, 任取 $a+N,b+N\in\overline{A}$, 有 $i'(ab+N)=i(ab+N)+g(ab+N)$ 且 $f(a+N,b+N)=i(a+N)g(b+N)-g(ab+N)+g(a+N)i(b+N)$, 于是 $i'(a+N)i'(b+N)=(i(a+N)+g(a+N))(i(b+N)+g(b+N))=i(ab+N)+g(ab+N)=i'(ab+N)$, 因此 i' 是环同态. 事实上, i' 是保幺环同态, 这是因为 $0=f(1_A+N,1_A+N)=i(1_A+N)g(1_A+N)-g(1_A+N)+g(1_A+N)i(1_A+N)=g(1_A+N)$, 所以结合 $i(1_A+N)=1_A$ 立即得到 i' 是保幺环同态, 那么它也是 F-代数同态. 因此记 $S=i'(\overline{A})$ 是 A 的子代数, 则 $A=N\oplus S$. 这就证明了 $N^2=\{0\}$ 时结论成立.

Step2. 下面对正整数 $n=\dim_FA$ 作归纳证明结论. 若 $n=1$, 则 $N=\{0\}$, 此时取 $S=A$ 即可. 假设结论对维数不超过 $n-1(n\geq 2)$ 的可分代数成立, 现考虑 $\dim_FA=n$ 的情形. 若 $N^2=\{0\}$, 由前面的讨论知结论成立. 因此我们可设 $N^2\neq\{0\}$, 命 $B=A/N^2$, 那么 $\mathrm{Jac}(B)=N/N^2$. 由 F-代数同构 $B/\mathrm{Jac}(B)=(A/N^2)/(N/N^2)\cong\overline{A}$ 知 $B/\mathrm{Jac}(B)$ 是维数为 n 的 F-可分代数, 注意到 $(\mathrm{Jac}(B))^2=\{0\}$, 所以由前面证明的特殊情形知存在 B 的子代数 S/N^2, 这里 S 是 A 的子代数且 $S\supseteq N^2$, 使得 $B=(S/N^2)\oplus(N/N^2)$, 这说明 $N\cap S=N^2$ 以及 $A=N+S$. 因为 $N^2\neq\{0\}$, 所以 $\dim_F(S/N^2)<\dim_FA=n$, 并注意到 F-代数同构 $\overline{A}\cong B/(N/N^2)\cong S/N^2$, 所以 S/N^2 是维数不超过 $n-1$ 的 F-可分代数. 下面说明 $\mathrm{Jac}(S)=N^2$, 一旦证明该断言, 对 S 使用归纳假设得到存在 S 的子代数 S' 使得 $S=S'\oplus N^2$, 于是 $A=N+S=N+S'$ 以及 $N\cap S'=(N\cap S')\cap S=N^2\cap S'=\{0\}$ 得到 $A=N\oplus S'$, 这里 S' 是 A 的子代数. 因此只需证明 $\mathrm{Jac}(S)=N^2$. 由代数同构 $S/N^2\cong\overline{A}\cong\overline{A}\otimes_FF$ 以及 $\overline{A}\otimes_FF$ 是 Artin 半单代数可得 S/N^2 是半本原环, 所以 $\mathrm{Jac}(S)\subseteq N^2$. 注意到 N^2 是 Artin 代数 A 的幂零理想, 所以 N^2 也是 S 的幂零理想, 于是利用 S 是 Artin 代数知 $N^2\subseteq\mathrm{Jac}(S)$. 因此 $\mathrm{Jac}(S)=N^2$, 结合前面的讨论知结论成立. □

参考文献

[Jac09] N. Jacobson. *Basic algebra II.* Dover Publications, 2nd edition, 2009.

[Wei94] C. A. Weibel. *An introduction to homological algebra.* Number 38. Cambridge university press, 1994.