Tor 函子与正向极限的交换性

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 11 月 27 日

这份笔记的目的是整理模范畴上的 Tor 函子与取正向极限可交换这一事实的证明. 首先我们需要

Lemma 1. 设 R 是含幺环, $\{N_i, \varphi_j^i\}_I$ 是 R-**Mod** 中正向集 I 上的正向系. 那么存在 R-**Mod** 中正向集 I 上的正向系 $\{F_i, \psi_j^i\}_I, \{K_i, \theta_j^i\}_I$ 以及模同态族 $\{\alpha_i : K_i \to F_i\}_{i\in I}, \{\beta_i : F_i \to N_i\}_{i\in I}$ 使得对每个 $i \in I$,

$$0 \longrightarrow K_i \xrightarrow{\alpha_i} F_i \xrightarrow{\beta_i} N_i \longrightarrow 0$$

是短正合列且 F_i 是自由模.

Proof. 对每个 $i \in I$, 作 $F_i = R^{N_i}$ 以及 $\beta_i(e_n) = n, \forall n \in N$, 其中 e_n 表示在指标 $n \in N$ 处为 1 其余分量为零的标准单位向量. $K_i = \mathrm{Ker}\beta_i$ 并设 $\alpha_i : K_i \to F_i$ 的标准嵌入. 那么对任何 $i \le j \in I$, 通过定义

$$\psi_j^i(e_n) = e_{\varphi_j^i(n)}, \forall n \in N,$$

可得下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_i \arrow[r, "\alpha_i"] & F_i \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[d, "\psi_j^i"] & N_i \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_j^i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_j \arrow[r, "\alpha_j"] & F_j \arrow[r, "\beta_j"] & N_j \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

根据 $\{N_i, \varphi_j^i\}_I$ 是正向系不难验证 $\{F_i, \psi_j^i\}_I$ 也是正向系. 易见存在唯一的模同态 $\theta_j^i : K_i \to K_j$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, dashed, "\theta_j^i"] & F_i \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[d, "\psi_j^i"] & N_i \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_j^i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_j \arrow[r, "\alpha_j"] & F_j \arrow[r, "\beta_j"] & N_j \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

利用 $\{F_i, \psi_j^i\}_I$ 是正向系以及每个 α_i 是单射易验证 $\{K_i, \theta_j^i\}_I$ 是正向系. □

Proposition 2. 设 R 是含幺环, $\{N_i, \varphi_j^i\}_I$ 是 R-**Mod** 中正向集 I 上的正向系, M 是右 R-模, 那么有加群同构 $\varinjlim \mathrm{Tor}_n^R(M, N_i) \cong \mathrm{Tor}_n^R(M, \varinjlim N_i), \forall n \in \mathbb{N}$.

Proof. 通过对自然数 n 作归纳证明. 当 $n=0$ 时, 结论由张量积保持正向极限即得. 假设结论对 $n-1(n\geq 1)$ 的情形成立, 现考察 n 的情形. 根据前面的引理, 对正向系 $\{N_i,\varphi_j^i\}_I$, 存在正向系 $\{F_i,\psi_j^i\}_I,\{K_i,\theta_j^i\}_I$ 以及模同态族 $\{\alpha_i:K_i\to F_i\}_{i\in I},\{\beta_i:F_i\to N_i\}_{i\in I}$ 使得对每个 $i\in I$,

$$0\longrightarrow K_i\xrightarrow{\alpha_i}F_i\xrightarrow{\beta_i}N_i\longrightarrow 0$$

是短正合列且 F_i 是自由模. 先固定 $i\in I$, 考察上述短正合列诱导的 Tor 群长正合列:

$$0\longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M,N_i)\longrightarrow M\otimes_R K_i\longrightarrow M\otimes_R F_i\longrightarrow M\otimes_R N_i\longrightarrow 0,$$

$$0\longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(M,N_i)\longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^R(M,K_i)\longrightarrow 0(n\geq 2).$$

当 $n=1$ 时, 通过张量积保持正向极限, $\varinjlim F_i$ 平坦以及考察 $0\longrightarrow \varinjlim K_i\xrightarrow{\alpha_i}\varinjlim F_i\xrightarrow{\beta_i}\varinjlim N_i\longrightarrow 0$ 导出的 Tor 群长正合列便知 $\varinjlim \mathrm{Tor}_1^R(M,N_i)\cong \mathrm{Tor}_1^R(M,\varinjlim N_i)$. 当 $n\geq 2$ 时, 对正向系 $\{K_i,\theta_j^i\}_I$ 使用归纳假设得到 $\varinjlim \mathrm{Tor}_{n-1}^R(M,K_i)\cong \mathrm{Tor}_{n-1}^R(M,\varinjlim K_i)$. 由此结合 $\varinjlim F_i$ 平坦得到

$$\varinjlim \mathrm{Tor}_n^R(M,N_i)\cong \varinjlim \mathrm{Tor}_{n-1}^R(M,K_i)\cong \mathrm{Tor}_{n-1}^R(M,\varinjlim K_i)\cong \mathrm{Tor}_n^R(M,\varinjlim N_i).$$

□

Corollary 3. 设 R 是含幺环, M 是右 R-模, N 是左 R-模. 如果 $\mathrm{Tor}_n^R(M,N)\neq 0$, 那么存在 N 的有限生成子模 N' 使得 $\mathrm{Tor}_n^R(M,N')\neq 0$. 即若 $\mathrm{Tor}_n^R(M,N')=0$ 对 N 任何有限生成子模 N' 成立, 则 $\mathrm{Tor}_n^R(M,N)=0$.

Proof. 这是因为任何模都是该模所有有限生成子模关于包含关系构成正向系的正向极限. □