

Ribbon Hopf 代数

戚天成 

复旦大学 数学科学学院

2026 年 9 月 9 日

1 概念回顾

1.1 拟三角 Hopf 代数

拟三角 Hopf 代数因能够提供统计力学中量子 Yang-Baxter 方程的解而被广泛关注. 设 H 是域 $\mathbb{k}$ 上对极是双射的 Hopf 代数. 回忆 $R \in H \otimes H$ 被称为 H 的一个泛 R -矩阵 (或 H 上的一个拟三角结构), 如果满足

$$(\Delta \otimes \text{id}_H)(R) = R^{13}R^{23}, (\text{id}_H \otimes \Delta)(R) = R^{13}R^{12}, \tau\Delta(h) = R\Delta(h)R^{-1}$$

对所有 $h \in H$ 成立, 其中 τ 表示张量积空间交换分量次序的标准扭同构. 当 R 是 H 的一个泛 R -矩阵时, 二元组 (H, R) 被称为拟三角 Hopf 代数. 对极是双射的 Hopf 代数 H 的泛 R -矩阵全体和幺半范畴 $H\text{-Mod}$ 上的辫结构全体有典范双射 $R \mapsto (c_{V,W} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V, v \otimes w \mapsto R^{-1}(w \otimes v) = (R^{-1})_l \tau(v \otimes w))$. 因此 H 上的拟三角结构与 $H\text{-Mod}$ 上的辫结构一一对应 (特别地, $H\text{-Mod}$ 上的辫结构全体构成集合). 由于幺半范畴 $(\mathcal{C}, \otimes)$ 上任何辫结构 c 诱导新的辫结构 $\bar{c}_{X,Y} = c_{Y,X}^{-1}$ (相应的辫幺半范畴 $\bar{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \bar{c})$ 被称为 $(\mathcal{C}, c)$ 的镜像范畴). 因此前面指出的 H 的泛 R -矩阵全体构成的集合与 $H\text{-Mod}$ 上的辫结构全体构成的集合上的双射不是唯一的, 例如也可以由 $R \mapsto (\bar{c}_{V,W} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V, v \otimes w \mapsto \tau R_l(v \otimes w))$, 这与 [EGNO15, §8.3] 中的习惯一致. 这时, 对任何左 H -模 V (例如 $V = H$), $\bar{c}_{V,V} : V \otimes V \rightarrow V \otimes V, v \otimes w \mapsto \tau R_l(v \otimes w)$ 产生辫线性空间 $(V, \bar{c}_{V,V})$, 即 $\bar{c}_{V,V}$ 是 V 上的 Yang-Baxter 算子. 故拟三角 Hopf 代数的表示可自然产生 Artin 辫群的表示.

拟三角 Hopf 代数 (H, R) 被称为三角的 (这时 R 是三角结构), 如果 $\tau(R) = R^{-1}$. 这时前面的典范双射

$$R \mapsto (c_{V,W} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V, v \otimes w \mapsto R^{-1}(w \otimes v))$$

将三角结构对应到对称辫结构. 反之, 对称辫结构关于上述双射的原像给出的泛 R -矩阵是三角的. 如果 H 是有限维 Hopf 代数且 $H\text{-mod}$ 是有限维左 H -模范畴. 那么 H 上的拟三角结构对应 $H\text{-mod}$ 上的辫结构.

Remark 1.1. 我们指出拟三角 Hopf 代数 H 的 S^2 是内自同构 [Dri89]: 命 $R = \sum_i a_i \otimes b_i \in H \otimes H$ 并考虑

$$u = \sum_i S(b_i)a_i \in H. \tag{1.1}$$

我们说明 $u \in H$ 是可逆元且 $S^2(h) = uhu^{-1}, \forall h \in H$. 首先我们验证对所有的 $h \in H$ 有

$$uh = S^2(h)u. \quad (1.2)$$

根据定义中的等式 $\tau\Delta(h) = R\Delta(h)R^{-1}$, 对任何 $h \in H$ 有 $(R \otimes 1) \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)} \otimes h_{(3)} = (\sum_{(h)} h_{(2)} \otimes h_{(1)} \otimes h_{(3)})(R \otimes 1)$. 于是我们有 $\sum_{i,(h)} a_i h_{(1)} \otimes b_i h_{(2)} \otimes h_{(3)} = \sum_{i,(h)} h_{(2)} a_i \otimes h_{(1)} b_i \otimes h_{(3)}$. 进而

$$\sum_{i,(h)} S^2(h_{(3)}) S(b_i h_{(2)}) a_i h_{(1)} = \sum_{i,(h)} S^2(h_{(3)}) S(h_{(1)} b_i) h_{(2)} a_i.$$

将上式化简便知(1.2)成立. 因此只需要再验证 u 是可逆元. 记 $R^{-1} = \sum_j c_j \otimes d_j$. 考虑 $v = \sum_j S^{-1}(d_j) c_j$. 则

$$\begin{aligned} uv &= \sum_j u S^{-1}(d_j) c_j \\ &= \sum_j S(d_j) u c_j && \text{利用 (1.2)} \\ &= \sum_{i,j} S(d_j) S(b_i) a_i c_j \\ &= \sum_{i,j} S(b_i d_j) a_i c_j \\ &= 1 && \text{利用 } RR^{-1} = 1 \otimes 1. \end{aligned}$$

而(1.2)说明 $1 = uv = S^2(v)u$, 这蕴含 u 是可逆元. 由(1.1)定义的元素被称为 **Drinfeld 元**.

特别地, 如果拟三角 Hopf 代数 (H, R) 满足 $S^2 = \text{id}$, 那么(1.2)蕴含 Drinfeld 元 u 是 H 的中心元.

Example 1.2 ([EGNO15]). 设 H 是余交换 Hopf 代数 (例如群代数), 则 $S^2 = \text{id}$. 这时定义 $R = 1 \otimes 1 \in H \otimes H$ 可知 (H, R) 是拟三角 Hopf 代数. 更进一步, 这时 $\tau(R) = R^{-1}$ 表明 R 是三角结构.

Proposition 1.3 ([Mon93]). 设 (H, R) 拟三角 Hopf 代数, 那么有

$$R^{12} R^{13} R^{23} = R^{23} R^{13} R^{12}, \quad (1.3)$$

$$(S \otimes \text{id}_H)R = R^{-1} = (\text{id}_H \otimes S^{-1})R, \quad (S \otimes S)(R) = R, \quad (1.4)$$

$$(\varepsilon \otimes \text{id}_H)R = 1 = (\text{id}_H \otimes \varepsilon)R. \quad (1.5)$$

这里的等式 (1.3) 在统计力学中被称为量子 **Yang-Baxter 方程 (QYBE)**. 故拟三角 Hopf 代数的 R -矩阵能够产生量子 Yang-Baxter 方程的解.

Proof. 先说明 R -矩阵 R 满足 (1.3). 根据拟三角 Hopf 代数的定义, $R^{12} R^{13} R^{23} = R^{12}(\Delta \otimes \text{id}_H)R$. 可通过 H 是几乎余交换 Hopf 代数直接计算验证 $R^{12}(\Delta \otimes \text{id}_H)R = (\tau\Delta \otimes \text{id}_H)(R)R^{12}$. 直接计算表明 $(\tau\Delta \otimes \text{id}_H)(R) = R^{23} R^{13}$. 于是 R 满足 (1.3). 对 $(\Delta \otimes \text{id}_H)(R) = R^{13} R^{23}$ 两边作用 $\varepsilon \otimes \text{id}_H \otimes \text{id}_H$ 得到 $1 \otimes R = 1 \otimes [(\varepsilon \otimes \text{id}_H)(R)]R$, 结合 $1 \otimes R \in H \otimes H \otimes H$ 可逆得到 $(\varepsilon \otimes \text{id}_H)R = 1$. 类似对 $(\text{id}_H \otimes \Delta)(R) = R^{13} R^{12}$ 作用 $\text{id}_H \otimes \text{id}_H \otimes \varepsilon$ 可推得 $(\text{id}_H \otimes \varepsilon)R = 1$, 这就证明了 (1.5). 最后验证 (1.4) 来完成命题证明.

可直接计算验证 $R(S \otimes \text{id}_H)(R) = (\mu \otimes \text{id}_H)(\text{id}_H \otimes S \otimes \text{id}_H)(R^{13} R^{23})$. 应用 $(\Delta \otimes \text{id}_H)(R) = R^{13} R^{23}$ 得到 $R(S \otimes \text{id}_H)(R) = (\mu \otimes \text{id}_H)(\text{id}_H \otimes S \otimes \text{id}_H)(\Delta \otimes \text{id}_H)(R) = (\varepsilon \otimes \text{id}_H)R = 1$. 这说明 $(S \otimes \text{id}_H)R = R^{-1}$.

现在 H^{cop} 是以 S^{-1} 为对极的 Hopf 代数. 记 $\hat{R} = \tau(R)$, 可直接验证 $(H^{cop}, \hat{R})$ 是拟三角 Hopf 代数. 所以根据前面证明的结果, 有 $(S^{-1} \otimes \text{id}_H)\hat{R} = \hat{R}^{-1}$. 整理可得 $(\text{id}_H \otimes S^{-1})(R)R = 1$. 即 $(\text{id}_H \otimes S^{-1})(R) = R^{-1}$, 现在我们得到 $(S \otimes \text{id}_H)R = R^{-1} = (\text{id}_H \otimes S^{-1})R$. 对等式 $(S \otimes \text{id}_H)R = (\text{id}_H \otimes S^{-1})R$ 两边作用 $\text{id}_H \otimes S$ 得到 $(S \otimes S)(R) = R$, 这证明了 (1.4). $\square$

Remark 1.4. 设 (H, R) 是拟三角 Hopf 代数, 那么 $H\text{-Mod}$ 上有辫结构 $\bar{c}$. 具体地, 我们设 $R = \sum_i a_i \otimes b_i$, 则 $\bar{c}$ 满足 $\bar{c}_{V,W} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V, v \otimes w \mapsto \sum_i b_i w \otimes a_i v$. 对辫么半范畴 $(H\text{-Mod}, \bar{c})$ 中任何两个对象 X, Y , 利用(1.4)给出的 $R^{-1} = \sum_i S(a_i) \otimes b_i$ 可直接计算验证下式成立:

$$\bar{c}_{X^*, Y} = (\text{ev}_X \otimes \text{id}_{Y \otimes X^*})(\text{id}_{X^*} \otimes \bar{c}_{X, Y}^{-1} \otimes \text{id}_{X^*})(\text{id}_{X^* \otimes Y} \otimes \text{coev}_X). \quad (1.6)$$

类似地, 利用(1.4)给出的 $R^{-1} = \sum_i a_i \otimes S^{-1}(b_i)$ 可直接验证

$$\bar{c}_{Y, X^*}^{-1} = (\text{ev}_X \otimes \text{id}_{Y \otimes X^*})(\text{id}_{X^*} \otimes \bar{c}_{Y, X} \otimes \text{id}_{X^*})(\text{id}_{X^* \otimes Y} \otimes \text{coev}_X). \quad (1.7)$$

式(1.6)和(1.7)在一般的辫么半范畴场景也成立 (加入合适的典范同构), 见 [EGNO15, Lemma 8.9.1]. 通过 $(S \otimes S)(R) = R$ 可直接验证对任何两个 $(H\text{-Mod}, \bar{c})$ 中对象 X, Y , 有典范的交换图:

$$\begin{array}{ccc} (Y \otimes X)^* & \xrightarrow{(\bar{c}_{X, Y})^*} & (X \otimes Y)^* \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ X^* \otimes Y^* & \xrightarrow{\bar{c}_{X^*, Y^*}} & Y^* \otimes X^* \end{array} \quad (1.8)$$

交换图(1.8)对任何辫么半范畴同样成立, 见 [EGNO15, Exercise 8.9.2].

Corollary 1.5 ([EGNO15]). 设 (H, R) 是拟三角 Hopf 代数, 记 $R = \sum_i a_i \otimes b_i$. 则 Drinfeld 元 $u = \sum_i S(b_i)a_i$ 有乘法逆元 $u^{-1} = \sum_i b_i S^2(a_i)$.

Proof. 只需要说明 $\sum_i b_i u a_i = 1$. 原因是一旦证明该断言, 由 $\sum_i b_i S^2(a_i)u = \sum_i b_i u a_i$ (这里使用了式(1.2)) 便得结果. 现在(1.4)说明 $\sum_i S(b_i) \otimes S(a_i) = \sum_i b_i \otimes a_i$, 进而 $\sum_i b_i u a_i = \sum_i S(b_i)u S(a_i) = \sum_{i,j} S(b_i)S(b_j)a_j S(a_i)$. 而(1.4)中的 $R(S \otimes \text{id})(R) = 1 \otimes 1$ 说明 $\sum_{i,j} a_j S(a_i) \otimes b_j b_i = 1 \otimes 1$. 这说明 $\sum_{i,j} S(b_i)S(b_j)a_j S(a_i) = 1$. $\square$

Lemma 1.6. 设 (H, R) 是拟三角 Hopf 代数, 那么 H 的任何中心 Hopf 子代数是余交换的.

Proof. 设 C 是 H 的中心 Hopf 子代数, 那么对任何 $c \in C$ 有 $\tau\Delta(c) = R\Delta(c)R^{-1} = \Delta(c)$. $\square$

Remark 1.7. 设 $\mathfrak{g}$ 是复半单 Lie 代数, $\ell \geq 3$ 是奇数且当 $\mathfrak{g}$ 含有 G_2 型因子时要求 ℓ 和 3 互素, 并设 $\epsilon \in \mathbb{C}^\times$ 是 ℓ 次本原单位根. 以下谈论的量子群基域均为 $\mathbb{C}$. 我们指出 [引理1.6] 说明 De Concini-Kac 量子包络代数 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 和 De Concini-Kac-Procesi 量子 Borel 代数 $\mathcal{U}_\epsilon^{\geq 0}(\mathfrak{g})$ 均不是拟三角 Hopf 代数: 量子群 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 和 $\mathcal{U}_\epsilon^{\geq 0}(\mathfrak{g})$ 均有不余交换的中心 Hopf 子代数. 在前面对本原单位根 ϵ 的假设下, Lusztig 小量子群 $u_\epsilon(\mathfrak{g})$ 是拟三角的 [M98, LO17]. Gelaki 在 [Gel99, Theorem 3.3] 得到特征零的代数闭域上拟三角 Hopf 代数如果是 basic 的, 那么 $S^4 = \text{id}$. 由此不难看到小量子 Borel 子群 $u_\epsilon^{\geq 0}(\mathfrak{g})$ 上不存在拟三角结构.

回忆在刚性幺半范畴 $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ 中, 任何态射 $f : X \rightarrow Y$ 给出交换图 (来自 f^* 的定义):

$$\begin{array}{ccc} Y^* \otimes X & \xrightarrow{f^* \otimes 1} & X^* \otimes X \\ 1 \otimes f \downarrow & & \downarrow \text{ev}_X \\ Y^* \otimes Y & \xrightarrow{\text{ev}_Y} & \mathbf{1} \end{array} \quad (1.9)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \xrightarrow{\text{coev}_Y} & Y \otimes Y^* \\ \text{coev}_X \downarrow & & \downarrow 1 \otimes f^* \\ X \otimes X^* & \xrightarrow{f \otimes 1} & Y \otimes X^* \end{array} \quad (1.10)$$

在刚性辫幺半范畴 $(\mathcal{C}, c)$ 中, 利用(1.10)以及(1.10)可验证下面定义的态射 $u_X : X \rightarrow X^{**}$ 关于变量 X 自然:

$$X \xrightarrow{\text{id}_X \otimes \text{coev}_{X^*}} X \otimes X^* \otimes X^{**} \xrightarrow{c_{X, X^*} \otimes \text{id}_{X^{**}}} X^* \otimes X \otimes X^{**} \xrightarrow{\text{ev}_X \otimes \text{id}_{X^{**}}} X^{**}. \quad (1.11)$$

由(1.11)给出的自然变换 $u : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow (-)^{**}$ 被称为 **Drinfeld 自然变换/态射**. Drinfeld 自然变换的一个重要特性是对任何 $\mathcal{C}$ 中对象 X, Y , 有下面的交换图 [EGNO15, Proposition 8.9.3]:

$$\begin{array}{ccc} & X \otimes Y & \xrightarrow{u_X \otimes u_Y} X^{**} \otimes Y^{**} \\ c_{X, Y} \swarrow & & \downarrow \cong \\ Y \otimes X & & \\ c_{Y, X} \searrow & & \downarrow \\ & Y \otimes X & \xrightarrow{u_{X \otimes Y}} (X \otimes Y)^{**} \end{array} \quad (1.12)$$

交换图(1.12)表明通常 Drinfeld 自然变换未必是幺半函子间的自然变换. 记图(1.12)右边的典范自然同构是 $\gamma_{X, Y} : X^{**} \otimes Y^{**} \rightarrow (X \otimes Y)^{**}$, 则图(1.12)可等价地描述为

$$u_{X \otimes Y} c_{Y, X} c_{X, Y} = \gamma_{X, Y} (u_X \otimes u_Y). \quad (1.13)$$

Example 1.8 ([EGNO15]). 设 (H, R) 是拟三角 Hopf 代数, 考虑 $H\text{-Mod}$ 上的辫结构 $\bar{c}$. 那么辫幺半范畴 $(H\text{-Mod}, \bar{c})$ 中每个对象 X 上的 Drinfeld 态射 $u_X : X \rightarrow X^{**}$ 满足

$$u_X(x) = \left(\sum_i S(b_i) a_i x \right)^{**},$$

其中 $R = \sum_i a_i \otimes b_i$. 因此这时 Drinfeld 自然变换本质上来自 Drinfeld 元(1.1)的左乘. 从(1.12)的交换性得到:

$$\Delta(u)(\tau(R)R) = u \otimes u. \quad (1.14)$$

从 [推论1.5] 和 [例1.8] 不难看到拟三角 Hopf 代数的有限维模范畴上的 Drinfeld 自然变换是自然同构. 下面我们说明这对任何辫张量范畴都成立:

Proposition 1.9 ([EGNO15]). 设 $(\mathcal{C}, c)$ 是域 $\mathbb{k}$ 上的辫张量范畴 (未必有限), 那么式(1.11)定义的 Drinfeld 自然变换 $u : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow (-)^{**}$ 是自然同构. 特别地, 对任何 $\mathcal{C}$ 中对象 X 有 $X^* \cong {}^*X$.

Proof. 固定 $\mathcal{C}$ 中对象 $X \neq 0$. 根据(1.11), Drinfeld 态射 $u_X : X \rightarrow X^{**}$ 和典范同构 $X^{**} \cong \mathbf{1} \otimes X^{**}$ 的合成给出的态射 $\check{u}_X : X \rightarrow \mathbf{1} \otimes X^{**}$ 就是态射 $\text{ev}_X c_{X, X^*} : X \otimes X^* \rightarrow \mathbf{1}$ 在伴随同构

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes X^*, \mathbf{1}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathbf{1} \otimes X^{**})$$

下的像, 所以由 c_{X, X^*} 是同构以及 $\text{ev}_X \neq 0$ (因为 $X \neq 0$) 得到 $\check{u}_X \neq 0$. 于是 $u_X : X \rightarrow X^{**}$ 是非零态射. 由于当 X 是单对象时, X^{**} 也是单对象. 所以当 X 是单对象时, $u_X : X \rightarrow X^{**}$ 是同构. 现在由 $(-)^{**}$ 是正合函子以及 $\mathcal{C}$ 中对象都有有限长, 可通过对对象的长度作归纳证明对 $\mathcal{C}$ 中任何对象 X , $u_X : X \rightarrow X^{**}$ 是同构. $\square$

1.2 Ribbon 结构

设 $(\mathcal{C}, c)$ 是辫刚性幺半范畴. 称自然同构 $\theta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的一个 **twist** (或平衡变换), 如果

$$\theta_{X \otimes Y} = (\theta_X \otimes \theta_Y) c_{Y, X} c_{X, Y} \quad (1.15)$$

对所有 $\mathcal{C}$ 中对象 X, Y 成立. 如果 $\mathcal{C}$ 上的 twist $\theta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ 满足 $(\theta_X)^* = \theta_{X^*}$ 对所有 $\mathcal{C}$ 中对象 X 成立, 那么称 θ 是 $\mathcal{C}$ 上的一个 **ribbon 结构**. 带有 ribbon 结构 θ 的辫刚性幺半范畴 $(\mathcal{C}, c)$ 称为 **ribbon 幺半范畴**. 如果辫幺半范畴 $(\mathcal{C}, c)$ 是辫张量范畴, 将带有 ribbon 结构的辫张量范畴称为 **ribbon 张量范畴**.

Remark 1.10. 根据辫结构 c 的自然性, 式(1.15)也可以等价地改写为:

$$\theta_{X \otimes Y} = (\theta_X \otimes \theta_Y) c_{Y, X} c_{X, Y} = c_{Y, X} c_{X, Y} (\theta_X \otimes \theta_Y).$$

如果取 $X = Y = \mathbf{1}$, 那么 $\theta_{1 \otimes 1} = \theta_1 \otimes \theta_1$. 当 $\mathcal{C}$ 是张量范畴时, $\theta_1 \in \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}) \cong \mathbb{k}$, 这迫使 $\theta_1 = 1_1$.

设 $(\mathcal{C}, c)$ 是域 $\mathbb{k}$ 上的辫张量范畴, 则 [命题1.9] 说明 $\mathcal{C}$ 中的自然同构 $\psi : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow (-)^{**}$ 可经 Drinfeld 自然同构 u 分解: 存在自然同构 $\theta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ 使得对任何 $\mathcal{C}$ 中对象 X 有:

$$\psi_X = u_X \theta_X. \quad (1.16)$$

回忆张量范畴 $\mathcal{C}$ 上的自然变换 $\psi : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow (-)^{**}$ 被称为 $\mathcal{C}$ 上的 **pivotal 结构**, 如果 ψ 满足

$$\begin{array}{ccc} X \otimes Y & & \\ \psi_X \otimes \psi_Y \downarrow & \searrow \psi_{X \otimes Y} & \\ X^{**} \otimes Y^{**} & \xrightarrow{\gamma_{X, Y}} & (X \otimes Y)^{**} \end{array}$$

交换对所有 $X, Y \in \text{ob } \mathcal{C}$ 成立, 其中 $\gamma_{X, Y} : X^{**} \otimes Y^{**} \rightarrow (X \otimes Y)^{**}$ 是典范自然同构 (同图(1.12)).

Example 1.11. 设 H 是 Hopf 代数, 有群样元 g 满足 $S^2(h) = ghg^{-1}, \forall h \in H$. 我们说明有限维左 H -模范畴 $H\text{-mod}$ 上有自然的 pivotal 结构. 对每个有限维左 H -模 V , 置 $\alpha_V : V \rightarrow V^{**}, v \mapsto g(v)^{**}$, 这明显是线性同构. 我们验证 α_V 是左 H -模同构: 对每个 $\xi \in V^*$, $(h\alpha_V(v))(\xi) = hg(v)^{**}(\xi) = v^{**}(S(hg)\xi) = S(hg)\xi(v) = \xi(S^2(hg)v) = \xi(ghv) = \xi(S(g)hv) = (hv)^{**}(S(g)\xi) = g(hv)^{**}(\xi) = \alpha_V(hv)(\xi)$. 这验证了 α_V 是左 H -模同构. 可直接计算验证自然同构 $\alpha : (-) \rightarrow (-)^{**}$ 定义了张量范畴 $H\text{-mod}$ 上的 pivotal 结构.

反之, 我们说明域上的有限维 Hopf 代数 H 如果满足有限维模范畴 $H\text{-mod}$ 上有 pivotal 结构, 那么 H 的对极 S 满足 S^2 是某个群样元决定的内自同构 (即存在群样元 g 使得 $S^2(h) = ghg^{-1}, \forall h \in H$). 现在设

$H\text{-mod}$ 上的 pivotal 结构是 $\alpha : (-) \rightarrow (-)^{**}$. 那么得到左 H -模同构 $\alpha_H : H \rightarrow H^{**}$. 于是存在唯一的 $g \in H$ 使得 $g^{**} = \alpha_H(1)$. 因为 α_H 是左 H -模同态, 所以 $\alpha_H(h) = h\alpha_H(1) = hg^{**} = (S^2(h)g)^{**}$. 特别地, g 满足在 H 中有左逆. 故由 H 是有限维代数得到 g 是可逆元.

现在对任何有限维左 H -模 V 和 $v \in V$, 我们断言

$$\alpha_V(v) = (gv)^{**}. \quad (1.17)$$

考虑左 H -模同态 $\theta : H \rightarrow V, h \mapsto hv$. 那么我们有交换图:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\alpha_H} & H^{**} \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta^{**} \\ V & \xrightarrow{\alpha_V} & V^{**} \end{array}$$

上图的交换性以及 $\theta^{**}(k^{**}) = (kv)^{**}$ 说明(1.17)成立. 特别地, 取 $V = H \otimes H$ 和 $\theta = \Delta$ 得到 $\Delta(g)^{**} = (g \otimes g)^{**}$. 这迫使 $\Delta(g) = g \otimes g$. 所以 g 是群样元. 最后我们说明 $S^2(k) = gkg^{-1}, \forall k \in H$. 根据(1.17), $(S^2(k)g)^{**} = \alpha_H(k) = (gk)^{**}$. 因此 $S^2(k)g = gk$. 这蕴含 S^2 是由群样元 g 决定的内自同构.

一般地, 有限维 Hopf 代数即使 S^2 是内自同构, S^2 也未必由某个群样元给出. 存在有限维拟三角 Hopf 代数产生这样的例子 [Hal21]. 所以有限维拟三角 Hopf 代数的有限维模范畴未必具有 pivotal 结构.

根据图(1.13)的交换性, 下图右边的方块是交换的:

$$\begin{array}{ccccc} X \otimes Y & \xrightarrow{\theta_X \otimes \theta_Y} & X \otimes Y & \xrightarrow{u_X \otimes u_Y} & X^{**} \otimes Y^{**} \\ & \searrow \theta_{X \otimes Y} & \downarrow c_{Y,X} c_{X,Y} & & \downarrow \gamma_{X,Y} \\ & & X \otimes Y & \xrightarrow{u_{X \otimes Y}} & (X \otimes Y)^{**} \end{array}$$

因此 [命题1.9] 蕴含上图整体的交换性等价于左边三角形的交换性. 这说明(1.16)定义的 θ 是 twist 当且仅当 $\psi = u\theta$ 是 $\mathcal{C}$ 上的 pivotal 结构. 于是在辫张量范畴场景, 我们得到双射:

$$\{\mathcal{C} \text{ 上的 twist} \} \rightarrow \{\mathcal{C} \text{ 上的 pivotal 结构} \}, \theta \mapsto u\theta, \quad (1.18)$$

其中 $u : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow (-)^{**}$ 是 Drinfeld 自然同构. 回忆 ribbon 结构需要 twist 进一步与左对偶相容. 特别地, ribbon 张量范畴上都有典范 pivotal 结构 (ribbon 结构和 Drinfeld 自然同构的合成).

现在设 (H, R) 是拟三角 Hopf 代数. 则有辫幺半范畴 $(H\text{-Mod}, \bar{c})$. 于是可直接计算对任何左 H -模 V, W , 同构 $\bar{c}_{W,V} \bar{c}_{V,W} : V \otimes W \rightarrow V \otimes W$ 来自 $\tau(R)R$ 的左乘变换. 假设 $(H\text{-Mod}, \bar{c})$ 上存在 ribbon 结构 θ . 那么 $\theta_H : H \rightarrow H$ 是左 H -模同态说明存在 $z \in H$ 使得 $\theta_H(h) = hz, \forall h \in H$. 对任何 H 中元素 g , 右乘变换 $r_g : H \rightarrow H$ 是左 H -模同态. 所以 θ 的自然性保证了 z 是 H 的中心元. 现在由 θ_H 是同构可知 $z \in H$ 是可逆中心元. 进而对任何左 H -模 X 以及 $x \in X$ 有 $\theta_X(x) = zx$. 下面我们说明 $v = z^{-1} \in H$ 满足:

$$\Delta(v) = (v \otimes v)(\tau(R)R)^{-1}, \quad (1.19)$$

$$v = S(v). \quad (1.20)$$

因为 $\theta_{H^*} = \theta_H^*$, 所以对任何 $h \in H$ 和 $f \in H^*$ 有 $f(vh) = f(S(v)h)$. 这蕴含(1.20)成立. 根据(1.15), 有交换图:

$$\begin{array}{ccc} H \otimes H & \xrightarrow{\bar{c}_{H,H} \bar{c}_{H,H}} & H \otimes H \\ & \searrow \theta_{H \otimes H} & \downarrow \theta_H \otimes \theta_H \\ & & H \otimes H \end{array}$$

现在 $\theta_{H \otimes H}(1 \otimes 1) = \Delta(z)$ 与上图的交换性得到 $\Delta(z) = (z \otimes z)(\tau(R)R)$, 两边取逆得到(1.19).

Definition 1.12 (Ribbon Hopf 代数, [RT90, EGNO15]). 设 (H, R) 是拟三角 Hopf 代数. 如果 H 有可逆中心元 v 满足(1.19)和(1.20), 那么称 v 是 H 的 **ribbon 元**, 三元组 (H, R, v) 被称为 **ribbon Hopf 代数**.

Remark 1.13. 设 (H, R, v) 是 ribbon Hopf 代数. 我们说明 ribbon 元 v 满足 $\varepsilon(v) = 1$: 根据(1.5), 不难看到 $(\varepsilon \otimes \text{id})(\tau(R)R) = 1 \otimes 1$. 因此 $(\varepsilon \otimes \text{id})((\tau(R)R)^{-1}) = 1 \otimes 1$. 现在对(1.19)两边作用 $\varepsilon \otimes \text{id}$ 得到 $v = \varepsilon(v)v$. 结合 v 是中心可逆元得到 $\varepsilon(v) = 1$. 根据(1.18), ribbon Hopf 代数的有限维模范畴都有 pivotal 结构.

根据 [RT90, Theorem 3.4], 任何拟三角 Hopf 代数都是某个 ribbon Hopf 代数的 Hopf 子代数.

Proposition 1.14 ([EGNO15]). 设 (H, R) 是拟三角 Hopf 代数, $(H\text{-Mod}, \bar{c})$ 是相应的幺半范畴. 那么 $\{(H, R)\text{中 ribbon 元}\} \rightarrow \{(H\text{-Mod}, \bar{c})\text{上 ribbon 结构}\}, v \mapsto \theta_v$, 其中 θ_v 在每个左 H -模 X 上的作用是 $(\theta_v)_X(x) = v^{-1}x, \forall x \in X$, 定义了双射. 所以 (H, R) 上的 ribbon 结构与 $(H\text{-Mod}, \bar{c})$ 上的 ribbon 结构一一对应.

Proof. 根据前面的讨论, 我们只需要验证每个 ribbon 元 $v \in H$ 定义的自然同构 θ_v 是 $(H\text{-Mod}, \bar{c})$ 上的 ribbon 结构. 由(1.20)可知 $(\theta_v)_{X^*} = (\theta_v)_X^*$ 对任何左 H -模成立. 而(1.19)保证了 θ_v 是 $(H\text{-Mod}, \bar{c})$ 上的 twist. $\square$

从 [命题1.14] 不难看到有限维拟三角 Hopf 代数 H 的有限维模范畴上的 ribbon 结构对应于 H 的 ribbon 元. 易见三角 Hopf 代数上都有平凡的 ribbon 结构:

Example 1.15 ([EGNO15]). 设 (H, R) 是三角 Hopf 代数. 则 $\tau(R)R = 1 \otimes 1$ 且 $v = 1$ 是 ribbon 元.

在 [注记1.7] 中我们指出 Lusztig 小量子群 $u_\epsilon(\mathfrak{g})$ 是拟三角的 (这里本原单位根 ϵ 是奇数阶的且带有一些限制), 我们再指出拟三角 Hopf 代数 $u_\epsilon(\mathfrak{g})$ 有 ribbon 结构 [M98, LO17]. 有限维 Hopf 代数的 Drinfeld double 作为拟三角 Hopf 代数未必有 ribbon 结构, 关于 Drinfeld double 有 ribbon 元的充要条件见 [KR93].

Remark 1.16. 固定代数闭域 $\mathbb{k}$. 设 $(\mathcal{C}, c)$ 是 $\mathbb{k}$ 上的辫张量范畴, 设 $\bar{\mathcal{C}}$ 是它的镜像范畴 (带有辫结构 $\bar{c}$, 即对任何 $\mathcal{C}$ 中对象 X, Y 有 $\bar{c}_{X,Y} = c_{Y,X}^{-1}$), 并记 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$ 的左 Drinfeld 中心. 那么我们有典范的正合函子 $F_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{C}), V \mapsto (V, c_{V,-})$ 以及 $F_2 : \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{C}), W \mapsto (W, \bar{c}_{W,-} = c_{-,W}^{-1})$, 这 (根据 Deligne 张量积的泛性质) 诱导右正合函子 $G : \mathcal{C} \boxtimes \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{C})$, 也见 [Shi19, §3.2]. 可以证明 G 是辫张量函子, [EGNO15, Proposition 8.6.1]. 如果 G 是等价函子, 则称辫张量范畴 $\mathcal{C}$ 是 **factorizable**. 张量范畴的 Drinfeld 中心都是 factorizable, 见 [EGNO15, Proposition 8.6.3]. 有限辫张量范畴如果是 factorizable, 则是 unimodular, [EGNO15, Proposition 8.10.10]. 有限维拟三角 Hopf 代数 (H, R) 被称为 **factorizable**, 如果 $(H\text{-mod}, \bar{c})$ 是 factorizable. 根据 [Shi19, Theorem 1.1], 代数闭域上的有限辫张量范畴 $\mathcal{C}$ 在 Kerler-Lyubashenko [KL01] 意义下非退化当且仅当 $\mathcal{C}$ 是 factorizable. 所以 Kerler-Lyubashenko [KL01] 意义下的 modular 张量范畴可等价地定义为 ribbon factorizable 有限辫张量范畴. 半单/非半单模范畴与拓扑量子场论的构造密切相关 [RT90, Tur94, KL01]. 有限维拟三角 Hopf 代数的 factorizable 性质也有如下等价刻画: 设 (H, R) 是有限维拟三角 Hopf 代数, 则 $(H\text{-mod}, \bar{c})$ 是 factorizable 当且仅当 Drinfeld-Reshetikhin 映射 [Dri89, Res89] $\Phi_R : H^* \rightarrow H, f \mapsto (f \otimes \text{id})(\tau(R)R)$ 是双射.

参考文献

[Dri89] V. G. Drinfel'd. Almost cocommutative Hopf algebras. *Algebra i Analiz*, 1(2):30–46, 1989.

- [EGNO15] Pavel Etingof, Shlomo Gelaki, Dmitri Nikshych, and Victor Ostrik. *Tensor categories*, volume 205 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [Gel99] Shlomo Gelaki. Some properties and examples of triangular pointed Hopf algebras. *Math. Res. Lett.*, 6(5-6):563–572, 1999.
- [Hal21] Sebastian Halbig. Generalized Taft algebras and pairs in involution. *Comm. Algebra*, 49(12):5181–5195, 2021.
- [HS20] István Heckenberger and Hans-Jürgen Schneider. *Hopf algebras and root systems*, volume 247 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, [2020] ©2020.
- [KL01] Thomas Kerler and Volodymyr V. Lyubashenko. *Non-semisimple topological quantum field theories for 3-manifolds with corners*, volume 1765 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [KR93] Louis H. Kauffman and David E. Radford. A necessary and sufficient condition for a finite-dimensional Drinfel’d double to be a ribbon Hopf algebra. *J. Algebra*, 159(1):98–114, 1993.
- [LO17] Simon Lentner and Tobias Ohrmann. Factorizable R -matrices for small quantum groups. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 13:Paper No. 076, 25, 2017.
- [M98] Eric Müller. Some topics on Frobenius-Lusztig kernels. I, II. *J. Algebra*, 206(2):624–658, 659–681, 1998.
- [Mon93] Susan Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings*, volume 82 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.
- [Res89] N. Yu. Reshetikhin. Quasitriangular Hopf algebras and invariants of links. *Algebra i Analiz*, 1(2):169–188, 1989.
- [RT90] N. Yu. Reshetikhin and V. G. Turaev. Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups. *Comm. Math. Phys.*, 127(1):1–26, 1990.
- [Shi19] Kenichi Shimizu. Non-degeneracy conditions for braided finite tensor categories. *Adv. Math.*, 355:106778, 36, 2019.
- [Tur94] V. G. Turaev. *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, volume 18 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.