


Poisson 理想论初步

戚天成 

复旦大学 数学科学学院

2024 年 3 月 17 日

这份笔记用于记录 Poisson 代数的 Poisson 理想的概念与基本性质, 主要参考了 [Goo06] 和 [LWW21].

1 基本概念与性质

Poisson 结构是 Hamilton 经典力学中自然产生的结构, 任何辛流形的辛结构可通过 Hamilton 向量场诱导光滑函数环上的 Poisson 结构. 含么交换环 K 上的交换代数 R 上如果有 K -双线性映射 $\{-, -\} : R \times R \rightarrow R$ 使得 $(R, \{-, -\})$ 是 K -Lie 代数且在每个分量上有导子性质, 则称 $(R, \{-, -\})$ 是 **Poisson 代数**, 这里的 K -双线性映射 $\{-, -\} : R \times R \rightarrow R$ 通常被称为 **Poisson 括号**. 如果 R 是光滑流形 \mathcal{M} 的光滑函数环 $C^\infty(\mathcal{M})$ 或仿射簇 X , 那么称 R 上 Poisson 括号为 \mathcal{M} 或 X 上的 **Poisson 结构**, 此时称 $(\mathcal{M}, \{-, -\})$ 是 **Poisson 流形**, 称仿射簇 X 是 **Poisson 簇**. 下面是关于 Poisson 代数的一些基本概念.

Definition 1.1. 设 $(R, \{-, -\})$ 是含么交换环 K 上 Poisson 代数, I 是 R 的理想.

- (1) 称 I 是 **Poisson 理想**, 如果 $\{I, R\} \subseteq I$.
- (2) 称 $\{a \in R \mid \{a, R\} = 0\}$ 为 R 的 **Poisson 中心**, 记作 $Z_P(R)$, 其中元素称为 **Casimir 元**.
- (3) 对每个 $a \in R$, 称 K -导子 $\{a, -\} : R \rightarrow R$ 是 a 决定的 **Hamilton 导子**.
- (4) 称 Poisson 真理想 I 是 **Poisson 素理想**, 如果对任何 Poisson 理想 A, B , $AB \subseteq I$ 蕴含 $A \subseteq I$ 或 $B \subseteq I$.

Remark 1.2. 任意一族 Poisson 理想的交或和仍为 Poisson 理想. 如果 Poisson 代数没有非平凡的 Poisson 理想, 称该 Poisson 代数是 **单 Poisson 代数**.

不难看出 Poisson 代数的 Poisson 中心既是子环也是 Poisson 理想. 特征零的域上的 Poisson 整区的 Poisson 中心会有整闭特性, 即 $Z_P(R) \subseteq R$ 是整闭扩张. 任取 $z \in Z_P(R)$, 设 z 在 \mathbb{k} 上满足的最小多项式为 $x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1x + \alpha_0$, 那么对任给 $b \in R$, 通过

$$\{b, \sum_{i=0}^n \alpha_i z^i\} = \sum_{i=0}^n \alpha_i (i-1) z^{i-1} \{b, z\} = 0,$$

其中 $\alpha_n = 1$, 由上述多项式的最小性可知 $\{b, z\} = 0$, 因此 $z \in Z_P(R)$. 我们把刚刚的讨论总结为

Proposition 1.3. 设 $(R, \{-, -\})$ 是特征零的域 \mathbb{k} 上的 Poisson 整区, 则 $Z_P(R) \subseteq R$ 是整闭扩张.

记含么交换环 K 上 Poisson 代数 $(R, \{-, -\})$ 所有 Hamilton 导子构成的集合是 Δ , 那么对 R 的任何理想 I , 考虑 $\mathcal{P}(I) = \{a \in I \mid \text{对任给 } \delta_1, \dots, \delta_n \in \Delta \text{ 有 } \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n(a) \in I\}$, 易见 $\mathcal{P}(I)$ 是 I 所包含的 Poisson 理想且是 I 所包含的最大 Poisson 理想. 称 $\mathcal{P}(I)$ 是 R 的 **Poisson 核**. 称极大理想的 Poisson 核为 **Poisson 本原理想**. 事实上特征零的域上 Poisson 代数的任何素理想的 Poisson 核总是素理想.

Theorem 1.4. 设 $(R, \{-, -\})$ 是特征为零的域 \mathbb{k} 上的 Poisson 代数, 那么:

- (1) 对任何素理想 P , $\mathcal{P}(P)$ 是 R 的素理想.
- (2) 任何 Poisson 本原理想是素理想.
- (3) 如果 P 是 Poisson 理想 I 上的极小素理想, 那么 P 是 Poisson 理想.
- (4) 如果 R 是 Noether 的, 那么任何 Poisson 素理想是素理想.
- (5) 如果 R 是交换仿射代数, 则任何 Poisson 素理想是一些 Poisson 本原理想之交.

Proof. 为叙述方便, 仍记 R 上 Hamilton 导子全体为 Δ .

(1) 为简化记号, 记 $\mathcal{P}(P)$ 为 Q . 设 $a, b \in R$ 满足 $ab \in Q$, 下证 a 与 b 中至少有一个在 Q 内.

Claim. 若 $\delta_1, \dots, \delta_p \in \Delta, m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}$ 使 $\delta_1^{m_1} \cdots \delta_p^{m_p} b \notin P$, 则 $\delta_1^{n_1} \cdots \delta_p^{n_p} a \in P, \forall n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}$.

如下赋予 \mathbb{N}^p 一偏序 \leq : 对 $(i_1, \dots, i_p), (j_1, \dots, j_p) \in \mathbb{N}^p$, 如果 $i_1 + \cdots + i_p < j_1 + \cdots + j_p$, 那么 $(i_1, \dots, i_p) < (j_1, \dots, j_p)$; 如果 $i_1 + \cdots + i_p = j_1 + \cdots + j_p$, 通过字典序来定义 $(i_1, \dots, i_p) \leq (j_1, \dots, j_p)$. 则 (\mathbb{N}^p, \leq) 良序. 下面通过对 (\mathbb{N}^p, \leq) 作超限归纳证明断言. 先取在 \mathbb{N}^p 中满足 $\delta_1^{s_1} \cdots \delta_p^{s_p} b \notin P$ 的最小元 (s_1, \dots, s_p) . 对任给 $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}$, 有

$$\delta_1^{n_1+s_1} \cdots \delta_p^{n_p+s_p}(ab) = \sum_{\substack{i_k+l_k=n_k+s_k \\ 1 \leq k \leq p}} \alpha(i_1, l_1, \dots, i_p, l_p) \delta_1^{i_1} \delta_2^{i_2} \cdots \delta_p^{i_p}(a) \delta_1^{l_1} \delta_2^{l_2} \cdots \delta_p^{l_p}(b),$$

其中 $\alpha(i_1, l_1, \dots, i_p, l_p) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 那么上式可整理为

$$\delta_1^{n_1+s_1} \cdots \delta_p^{n_p+s_p}(ab) = \alpha(n_1, s_1, \dots, n_p, s_p) \delta_1^{n_1} \cdots \delta_p^{n_p}(a) \delta_1^{s_1} \cdots \delta_p^{s_p}(b) + r,$$

这里 r 是一些形如 $\alpha(i_1, l_1, \dots, i_p, l_p) \delta_1^{i_1} \delta_2^{i_2} \cdots \delta_p^{i_p}(a) \delta_1^{l_1} \delta_2^{l_2} \cdots \delta_p^{l_p}(b)$ 的项的有限和, 其中 $(i_1, \dots, i_p) < (n_1, \dots, n_p)$ 或 $(l_1, \dots, l_p) < (s_1, \dots, s_p)$. 当 $(n_1, \dots, n_p) = (0, 0, \dots, 0)$ 时, 易见 $r \in P$, 故由 $ab \in Q$ 得 $a \delta_1^{s_1} \cdots \delta_p^{s_p}(b) \in P$. 故由 P 是素理想, $\text{char} \mathbb{k} = 0$ 且 $\delta_1^{s_1} \cdots \delta_p^{s_p} b \notin P$ 得到 $a \in P$ (至此, 结论对 (\mathbb{N}^p, \leq) 的最小元成立). 由归纳假设,

$$\delta_1^{i_1} \delta_2^{i_2} \cdots \delta_p^{i_p}(a) \in P, \forall (i_1, \dots, i_p) < (n_1, \dots, n_p).$$

从而利用 $ab \in Q$ 便知 $\alpha(n_1, s_1, \dots) \delta_1^{n_1} \cdots \delta_p^{n_p}(a) \delta_1^{s_1} \cdots \delta_p^{s_p}(b) \in P$. 由 $\text{char} \mathbb{k} = 0$ 知 $\delta_1^{n_1} \cdots \delta_p^{n_p}(a) \delta_1^{s_1} \cdots \delta_p^{s_p}(b)$ 也在 P 中. 再结合 $\delta_1^{s_1} \cdots \delta_p^{s_p} b \notin P$ 得到 $\delta_1^{n_1} \cdots \delta_p^{n_p}(a) \in P$. 断言得证.

下面通过说明 $b \notin Q$ 蕴含 $a \in Q$ 来完成证明. 对 $\delta_1, \dots, \delta_p \in \Delta$, 要证 $\delta_1 \cdots \delta_p(a) \in P$. 因为 $b \notin Q$, 故存在 $\delta_{p+1}, \dots, \delta_t \in \Delta$ 使得 $\delta_1^0 \cdots \delta_p^0 \delta_{p+1}^1 \cdots \delta_t^1(b) \notin P$. 应用断言知 $\delta_1^1 \cdots \delta_p^1(a) = \delta_1^1 \cdots \delta_p^1 \delta_{p+1}^0 \cdots \delta_t^0(a) \in P$.

(2) 和 (3) 由 (1) 立即得到. 下证 (4). 设 R 是 Noether 环且 P 是 Poisson 素理想, 那么存在 P 上极小素理想 Q_1, \dots, Q_m 使得 $P \supseteq Q_1 \cdots Q_m$. 由 (3) 知每个 Q_i 都是 Poisson 理想, 所以 P 就是某个 Q_i .

(5) 在 (4) 中已经说明 Noether 的 Poisson 代数每 Poisson 素理想是素理想. 因为域上交换仿射代数是 Jacobson 环, 所以任何素理想是一些极大理想的交, 设 Poisson 素理想 $P = \bigcap_{i \in I} Q_i$, 其中 Q_i 是极大理想. 那么

$$P = \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}(Q_i).$$

□

Remark 1.5. 如果 $(R, \{-, -\})$ 是特征为零的域 \mathbb{k} 上 Noether 的 Poisson 代数, 那么上述定理表明所有的 Poisson 素理想构成的集合是 $\text{Spec}R$, 赋之以子空间拓扑得到的拓扑空间被称为 **Poisson 素谱**, 记作 $\text{P.Spec}R$. 如果 $(R, \{-, -\})$ 是特征为零的域 \mathbb{k} 上的 Poisson 代数, 那么所有 Poisson 本原理想构成的 $\text{Spec}R$ 的子集赋予素谱的子空间拓扑得到的拓扑空间被称为 R 的 **Poisson 本原素谱**, 记作 $\text{P.Prim}R$.

Corollary 1.6. 设 $(R, \{-, -\})$ 是特征零的域 \mathbb{k} 上 Poisson 代数, 那么 R 的任何极小素理想都是 Poisson 理想. 特别地, 如果 R 进一步是 Noether 环, 那么 $\text{Spec}R$ 作为 Noether 空间的不可约分支分解 $V(P_1) \cup V(P_2) \cup \dots \cup V(P_r)$, 每个分支对应的商环 R/P_i 均为 Poisson 代数.

Corollary 1.7. 设 $(R, \{-, -\})$ 是特征零的域 \mathbb{k} 上 Poisson 代数, 那么任何 Poisson 理想的根理想仍 Poisson.

Proof. 设 I 是 R 的 Poisson 理想, 那么 I 上极小素理想均为 Poisson 理想. □

Remark 1.8. 特别地, 特征为零的域上的 Poisson 代数的素根总是 Poisson 理想 (素根在所有 Hamilton 导子作用下封闭). 所以特征零的域上的 Poisson 代数总是约化 (或者说半素) 代数.

设 $(R, \{-, -\})$ 是 Poisson 代数, 对 $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \max\text{Spec}R$, 定义 $\mathfrak{m} \sim \mathfrak{n}$ 当且仅当 $\mathcal{P}(\mathfrak{m}) = \mathcal{P}(\mathfrak{n})$, 即这两个极大理想具有相同的 Poisson 核. 称 $\mathfrak{m} \in \max\text{Spec}R$ 在上述等价关系下所在的等价类 $\mathcal{C}(\mathfrak{m})$ 为 \mathfrak{m} 的**辛核**. 如果这时基域 \mathbb{k} 的特征是零, 那么可以将极大谱 $\max\text{Spec}R$ 关于辛核的分解视作 $\max\text{Spec}R$ 关于

$$\pi_m : \max\text{Spec}R \rightarrow \text{P.Prim}R, \mathfrak{m} \mapsto \mathcal{P}(\mathfrak{m})$$

的非空纤维的分解. 根据 Poisson 本原素谱的定义, 易见 π_m 是满射. 下面说明 π_m 是连续映射. 任取 $\text{P.Prim}R$ 的非空闭子集 $W = V(I) \cap \text{P.Prim}R$, 其中 I 是 R 的理想, 我们总可不妨设 I 是 R 的 Poisson 理想 (否则用 $V(I) \cap \text{P.Prim}R$ 中所有 Poisson 本原理想之交替换 I), 那么由下式得到 π_m 是连续满射:

$$\pi_m^{-1}(W) = \{\mathfrak{m} \in \max\text{Spec}R \mid \mathcal{P}(\mathfrak{m}) \supseteq I\} = \{\mathfrak{m} \in \max\text{Spec}R \mid \mathfrak{m} \supseteq I\} = V(I) \cap \max\text{Spec}R.$$

Proposition 1.9. 设 $(R, \{-, -\})$ 是特征为零的域 \mathbb{k} 上的 Poisson 代数, 记 $a \in R$ 决定的 Hamilton 导子为 $\delta_a = \{a, -\}$. 如果 R 是约化的 (例如 R 是整区), 那么 $\delta_a = 0$ 当且仅当存在正整数 n 使得 $\delta_a^n = 0$.

Proof. 只需验证充分性. 如果 $n = 1$ 结论直接成立, 下设 $n \geq 1$. 我们证明 $\delta_a^n = 0$ 蕴含 $\delta_a^{n-1} = 0$ 来完成证明. 固定 $x \in R$, 命 $b = \delta_a^{n-2}(x)$, 那么

$$\delta_a^n(b^n) = n!(\delta_a(b))^n + \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_n = n \\ \text{存在某个 } i_k = 0}} \delta_a^{i_1}(b)\delta_a^{i_2}(b) \cdots \delta_a^{i_n}(b).$$

等号右边第二项和式中每个项都有一个因子可以表示为 $\delta^k(x) (k \geq n)$, 所以 $\delta_a^n(b^n) = n!(\delta_a(b))^n$. 现在利用 $\text{char}\mathbb{k} = 0$ 得到 $\delta_a(b) \in N(R)$. 所以由 R 是约化代数知 $\delta_a(b) = \delta_a^{n-1}(x) = 0$. 断言得证. □

Remark 1.10. Hamilton 导子 $\delta_a = 0$ 等价于说 $a \in Z_P(R)$.

参考文献

- [BLSM17] Jason Bell, Stéphane Launois, Omar León Sánchez, and Rahim Moosa. Poisson algebras via model theory and differential-algebraic geometry. *Journal of the European Mathematical Society*, 19(7):2019–2049, 2017.
- [BWY19] Jason P Bell, Xingting Wang, and Daniel Yee. The dixmier-moeglin equivalence, morita equivalence, and homeomorphism of spectra. *Journal of Algebra*, 534:228–244, 2019.
- [GL11] Kenneth Ralph Goodearl and Stéphane Launois. The dixmier-moeglin equivalence and a gel'fand-kirillov problem for poisson polynomial algebras. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 139(1):1–39, 2011.
- [Goo06] Kenneth R Goodearl. A dixmier-moeglin equivalence for poisson algebras with torus actions. *Contemporary Mathematics*, 419:131, 2006.
- [LWW21] Juan Luo, Xingting Wang, and Quanshui Wu. Poisson dixmier-moeglin equivalence from a topological point of view. *Israel Journal of Mathematics*, 243:103–139, 2021.