# Lusztig 小量子群

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2026 年 2 月 28 日

这份笔记记录 Lusztig 小量子群的相关基本事实与术语, 主要参考文献是 [CP95, DCK90, DCKP92, Jan96, Lus90a, Lus90b, GK93, Len16].

## 1 记号固定

这份笔记固定秩为 $n$ 的有限维复单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 及其关于某个 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 产生的实内积空间 $(E,(-,-))$ 中的根系 $\Phi$, 该根系的 Weyl 群是 $W$. 设 $\Delta = \{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ 是 $\Phi$ 的一个单根集, 相应的 Cartan 矩阵记作 $(a_{ij})_{n\times n}$. 我们正规化根系: 要求短根 $\alpha$ 满足 $(\alpha,\alpha)=2$. 那么命 $d_i=(\alpha_i,\alpha_i)/2\in\{1,2,3\}$ 可得 $(d_ia_{ij})_{n\times n}$ 是对称矩阵. 任取 $w\in W$ 的 reduced 表示 $w=s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_t}$, 我们得到正根序列

$$\beta_1=\alpha_{i_1},\beta_2=s_{i_1}(\alpha_{i_2}),...,s_{i_t}=s_{i_1}\cdots s_{i_{t-1}}(\alpha_{i_t}). \tag{1.1}$$

如果 $w$ 是 $W$ 中最长元, 即 $t=N:=|\Phi^+|$, 则 $\{\beta_1,...,\beta_N\}=\Phi^+$. 对 $1\le i\ne j\le n$, 当 $a_{ij}a_{ji}=0,1,2,3$ 时 (这是复半单 Lie 代数场景所有可能的取值, 因为连通 Dynkin 图有边相连的顶点最多 3 重边), 分别定义 $m_{ij}=2,3,4,6$. 那么 Weyl 群有生成元生成关系 [Hum90, Theorem 1.9]

$$W=<s_1,...,s_n\mid s_i^2=(s_is_j)^{m_{ij}}=1,1\le i\ne j\le n>. \tag{1.2}$$

关于 Weyl 群 $W$ 我们有**辫群**

$$\mathscr{B}_W:=<T_1,T_2,...,T_n\mid \overbrace{T_iT_jT_i\cdots}^{m_{ij}\text{项}}=\overbrace{T_jT_iT_j\cdots}^{m_{ij}\text{项}},1\le i\ne j\le n>. \tag{1.3}$$

于是我们有满群同态 $\mathscr{B}_W\to W,T_i\mapsto s_i$.

因为 $\mathfrak{h}^*$ 上的对称双线性型 $(-,-):\mathfrak{h}^*\times\mathfrak{h}^*\to\Bbbk,(\gamma,\delta)\mapsto\kappa(t_\gamma,t_\delta)$ 是非退化的, 所以有 $\varpi_1,...,\varpi_n\in\mathfrak{h}^*$(即基本权) 使得

$$(\varpi_i,\alpha_j)=(\alpha_j,\alpha_j)\delta_{ij}/2=\delta_{ij}d_j,\ \forall 1\le i,j\le n. \tag{1.4}$$

对根系 $\Phi$ 的根格 $Q=\mathbb{Z}\Phi=\oplus_{i=1}^n\mathbb{Z}\alpha_i$ 和权格 $P=\oplus_{i=1}^n\mathbb{Z}\varpi_i$, 设 $\alpha_j=\sum_{i=1}^n t_{ij}\varpi_i,t_{ij}\in\Bbbk$, 利用(1.4)可得

$$\alpha_j=\sum_{i=1}^n a_{ij}\varpi_i\in P. \tag{1.5}$$

所以 $Q\subseteq P$. 此外, 可直接验证 $[P:Q]$ 就是 Cartan 矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式.

## 2 量子二项式系数

下面简要介绍量子二项式系数的记号并记录些恒等式. 设 $\Bbbk$ 是域且 $t$ 是未定元, 记 $\Bbbk(t)$ 是以 $t$ 为变量的有理函数域. 那么对自然数 $n \geq i$, 可定义有理函数

$$\binom{n}{i}_t = \frac{(t^n-1)(t^{n-1}-1)\cdots(t-1)}{(t^i-1)(t^{i-1}-1)\cdots(t-1)(t^{n-i}-1)(t^{n-i-1}-1)\cdots(t-1)}. \tag{2.1}$$

当 $i=0$ 时, 约定 $\binom{n}{0}_t = 1$, 易见也有 $\binom{n}{n}_t = 1$ (所以当 $n=0$ 时自动有 $\binom{0}{0}_t = 1$). 之后我们会看到有理函数 (2.1) 总是多项式, 见 [命题2.2]. 因此我们总能够定义 (2.1) 中的变量 $t$ 关于 $q \in \Bbbk$ 的赋值, 相应的 $\Bbbk$ 中元素记作 $\binom{n}{i}_q$, 称为 **Gauss $q$-二项式系数**. 但如果要 $\binom{n}{i}_q$ 能够表达为 (2.1) 中形式, 自然需要 $q \in \Bbbk$ 代入 (2.1) 分母中任何项都非零. 如果 $q$ 不是单位根, 那么总有 $\binom{n}{i}_q \neq 0$. 记 $(n)_t = (t^n-1)/(t-1)$. 类似于组合数 (经典二项式系数) 场景的 Pascal 恒等式, 我们也有 $q$-二项式系数 (量子二项式系数) 的 $q$-Pascal 恒等式:

**Lemma 2.1** ($q$-Pascal 恒等式, [BG02])**.** 设 $t$ 是域 $\Bbbk$ 上未定元, 那么对任何正整数 $n > i \geq 1$ 有

$$\binom{n}{i}_t = \binom{n-1}{i}_t + t^{n-i}\binom{n-1}{i-1}_t = t^i\binom{n-1}{i}_t + \binom{n-1}{i-1}_t. \tag{2.2}$$

*Proof.* 对 (2.1), 我们计算

$$\begin{aligned}
\binom{n}{i}_t =& \frac{(t^n-1)(t^{n-1}-1)\cdots(t-1)}{(t^i-1)(t^{i-1}-1)\cdots(t-1)(t^{n-i}-1)(t^{n-i-1}-1)\cdots(t-1)} \\
=& \frac{(t^n-t^{n-i}+t^{n-i}-1)(t^{n-1}-1)\cdots(t-1)}{(t^i-1)(t^{i-1}-1)\cdots(t-1)(t^{n-i}-1)(t^{n-i-1}-1)\cdots(t-1)} \\
=& t^{n-i}\binom{n-1}{i-1}_t + \binom{n-1}{i}_t.
\end{aligned}$$

这证明了 $q$-Pascal 恒等式 (2.2) 的第一个等号, 继续计算

$$\begin{aligned}
\binom{n}{i}_t =& \frac{(t^n-1)(t^{n-1}-1)\cdots(t-1)}{(t^i-1)(t^{i-1}-1)\cdots(t-1)(t^{n-i}-1)(t^{n-i-1}-1)\cdots(t-1)} \\
=& \frac{(t^n-t^i+t^i-1)(t^{n-1}-1)\cdots(t-1)}{(t^i-1)(t^{i-1}-1)\cdots(t-1)(t^{n-i}-1)(t^{n-i-1}-1)\cdots(t-1)} \\
=& t^i\binom{n-1}{i}_t + \binom{n-1}{i-1}_t.
\end{aligned}$$

□

当 $n=1$ 时, 明显有 $\binom{n}{i}_t \in \Bbbk[t], \forall 0 \leq i \leq n$. 所以, 利用 $q$-Pascal 恒等式对正整数 $n$ 作归纳可知

**Proposition 2.2** ([BG02])**.** 设 $n, i$ 是自然数, $n \geq i$ 且 $t$ 为域 $\Bbbk$ 上未定元. 总有 $\binom{n}{i}_t \in \mathbb{Z}[t]$.

**Remark 2.3.** 因此, $q$-Pascal 恒等式 (2.2) 事实上为 $\Bbbk[t]$ 中恒等式. 因此对任何 $q \in \Bbbk$, 对 (2.2) 关于 $t=q$ 作赋值可得相应的 $\Bbbk$ 中 $q$-Pascal 恒等式.

下面我们介绍对 $q$-二项式系数相应的"$q$-二项式定理". 考虑未定元 $t$ 处的量子平面 $\mathcal{O}_t(\Bbbk^2)=\Bbbk[t]\langle x,y\rangle/(xy-tyx)$, 这是 $\Bbbk$-代数且对任何 $q\in\Bbbk^\times$ 有自然的代数同构 $\mathcal{O}_t(\Bbbk^2)/(t-q)\cong\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$. 我们证明

**Proposition 2.4** ($q$-二项式定理, [BG02]). 设 $t$ 是域 $\Bbbk$ 上未定元, $n$ 是正整数. 那么在 $\mathcal{O}_t(\Bbbk^2)$ 中有

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}_t y^i x^{n-i}.$$

特别地, 对任何 $q\in\Bbbk^\times$, 在 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 中有

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}_q y^i x^{n-i}. \tag{2.3}$$

*Proof.* 对正整数 $n$ 作归纳. 当 $n=1$ 时, 我们有 $\binom{1}{0}_t=\binom{1}{1}_t=1$, 因此结论成立. 假设结论对 $n-1(n\geq 2)$ 情形成立, 我们计算

$$\begin{aligned}(x+y)^n=&(x+y)(x+y)^{n-1}\\ =&(x+y)(\sum_{i=0}^{n-1}\tbinom{n-1}{i}_t y^i x^{n-i-1})\\ =&\sum_{i=0}^{n-1}\tbinom{n-1}{i}_t xy^i x^{n-i-1}+\sum_{i=0}^{n-1}\tbinom{n-1}{i}_t y^{i+1}x^{n-i-1}\\ =&\sum_{i=0}^{n-1}\tbinom{n-1}{i}_t t^i y^i x^{n-i}+\sum_{i=0}^{n-1}\tbinom{n-1}{i}_t y^{i+1}x^{n-i-1}\\ =&x^n+\sum_{i=1}^{n-1}\tbinom{n-1}{i}_t t^i y^i x^{n-i}+\sum_{i=0}^{n-2}\tbinom{n-1}{i}_t y^{i+1}x^{n-i-1}+y^n\\ =&x^n+\sum_{i=1}^{n-1}(t^i\tbinom{n-1}{i}_t+\tbinom{n-1}{i-1}_t y^i x^{n-i})+y^n\\ =&\sum_{i=0}^{n}\tbinom{n}{i}_t y^i x^{n-i}.\end{aligned}$$

最后一个等号来自 $q$-Pascal 恒等式 (2.2). □

**Remark 2.5.** 通过 (2.3), 立即得到对任何域 $\Bbbk$ 上代数 $A$, 只要元素 $a,b\in A$ 满足 $ab=qba$, 其中 $q\in\Bbbk^\times$, 那么对任何正整数 $n$ 有 $(a+b)^n=\sum_{i=0}^n\binom{n}{i}_q b^i a^{n-i}$. 条件 $q\in\Bbbk^\times$ 不是必要的: 如果 $q=0$, 即 $ab=0$, 当然有

$$(a+b)^n=b^n+b^{n-1}a+\cdots+ba^{n-1}+a^n,$$

并且这时 $\binom{n}{i}_0=1,\forall 0\leq i\leq n$. 我们依然有相应的 $q$-二项式定理成立. 所以对域 $\Bbbk$ 上代数 $A$ 和 $q\in\Bbbk$, 如果元素 $a,b\in A$ 满足 $ab=qba$, 那么有 $(a+b)^n=\sum_{i=0}^n\binom{n}{i}_q b^i a^{n-i}$.

前面我们对自然数 $n\geq i$ 以及未定元 $t$ 定义了多项式(2.1). 之后讨论量子包络代数时使用另一种 $q$-二项式系数 $\left[{n \atop i}\right]_t$ 更为便捷. 以下保持 $n\geq i$ 是自然数, 定义 $\Bbbk(t)$ 中有理函数

$$\begin{bmatrix}n\\ i\end{bmatrix}_t=\frac{(t^n-t^{-n})(t^{n-1}-t^{1-n})\cdots(t-t^{-1})}{(t^i-t^{-i})(t^{i-1}-t^{1-i})\cdots(t-t^{-1})(t^{n-i}-t^{i-n})(t^{n-i-1}-t^{1+i-n})\cdots(t-t^{-1})}. \tag{2.4}$$

约定 $\left[{n \atop n}\right]_t = \left[{n \atop 0}\right]_t = 1$. 对任何整数 $n \in \mathbb{Z}$, 引入记号

$$[n]_t \coloneqq \frac{t^n - t^{-n}}{t - t^{-1}} \in \mathbb{Q}(t).$$

利用因式分解可知 $[n]_t \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. 因此对 $q \in \Bbbk^\times$, 可考虑 $[n]_t$ 关于 $t = q$ 的赋值. 式(2.4)也可改写为

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_t = \frac{[n]_t[n-1]_t \cdots [1]_t}{[i]_t[i-1]_t \cdots [1]_t[n-i]_t \cdots [1]_t}. \tag{2.5}$$

当 $n$ 和 $q \in \Bbbk^\times$ 满足 $q^2, ..., q^{2(n-1)} \neq 1$ 时, 对任何 $0 \leq i \leq n$ 可定义 $\left[{n \atop i}\right]_q \in \Bbbk$, 这时可直接验证

$$q^{i(n-i)} \left[{n \atop i}\right]_q = \left({n \atop i}\right)_{q^2}. \tag{2.6}$$

**Remark 2.6.** 如果 $q$ 是 $\Bbbk$ 上的未定元, 那么(2.6)和 [命题2.2] 说明 $\left[{n \atop i}\right]_q \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$.

如果对正整数 $m$ 和满足 $q^2 \neq 1$ 的 $q \in \Bbbk^\times$, 我们引入记号

$$[n]_q! \coloneqq [n]_q[n-1]_q \cdots [1]_q \text{ 以及 } (n)_q! \coloneqq (n)_q(n-1)_q \cdots (1)_q, \tag{2.7}$$

那么可直接计算验证有 $q$-正整数的阶乘恒等式

$$[n]_q! = q^{-n(n-1)/2}(n)_q!. \tag{2.8}$$

设含幺环 $R$ 上有环自同构 $\sigma : R \to R$, 并固定 $x \in R$. 那么可定义 $\sigma$-导子 $\mathrm{ad}_\sigma x : R \to R, xr - \sigma(r)x$. 当 $\sigma = \mathrm{id}$ 时, 这里定义的 $\sigma$-导子就是通常的伴随变换 $[x, -]$. 如果记 $\lambda_x : R \to R, a \mapsto xa$ 以及 $\rho_x : R \to R, a \mapsto ax$ 分别是 $x$ 决定的 $R$ 上左乘变换和右乘变换. 那么 $\mathrm{ad}_\sigma x = \lambda_x + (-\rho_x\sigma)$. 所以, 如果 $\sigma : R \to R$ 满足有 $q \in \Bbbk^\times$ 使得 $\sigma(x) = q^{-1}x$, 那么 $\lambda_x(-\rho_x\sigma) = q(-\rho_x\sigma)\lambda_x$ 所以可应用 [注记2.5] 得到对任何正整数 $m$ 和 $r \in R$ 有

$$(\mathrm{ad}_\sigma x)^m(r) = \sum_{k=0}^{m} \left({n \atop k}\right)_q (-1)^k(\rho_x\sigma)^k\lambda_x^{m-k}(r) = \sum_{k=0}^{m} \left({n \atop k}\right)_q (-1)^k(\rho_x\sigma)^k(x^{m-k}r). \tag{2.9}$$

结合 $\sigma(x) = q^{-1}x$ 的假设, 归纳地可得到

$$(\mathrm{ad}_\sigma x)^m(r) = \sum_{k=0}^{m} \left({n \atop k}\right)_q (-1)^k q^{-k(2m-k-1)/2} x^{m-k}\sigma^k(r)x^k. \tag{2.10}$$

**Proposition 2.7** ([BG02])**.** 设 $\ell$ 是奇数, $\epsilon \in \Bbbk^\times$ 是 $\ell$ 次本原单位根, $R$ 是 $\Bbbk$-代数, $x \in R$ 且 $R$ 上代数自同构 $\sigma$ 满足 $\sigma(x) = \epsilon^{-1}x$. 那么 $(\mathrm{ad}_\sigma x)^\ell(r) = x^\ell r - \sigma^\ell(r)x^\ell$.

*Proof.* 对 $1 \leq k \leq \ell - 1$ 有 $\left({n \atop k}\right)_\epsilon = 0$, 所以结论来自(2.10). □

# 3 量子包络代数及其整形式

下面介绍量子包络代数的概念 [BG02, Jan96]. 设 $q \in \Bbbk^\times$ 满足 $q$ 不是单位根或 $q$ 是 $\ell$ 次本原单位根, $\ell \geq 3$ 为奇数且当 $\mathfrak{g}$ 是 $G_2$ 型时要求 $n$ 与 3 互素. 回忆 $\{d_1, ..., d_n\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ 满足 $(d_i a_{ij})_{n\times n}$ 是对称矩阵. 对 $1 \leq i \leq n$, 记

$$q_i \coloneqq q^{d_i} \tag{3.1}$$

秩为 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 有限维复单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 在 $q\in\Bbbk^\times$ 处的 **(Drinfel'd-Jimbo 型) 量子包络代数**是由生成元

$$E_1,...,E_n,F_1,...,F_n,K_1^{\pm1},...,K_n^{\pm1}$$

和下述生成关系 (最后两行被称为**量子 Chevalley-Serre 关系**) 定义的 $\Bbbk$-代数:

$$K_iK_j=K_jK_i,\ E_iF_j-F_jE_i=\delta_{ij}\frac{K_i-K_i^{-1}}{q_i-q_i^{-1}},$$

$$K_iE_jK_i^{-1}=q_i^{a_{ij}}E_j,\ K_iF_jK_i^{-1}=q_i^{-a_{ij}}F_j,$$

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}}(-1)^k\left[\begin{smallmatrix}1-a_{ij}\\ k\end{smallmatrix}\right]_{q_i}E_i^{1-a_{ij}-k}E_jE_i^k=0,\ (i\neq j),$$

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}}(-1)^k\left[\begin{smallmatrix}1-a_{ij}\\ k\end{smallmatrix}\right]_{q_i}F_i^{1-a_{ij}-k}F_jF_i^k=0,\ (i\neq j).$$

有限维复单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 在 $q\in\Bbbk^\times$(当 $q$ 是单位根时满足前面的假设) 处的量子包络代数被记作 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$. 我们指出 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 上有唯一的 Hopf 代数结构满足

$$\Delta(E_i)=E_i\otimes 1+K_i\otimes E_i,\ \Delta(K_i)=K_i\otimes K_i,\ \Delta(F_i)=F_i\otimes K_i^{-1}+1\otimes F_i,$$

$$\varepsilon(E_i)=\varepsilon(F_i)=0,\ \varepsilon(K_i)=1.$$

保持前面对 $q\in\Bbbk^\times$ 的假设, 只要 $q_i$ 和自然数 $s$ 满足 $[s]_{q_i}!\neq 0$, 就能定义 $s$ 次 **divided powers** [Lus90b]

$$E_i^{(s)}:=\frac{E_i^s}{[s]_{q_i}!},\ F_i^{(s)}:=\frac{F_i^s}{[s]_{q_i}!}.\tag{3.2}$$

Lusztig 在 [Lus90b, Theorem 3.1] 中对每个正整数 $1\leq i\leq n$, 说明有量子包络代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 上唯一的代数自同构 $T_i:\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\to\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 满足

$$T_iE_i=-F_iK_i,\tag{3.3}$$

$$T_iF_i=-K_i^{-1}E_i,\tag{3.4}$$

$$T_iE_j=\sum_{s=0}^{-a_{ij}}(-1)^{s-a_{ij}}q_i^{-s}E_i^{(-a_{ij}-s)}E_jE_i^{(s)},\ (j\neq i),\tag{3.5}$$

$$T_iF_j=\sum_{s=0}^{-a_{ij}}(-1)^{s-a_{ij}}q_i^{s}F_i^{(s)}F_jF_i^{(-a_{ij}-s)},\ (j\neq i),\tag{3.6}$$

$$T_iK_j=T_iK_{\alpha_j}=K_{s_i(\alpha_j)}=K_jK_i^{-a_{ij}},\ (\alpha\in Q).\tag{3.7}$$

证明细节也参见 [Jan96, §8.14]. 注意到(3.5)与(3.6)中的 divided powers 都定义合理, 而(3.7)也说明 $T_iK_i=K_i^{-1}$. 这里指出 $T_i$ 仅是 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 作为代数的自同构, 而不是 Hopf 代数的自同构. Lusztig 利用(3.3)-(3.7)定义的代数自同构事实上是 $\mathscr{B}_W$ 到代数自同构群 $\mathrm{Aut}_{\Bbbk}\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 的群同态. 对 Weyl 群元素 $w$ 的 reduced 表示

$w = s_{i_1}\cdots s_{i_t}$, $T_w \coloneqq T_{i_1}\cdots T_{i_t}$ 只依赖于 $w$, 不依赖于 $w$ 的 reduced 表示的选取. 对 Weyl 群最长元由(1.1)给出的正根序列 $\beta_1,...,\beta_N$, 定义量子根向量

$$E_{\beta_j} \coloneqq T_{i_1}\cdots T_{i_{j-1}}(E_{i_j}),\ F_{\beta_j} \coloneqq T_{i_1}\cdots T_{i_{j-1}}(F_{i_j}). \tag{3.8}$$

那么有 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 的 PBW 基 [Lus90b]:

$$\{F_{\beta_N}^{n_N}\cdots F_{\beta_1}^{n_1}K_\lambda E_{\beta_1}^{m_1}\cdots E_{\beta_N}^{m_N} \mid n_1,...,n_N,m_1,...,m_N\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\lambda\in Q\}. \tag{3.9}$$

设 $q$ 是 $\mathbb{Q}$ 上未定元, 那么取 $\Bbbk=\mathbb{Q}(q)$, 得到 $\mathbb{Q}(q)$-代数 $\mathbb{U}_q=\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$, 也可以视作 $\mathcal{A}=\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 上的代数.

量子包络代数的 **Lusztig 整形式** [Lus90b](或被称为**限制型整形式**) 是指 $\mathbb{U}_q$ 的由 $E_i^{(s)}, F_i^{(s)}, K_i^{\pm1}, 1\leq i\leq n, s\in\mathbb{N}$ 生成的 $\mathcal{A}$-子代数, 记作 $\mathbb{U}_{\mathcal{A}}^L$. 量子包络代数的 **De Concini-Kac 整形式** [DCK90] 是指 $\mathbb{U}_q$ 的由 $E_i, F_i, K_i^{\pm1}, (K_i-K_i^{-1})/(q_i-q_i^{-1})$ 生成的 $\mathcal{A}$-子代数, 记作 $\mathbb{U}_{\mathcal{A}}^{DK}$. 它们被称为整形式是因为有 $\mathbb{Q}(q)$-代数同构

$$\mathbb{U}_{\mathcal{A}}^L\otimes_{\mathcal{A}}\mathbb{Q}(q)\cong\mathbb{U}_q\cong\mathbb{U}_{\mathcal{A}}^{DK}\otimes_{\mathcal{A}}\mathbb{Q}(q),$$

并且可以证明这两个整形式都是自由 $\mathcal{A}$-模 (并且都是 $\mathcal{A}$ 上的 Hopf 代数, $K_i$ 都是群样元)[Lus90b, Theorem 4.5]. 在 $\mathbb{U}_q$ 中有关于 divided powers 的恒等式 [CP95, p.298 Eq. (13)]:

$$E_i^{(r)}F_i^{(s)}=\sum_{r,s\geq t\geq 0}F_i^{(s-t)}\begin{bmatrix}K_i;2t-s-r\\ t\end{bmatrix}_{q_i}E_i^{(r-t)}. \tag{3.10}$$

其中对任何 $r\in\mathbb{N}$ 和 $m\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{bmatrix}K_i;m\\ r\end{bmatrix}_{q_i}=\prod_{s=1}^{r}\frac{K_iq_i^{m+1-s}-K_i^{-1}q_i^{s-m-1}}{q_i^s-q_i^{-s}}.$$

那么从式(3.10)可知 $\left[\begin{smallmatrix}K_i;m\\ r\end{smallmatrix}\right]_{q_i}\in\mathbb{U}_{\mathcal{A}}^L$. 特别地, 由 $\left[\begin{smallmatrix}K_i;0\\ 1\end{smallmatrix}\right]_{q_i}=(K_i-K_i^{-1})/(q_i-q_i^{-1})$ 得到 $\mathbb{U}_{\mathcal{A}}^{DK}\subseteq\mathbb{U}_{\mathcal{A}}^L$.

设 $\epsilon\in\mathbb{C}^\times$ 是 $\ell$ 次本原单位根, 这里 $\ell\geq 3$ 是奇数, 当 $\mathfrak{g}$ 有 $G_2$ 型单 Lie 理想时要求 $\ell$ 与 3 互素. 我们有赋值映射 $\mathcal{A}\to\mathbb{C}, f(q,q^{-1})\mapsto f(\epsilon,\epsilon^{-1})$, 这使得 $\mathbb{C}$ 成为 $\mathcal{A}$-代数. 于是我们能够考虑前面的两种整形式在 $q=\epsilon$ 处的特殊化. 例如 De-Concini-Kac 整形式 $\mathbb{U}_{\mathcal{A}}^{DK}$ 满足其特殊化 $\mathcal{U}_\epsilon^{DK}(\mathfrak{g})\coloneqq\mathbb{U}_{\mathcal{A}}^{DK}\otimes_{\mathcal{A}}\mathbb{C}$ 就是前面定义量子包络代数的生成元生成关系给出的 $\mathbb{C}$-代数. De-Concini-Kac 量子包络代数 $\mathcal{U}_\epsilon^{DK}(\mathfrak{g})$ 在典范中心 Hopf 子代数 $C_\epsilon(\mathfrak{g})=\mathbb{C}[E_{\beta_1}^\ell,...,E_{\beta_N}^\ell,F_{\beta_1}^\ell,...,F_{\beta_N}^\ell,K_1^{\pm1},...,K_n^{\pm1}]$[DCKP92] 上是秩为 $\ell^{\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}}$ 的自由模, 于是得到 $\ell^{\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}}$ 维 Hopf 商

$$\mathfrak{u}_\epsilon(\mathfrak{g})=\mathcal{U}_\epsilon^{DK}(\mathfrak{g})/C_\epsilon(\mathfrak{g})^+\mathcal{U}_\epsilon^{DK}(\mathfrak{g}). \tag{3.11}$$

称式(3.11)定义的有限维 Hopf 代数是 **Lusztig 小量子群**. 在小量子群中有 $E_{\beta_j}^\ell=0$ 以及 $K_i^\ell=1$. 此外, De Concini-Kac 量子包络代数 $\mathcal{U}_\epsilon^{DK}(\mathfrak{g})$ 的 PBW 基(3.9)诱导小量子群 $\mathfrak{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 的 PBW 基

$$\{F_{\beta_N}^{n_N}\cdots F_{\beta_1}^{n_1}K_1^{t_1}\cdots K_n^{t_n}E_{\beta_1}^{m_1}\cdots E_{\beta_N}^{m_N}\mid 0\leq n_1,...,n_N,m_1,...,m_N,t_1,...,t_n\leq\ell-1\} \tag{3.12}$$

在 $\mathbb{U}_{\mathcal{A}}^L\otimes_{\mathcal{A}}\mathbb{C}$ 中明显有 $E_i^\ell=F_i^\ell=0$ (因为在 $\mathbb{U}_{\mathcal{A}}^L$ 中有 $E_i^s=[s]_{q_i}!E_i^{(s)}$ 和 $F_i^s=[s]_{q_i}!F_i^{(s)}$, 所以利用 $[\ell]_{\epsilon^{d_i}}=0$ 便知). 此外还有 $K_i^{2\ell}=1$: 由这时在 $\mathbb{U}_{\mathcal{A}}^L$ 中有下面的恒等式立即得到:

$$\prod_{s=1}^{\ell}(K_iq_i^{1-s}-K_i^{-1}q_i^{s-1})=\left[\begin{smallmatrix}K_i;0\\ \ell\end{smallmatrix}\right]_{q_i}\prod_{s=1}^{\ell}(q_i^s-q_i^{-s}).$$

这反映了 **Lusztig 整形式和 De Concini-Kac 整形式的量子参数关于单位根特殊化后代数结构十分不同.**

通常为了让 Lusztig 整形式产生的量子群包含 Lusztig 小量子群, 会考虑 $\mathbb{U}_{\mathcal{A}}^L$ 的 Hopf 商 $\mathbb{U}_{\mathcal{A}}^L/(K_i^\ell-1 \mid 1\leq i\leq n)$ 关于 $q=\epsilon$ 的特殊化 (无论是否商去该 Hopf 理想, Lusztig 都研究了相应的单位根处大量子群和小量子群的代数结构, 例如见 [Lus90b, §5-6]):

$$\mathcal{U}_\epsilon^L(\mathfrak{g}) \coloneqq (\mathbb{U}_{\mathcal{A}}^L/(K_i^\ell-1 \mid 1\leq i\leq n))\otimes_{\mathcal{A}}\mathbb{C}\cong(\mathbb{U}_{\mathcal{A}}^L\otimes_{\mathcal{A}}\mathbb{C})/(K_i^\ell-1 \mid 1\leq i\leq n).$$

于是前面的讨论表明在 $\mathcal{U}_\epsilon^L(\mathfrak{g})$ 中

$$E_i^\ell=F_i^\ell=0,\ K_i^\ell=1,\forall 1\leq i\leq n. \tag{3.13}$$

对自然数 $0\leq s\leq \ell-1$, 易见 $E_i^{(s)}$ 与 $E_i^s$ 相差某个非零常数倍, $F_i^{(s)}$ 与 $F_i^s$ 相差某个非零常数倍.

# 4 量子 Frobenius 映射

设 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数, 那么 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 可以由 Chevalley 生成元 $\{e_i,h_i,f_i\}_{i=1}^n$ 以及下述生成关系定义:

$$h_ih_j-h_jh_i=0, e_if_i-f_ie_i=h_i, e_if_j-f_je_i=0\ (i\neq j),$$

$$h_ie_j-e_jh_i=a_{ij}e_j, h_if_j-f_jh_i=-a_{ij}f_j,$$

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}}(-1)^k\binom{1-a_{ij}}{k}e_i^{1-a_{ij}-k}e_je_i^k=0\ (i\neq j),$$

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}}(-1)^k\binom{1-a_{ij}}{k}f_i^{1-a_{ij}-k}f_jf_i^k=0\ (i\neq j).$$

根据 [CP95, Proposition 9.3.10], 如果考虑 $q=1$(对应 $\ell=1$) 的特殊化, 那么有 Hopf 代数同构 $\mathcal{U}_1^L(\mathfrak{g})\cong\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

同样我们可以考虑 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 中的 divided powers $e_i^{(s)}=e_i^s/s!$ 以及 $f_i^{(s)}=f_i^s/s!$, 其中 $s\in\mathbb{N}$. 称 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 中由所有 $e_i^{(s)}, f_i^{(s)}$ 生成的子环/$\mathbb{Z}$-子代数为 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 的 **Chevalley-Kostant $\mathbb{Z}$-形式** [MR161, Kos66], 记作 $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}$. Lusztig 对量子包络代数引入的限制型整形式可以视作 Chevalley-Kostant $\mathbb{Z}$-形式的量子版本.

设 $p$ 是素数且 $\mathbb{F}_p$ 是 $p$ 元域, $G_{\mathbb{F}_p}$ 是 $\mathfrak{g}$ 对应的 Chevalley 群. 域 $\mathbb{F}_p$ 上的 Hopf 代数

$$\mathcal{U}_{\mathbb{F}_p}\coloneqq\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_p$$

被称为 $G_{\mathbb{F}_p}$ 的**超代数**. 对 $\mathcal{U}_{\mathbb{F}_p}$, 存在唯一的 Hopf 代数同态 $\mathrm{Fr}:\mathcal{U}_{\mathbb{F}_p}\to\mathcal{U}_{\mathbb{F}_p}$(称为 **Frobenius 映射**) 使得

$$\mathrm{Fr}(e_i^{(r)})=\begin{cases}e_i^{(r/p)}, & p\text{整除}r,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

$$\mathrm{Fr}(f_i^{(r)})=\begin{cases}f_i^{(r/p)}, & p\text{整除}r,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

在 [Lus90b, §8] 中, Lusztig 证明了有唯一的 Hopf 代数同态 $\mathrm{Fr}_\epsilon:\mathcal{U}_\epsilon^L(\mathfrak{g})\to\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 使得 $\mathrm{Fr}_\epsilon(K_i)=1$ 以及

$$\mathrm{Fr}_\epsilon(E_i^{(r)})=\begin{cases}e_i^{(r/\ell)}, & \ell\text{整除}r,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

$$\mathrm{Fr}_\epsilon(F_i^{(r)}) = \begin{cases} f_i^{(r/p)}, & \ell\text{整除}r, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

称 $\mathrm{Fr}_\epsilon : \mathcal{U}_\epsilon^L(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 是**量子 Frobenius 映射**, 它明显是满射.

Lusztig 也证明了 $\mathrm{Ker}(\mathrm{Fr}_\epsilon)$ 既是 $\mathfrak{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 的增广理想 $(E_i, F_i, K_i - 1 \mid 1 \leq i \leq n)$ 生成的左理想也是生成的右理想, $\mathfrak{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 是 $\mathcal{U}_\epsilon^L(\mathfrak{g})$ 的正规 Hopf 子代数. 所以我们有 Hopf 代数正合列

$$\mathfrak{u}_\epsilon(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{U}_\epsilon^L(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\mathrm{Fr}_\epsilon} \mathcal{U}(\mathfrak{g}). \tag{4.1}$$

也见 [Len16] 在对本原单位根 $\epsilon$ 的次数不加限制下对(4.1)的研究.

# 5 Lusztig 小量子群

在 §4 我们提到的整形式的包含 $\mathbb{U}_{\mathcal{A}}^{DK} \subseteq \mathbb{U}_{\mathcal{A}}^L$ 诱导 Hopf 代数同态 $\theta : \mathcal{U}_\epsilon^{DK}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}_\epsilon^L(\mathfrak{g})$, $\mathrm{Im}\theta$ 就是 $\mathcal{U}_\epsilon^L(\mathfrak{g})$ 的由 $K_i^{\pm 1}, F_i, E_i (1 \leq i \leq n)$ 生成的 Hopf 子代数. 因为前面我们看到在 $\mathcal{U}_\epsilon^L(\mathfrak{g})$ 中(3.13)成立, 所以 $\theta$ 诱导满射 $\check{\theta} : \mathfrak{u}_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Im}\theta$. Lusztig 在 [Lus90b, §6.5] 给出了 $\mathcal{U}_\epsilon^L(\mathfrak{g})$ 和 $\mathrm{Im}\theta$ 的 $\mathbb{C}$-基. 特别地, 他得到 $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}\theta = \ell^{\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}}$. 所以 $\check{\theta} : \mathfrak{u}_\epsilon(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Im}\theta$ 是 Hopf 代数同构. 事实上, Lusztig 小量子群的原始定义就是 $\mathcal{U}_\epsilon^L(\mathfrak{g})$ 的由 $E_i, F_i, K_i (1 \leq i \leq n)$ 生成的子代数 (不商去 $K_i^\ell - 1$ 生成的 Hopf 理想时相应版本的小量子群定义见 [Lus90b, §5.4]). 故

Lusztig 小量子群 $\mathfrak{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 既可视作 De Concini-Kac 单位根处量子包络代数关于典范中心 Hopf 子代数的增广理想诱导的 Hopf 商, 又可视作 Lusztig 单位根处量子包络代数由 $E_i, F_i, K_i (1 \leq i \leq n)$ 生成的 Hopf 子代数.

特别地, Hopf 代数同态诱导 Hopf 代数同态 $\theta : \mathcal{U}_\epsilon^{DK}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}_\epsilon^L(\mathfrak{g})$ 有分解 $\mathcal{U}_\epsilon^{DK}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathfrak{u}_\epsilon(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{U}_\epsilon^L(\mathfrak{g})$. 结合(4.1)给出的 Hopf 代数正合列, 我们得到 Hopf 代数同态序列:

$$\mathcal{U}_\epsilon^{DK}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathfrak{u}_\epsilon(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{U}_\epsilon^L(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\mathrm{Fr}_\epsilon} \mathcal{U}(\mathfrak{g}),$$

其中 $\mathrm{Fr}_\epsilon : \mathcal{U}_\epsilon^L(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 是量子 Frobenius 映射.

**Remark 5.1.** 之前指出, Lusztig 在 [Lus90a, Lus90b] 中也考虑了不商去 $(K_i^\ell - 1 \mid 1 \leq i \leq n)$ 定义的单位根处量子包络代数和相应的小量子群. 如果记这时的小量子群是 $\widehat{\mathfrak{u}}_\epsilon(\mathfrak{g})$, 那么 $\dim_{\mathbb{C}} \widehat{\mathfrak{u}}_\epsilon(\mathfrak{g}) = 2^n \ell^{\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}}$[Lus90b, Theorem 5.6(b)], 并且 $\widehat{\mathfrak{u}}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 到 $\mathfrak{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 有典范满 Hopf 代数同态.

# 参考文献

[BG02] Ken A. Brown and Ken R. Goodearl. *Lectures on algebraic quantum groups*. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.

[BNPP14] Christopher P. Bendel, Daniel K. Nakano, Brian J. Parshall, and Cornelius Pillen. Cohomology for quantum groups via the geometry of the nullcone. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 229(1077):x+93, 2014.

[CP95] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley. *A guide to quantum groups.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Corrected reprint of the 1994 original.

[DCK90] Corrado De Concini and Victor G. Kac. Representations of quantum groups at roots of 1. In *Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory (Paris, 1989)*, volume 92 of *Progr. Math.*, pages 471–506. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[DCKP92] C. De Concini, V. G. Kac, and C. Procesi. Quantum coadjoint action. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(1):151–189, 1992.

[EGNO15] Pavel Etingof, Shlomo Gelaki, Dmitri Nikshych, and Victor Ostrik. *Tensor categories*, volume 205 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[GK93] Victor Ginzburg and Shrawan Kumar. Cohomology of quantum groups at roots of unity. *Duke Math. J.*, 69(1):179–198, 1993.

[Hum90] James E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups*, volume 29 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Jan96] Jens Carsten Jantzen. *Lectures on quantum groups*, volume 6 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[Jan03] Jens Carsten Jantzen. *Representations of algebraic groups*, volume 107 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2003.

[Kos66] Bertram Kostant. Groups over $Z$. In *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965)*, pages 90–98. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966.

[Len16] Simon Lentner. A Frobenius homomorphism for Lusztig's quantum groups for arbitrary roots of unity. *Commun. Contemp. Math.*, 18(3):1550040, 42, 2016.

[Lus90a] George Lusztig. Finite-dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebra. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(1):257–296, 1990.

[Lus90b] George Lusztig. Quantum groups at roots of 1. *Geom. Dedicata*, 35(1-3):89–113, 1990.

[MR161] *Séminaire Bourbaki, 13ième année: 1960/61. Textes des conférences. Exposés 205 à 222.* Secrétariat mathématique, Paris, 1961. Deuxième édition, corrigée. 3 fascicules.

[Ost98] V. V. Ostrik. Cohomological supports for quantum groups. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 32(4):22–34, 95, 1998.