U.F.D. 的 Kaplansky 定理

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 3 月 26 日

1 Kaplansky 定理

Kaplansky's Theorem. 设 R 是整区, 那么 R 是 U.F.D. 的充要条件是 R 的任何非零素理想含有素元.

Proof. 必要性是明显的, 只验证充分性. 考虑 $\mathcal{S} = \{a \neq 0 \in R | a\text{可以分解为有限个素元的乘积}\}$, 易见 $\mathcal{S}$ 包含 R 的所有可逆元并且 $\mathcal{S}$ 是 R 的乘闭子集. 注意到 $0 \notin \mathcal{S}$, 所以通过 Zorn 引理可选取理想 I 使得 I 是满足与 $\mathcal{S}$ 交集为空的理想中极大的. 根据 I 的选取, I 是素理想. 假设 $I \neq 0$, 那么 I 包含素元 p, 但 $p \in \mathcal{S}$, 矛盾. 因此 $I = 0$, 于是 $\mathcal{S} = R - \{0\}$, 这说明 R 中任何非零元素可分解为有限多个素元的乘积, 由此易知结论成立. □

Corollary 1.1. 设 R 是整区, 则 R 是 U.F.D. 的充要条件是 R 的任何真主理想上的极小素理想仍是主理想.

Proof. 必要性: 设 P 是主理想 (a) 上的极小素理想. 不妨设 $a \neq 0$. 那么 a 可分解为一些素元乘积, 设为 $a = p_1 \cdots p_n$((a) 是真理想保证了 $n \geq 1$), 于是存在某个 $p_i \in P$. 进而 $(a) \subseteq (p_i) \subseteq P$, 现在由 P 的极小性迫使 $P = (p_i)$. 充分性: 根据 Kaplansky 定理, 只需验证任何非零素理想包含素元. 设 P 是 R 的非零素理想, 并取 $a \neq 0 \in P$, 那么可选取包含 (a) 且含于 P 的极小素理想 Q(考虑局部化 R_P 中 $(a)_P$ 上的极小素理想). 根据条件, Q 作为主理想上的极小素理想一定是主理想. 因此 Q 的生成元给出了 P 包含的一个素元. □

Remark 1.2. U.F.D. 未必是 Noether 环, 例如域上可数无穷个变量的多项式代数. 对交换 Noether 环, Krull 主理想定理告诉我们结论总是成立的.

Corollary 1.3. U.F.D. 的任何高度为 1 的素理想都是主理想.

Proof. 设 P 是高度为 1 的素理想, 由 Kaplansky 定理知 P 包含某个素元 p, 于是 $P = (p)$. □

Corollary 1.4. 设 R 是 Noether 整区, 则 R 是 U.F.D. 的充要条件是 R 的任何高度为 1 的素理想是主理想.

Proof. 只需证充分性. 注意到任何 R 的非零素理想高度有限 (因为 R 关于给定素理想作局部化后 Krull 维数有限), 因此 R 的任何素理想都包含一个高度为 1 的素理想, 现在对条件应用 Kaplansky 定理便知. □