I-adic 完备化

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2025 年 2 月 12 日

目录

1 预备基础

1.1 分次环回顾

设 R 是含幺环, 如果 $(R,+)$ 有加群分解 $R=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}R_i$ 并且 $R_iR_j\subseteq R_{i+j},\forall i,j\in\mathbb{Z}$, 则称加群族 $\{R_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 R 的一个**分次** (或 **$\mathbb{Z}$-分次**). R_i 中的非零元被称为 R 的 i **次齐次元** (如果 a 是分次环 R 的 i 次齐次元, 记 $\deg a=i$. 通常将 R 的零元视作任意次数的齐次元). 分次环 R 的幺元自动在 R_0 中: 设 $1\in R$ 有齐次元分解 $a_{-\ell}+\cdots+a_{-1}+a_0+a_1+\cdots+a_\ell$, 两边同乘上 a_0 得到 $a_ia_0=a_0a_i=0,\forall i\neq 0$. 于是对 1 的齐次元分解两边同乘 a_i, 得到 $a_i=0,\forall i\neq 0$. 至此得到 $a_0=1$. 如果 $\Bbbk$ 是域, 当分次环 R 是 $\Bbbk$-代数且分次 $\{R_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 中每项是 $\Bbbk$-子空间, 则将分次环 R 称为**分次代数** (或 **$\mathbb{Z}$-分次代数**). 如果分次环 $R=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}R_i$ 满足当 $i<0$ 时, $R_i=0$, 那么也可以把上述加群分解写作 $R=\oplus_{i\in\mathbb{N}}R_i$, 这时称分次环 R 是 **$\mathbb{N}$-分次的**. 如果 $\mathbb{N}$-分次代数 R 满足 $R_0=\Bbbk$, 称 R 是**连通分次的**. 例如域 $\Bbbk$ 上多项式代数 $\Bbbk[x_1,...,x_n]$ 通过各次齐次多项式空间可赋予自然的分次来成为连通分次代数, 又例如 $\Bbbk$ 上有限多个自由变量的自由代数. 如果分次环 R 的左/右理想 I 可由一些齐次元生成, 则称 I 是**分次左/右理想**. 当 I 是分次左理想或分次右理想时, 易见 $I=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}(I\cap R_i)$. 反之, 如果分次环 R 的左/右理想 I 满足 $I=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}(I\cap R_i)$ 时, I 自然是分次理想. R 关于分次理想 I 之商 R/I 具有自然的分次结构 $R/I=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}(R_i+I)/I$, 这里每个 $(R_i+I)/I\cong R_i/(R_i\cap I)$.

Example 1.1 (Rees 环, [Jac09]). 设 R 是含幺交换环, I 是 R 的理想, 那么 Ix 是 $R[x]$ 的分次理想. 将 Ix 在 $R[x]$ 中生成的 R-子代数, 即 $R+Ix+I^2x^2+\cdots+I^nx^n+\cdots$, 称为 I 决定的 **Rees 环**, 记作 $T(I)$. 易见 Rees 环可自然视作 $\mathbb{N}$-分次环. 如果 R 是交换 Noether 环, 那么可设 $I=Rb_1+\cdots+Rb_m$, 于是 $T(I)=R[b_1x,...,b_mx]$, 依 Hilbert 基定理, $T(I)$ 是 Noether 环.

设 $R=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}R_i$ 是分次环, 左 R-模 M 如果有加群分解 $M=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}M_i$ 且对任何正整数 i,j 有 $R_iM_j\subseteq M_{i+j}$, 则称 $\{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 M 上**分次**, 将带有分次的 M 称为**分次模**. 类似环的情形可定义**齐次元**和**分次子模**的概念. 如果分次模 M 满足存在整数 k 使得 $M_n=0,\forall n\le k$, 称 M 是**下有界的**, 类似可定义**上有界**的概念. 由于任何 $M=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}M_i$ 中元素有唯一的齐次元分解, 对非零元都能够对应唯一最高次的齐次元. 对 $\mathbb{Z}$-分次环 R 和整数 k, 通常引入 $R_{\ge k}=R_k\oplus R_{k+1}\oplus\cdots$ 以及来简化记号 (类似可定义 $R_{\le k}$, 并对分次模使用相应记号). 那么 $\mathbb{Z}$-分次环 R 产生分次环 $R_{\ge 0}$ 和 $R_{\le 0}$. 分次 R-模 M 产生分次 $R_{\ge 0}$-模 $M_{\ge 0}$ 和分次 $R_{\le 0}$-模 $M_{\le 0}$.

Lemma 1.2 ([NaavO82]). 设 R 是 $\mathbb{Z}$-分次环, M 是分次左 R-模, 有 (未必分次)R-子模 X 和 Y 满足 $X\subseteq Y$. 将 X 和 Y 中所有非零元素的最高次齐次元以及零构成的分次子模分别记作 $\tilde{X}$ 和 $\tilde{Y}$(注意 $X\subseteq Y$ 蕴含 $\tilde{X}\subseteq\tilde{Y}$). 那么 $X=Y$ 当且仅当 $\tilde{X}=\tilde{Y}$ 且存在整数 ℓ 使得 $X\cap M_{<\ell}=Y\cap M_{<\ell}$.

Proof. 只需验证充分性: 任取 $y\neq 0\in Y$, 并设有齐次元分解 $y=y_{i_1}+y_{i_2}+\cdots+y_{i_n}$, 这里每个 $y_{i_k}\neq 0$ 并且 $i_1<i_2<\cdots<i_n$. 那么 $y_{i_n}\in\tilde{Y}$. 如果 $i_n<\ell$, 那么 $y\in Y\cap M_{<\ell}\subseteq X$. 下设 $\ell\le i_n$. 那么 $y_{i_n}\in\tilde{Y}=\tilde{X}$ 说明存在 $x\in X$ 使得 $y-x\in Y$ 满足 $y-x\in M_{<i_n}$. 于是重复上述讨论, 可构造 $x_1,...,x_t\in X$ 使得 $y-x_1-\cdots-x_t$ 的最高次项次数严格小于 ℓ, 进而 $y-x_1-\cdots-x_t\in X$ 导出 $y\in X$. □

Remark 1.3. 设 R 是 $\mathbb{Z}$-分次环, M 是分次左 R-模, 有 (未必分次)R-子模 X 和 Y 满足 $X\subseteq Y$. 也可以考虑 X 和 Y 中所有非零元素的最低次齐次元和零元构成的分次子模, 分别记作 $\hat{X},\hat{Y}$, 同样有 $\hat{X}\subseteq\hat{Y}$. 类似 [引理1.2] 的讨论可知 $X=Y$ 当且仅当 $\hat{X}=\hat{Y}$ 且存在整数 ℓ 使得 $X\cap M_{>\ell}=Y\cap M_{>\ell}$.

Corollary 1.4 ([NaavO82]). 设 R 是 $\mathbb{Z}$-分次环, 分次左 R-模 M 是单边有界的. 那么 M 满足 R-子模升链条件 (即 M 作为 R-模是 Noether 模) 当且仅当 M 满足分次 R-子模升链条件 ([定理1.12] 将加强结论).

Proof. 只需说明充分性, 当 M 是下有界分次模时, 任取 M 的子模升链 $X_1\subseteq X_2\subseteq\cdots$. 则存在正整数 ℓ 使得 $\tilde{X}_\ell=\tilde{X}_{\ell+1}=\cdots$. 于是由 [引理1.2] 得到 $X_\ell=X_{\ell+1}=\cdots$. 若 M 是上有界分次模, 使用 [注记1.3] 即可. □

Example 1.5 (Rees 模, [Jac09]). 设 R 是交换环, M 是 R-模, 并记 $M[x]$ 是系数在 M 中的以 x 为变量的多项式构成的加法群. 那么 $M[x]$ 可自然视作 $R[x]$-模, 且有 $R[x]$-模同构 $M[x]\cong R[x]\otimes_R M$. 将 $R[x]$ 赋予标准分次视作 $\mathbb{N}$-分次环后, $M[x]$ 便是分次左 $R[x]$-模. 固定 R 的理想 I, $T(I)$ 是 [例1.1] 意义下的 Rees 环. 由于 $T(I)$ 是 $R[x]$ 的子环, 可将 $M[x]$ 视作分次左 $T(I)$-模. 将 $M[x]$ 视作 $T(I)$-模后, 考虑子集 M 生成的 $T(I)$-子模, 那么该子模为 $M+IMx+I^2Mx^2+\cdots$, 记作 $T_I(M)$, 称为 I 和 M 决定的 **Rees 模**. 易见 $T_I(R)=T(I)$. 当 R 是交换 Noether 环且 M 是有限生成 R-模时, [例1.1] 中已经指出 $T(I)$ 是 Noether 环, 因此由 $T_I(M)$ 是有限生成 $T(I)$-模立即得到 $T_I(M)$ 作为 $T(I)$-模是 Noether 模.

Rees 环和 Rees 模的构造使我们能够借助多项式运算比较系数来导出 Artin-Rees 引理.

Theorem 1.6 (Artin-Rees 引理, [Jac09]). 设 M 是交换 Noether 环 R 上有限生成模, I 是 R 的理想, M 有子模 M_1 和 M_2. 那么存在正整数 k 使得对任何正整数 $n\ge k$ 有 $I^nM_1\cap M_2=I^{n-k}(I^kM_1\cap M_2)$.

Proof. 只要证存在正整数 k 使得 $I^nM_1\cap M_2\subseteq I^{n-k}(I^kM_1\cap M_2),\forall n\geq k$. 现在 $T_I(M)$ 作为 Rees 环 $T(I)$ 上的模是 Noether 模, [例1.5]. 置 $N=M_1\cap M_2+(IM_1\cap M_2)x+(I^2M_1\cap M_2)x^2+\cdots$, 那么 N 是 $T_I(M)$ 作为 $T(I)$-模的子模, 故可设 $N=T(I)u_1+T(I)u_2+\cdots+T(I)u_m$. 对每个 $u_i\in N$, 存在正整数 k_i 和 $n_{ij}\in I^jM_1\cap M_2(0\leq j\leq k_i)$ 使得 $u_i=\sum_{j=0}^{k_i}n_{ij}x^j,1\leq i\leq m$. 命 $k=\max\{k_1,...,k_m\}$. 如果我们能够验证对任何 $n\geq k$ 以及 $u\in I^nM_1\cap M_2$ 有 $u\in I^{n-k}(I^kM_1\cap M_2)$, 那么便完成定理证明.

现在设 $n\geq k$ 并取定 $u\in I^nM_1\cap M_2$, 那么 $ux^n\in N$. 根据前面的记号, 存在 $A_1,...,A_m\in T(I)$ 使得 $ux^n=A_1u_1+A_2u_2+\cdots+A_mu_m$. 可设 $A_i=\sum_{j=0}^{t_i}a_{ij}x^j,a_{ij}\in I^j,i=1,2,...,m$. 那么

$$ux^n=\sum_{i=1}^m\left(\sum_{s=0}^{t_i}a_{is}x^s\right)\left(\sum_{j=0}^{k_i}n_{ij}x^j\right)=\sum_{i=1}^m\sum_{l=0}^{t_i+k_i}\left(\sum_{s+j=l}a_{is}n_{ij}\right)x^l,$$

上式说明 $u\in\sum_{j=0}^kI^{n-j}(I^jM_1\cap M_2)\subseteq I^{n-k}(I^kM_1\cap M_2)$, 断言得证. □

Remark 1.7. 设 M 是交换 Noether 环 R 上有限生成模, I 是 R 的理想, N 是 M 的子模. 在 Artin-Rees 引理中取 $M_1=M$, $M_2=N$, 我们得到存在正整数 k 使得 $I^nM\cap N=I^{n-k}(I^kM\cap N),\forall n\geq k$.

Remark 1.8. 利用 Artin-Rees 引理我们能够直接导出 Krull 交定理: 设 M 是交换 Noether 环 R 上有限生成模, I 是 R 的理想并记 $I^\omega M=\cap_{n=1}^\infty I^nM$, 那么 $I(I^\omega M)=I^\omega M$ 以及 $I^\omega M=\{x\in M|存在b\in I使得x=bx\}$. 根据 [注记1.7], 存在正整数 k 使得对任何 $n\geq k$ 有 $I^nM\cap I^\omega M=I^{n-k}(I^kM\cap I^\omega M)$. 取 $n=k+1$ 立即得到 $I(I^\omega M)=I^\omega M$. 易见 $\{x\in M|存在b\in I使得x=bx\}\subseteq I^\omega M$. 因为 $I^\omega M$ 是有限生成 R-模且 $I(I^\omega M)=I^\omega M$, 所以存在 $b\in I$ 使得 $1-b\in\mathrm{Ann}_RM$, 故 $\{x\in M|存在b\in I使得x=bx\}=I^\omega M$. 在 [命题2.7] 中我们将看到 $I^\omega M=0$ 意味着 M 关于 I-adic 拓扑是 Hausdorff 空间.

Remark 1.9. 如果 M 是交换 Noether 环 R 上有限生成模, J 是 R 的 Jacobson 根. 那么通过 [注记1.8] 和 Nakayama 引理立即得到 $\cap_{n=0}^\infty J^nM=0$. 特别地, $\cap_{n=0}^\infty J^n=0$.

如果 $\mathbb{Z}$-分次环 R 上的 $\mathbb{Z}$-分次模 M 的分次子模满足升链条件, 称 M 是**分次 Noether 模**. 易见分次模 M 是分次 Noether 模当且仅当 M 的任何分次子模是有限生成的. 一个基本的问题是分次模的分次 Noether 性质与通常 Noether 性质的关系. 首先指出分次 Noether R-模的每个分量是 Noether R_0-模.

Lemma 1.10 ([NaavO82])**.** 设 R 是 $\mathbb{Z}$-分次环且分次左 R-模 M 是分次 Noether 的. 那么每个 M_i 作为左 R_0-模是 Noether 模. 此外, $M_{\geq 0}$ 是 Noether 左 $R_{\geq 0}$-模且 $M_{\leq 0}$ 是 Noether 左 $R_{\leq 0}$-模.

Proof. 如果有 M_i 不是 Noether 左 R_0-模, 那么 M_i 有 R_0-子模的严格升链. 于是 $M_{\geq i}$ 作为 M 的分次 R-子模也有严格的分次 R-子模升链. 这导出 M 的分次子模严格升链, 这和 M 是分次 Noether 模矛盾.

下面以 $M_{\leq 0}$ 情形为例, 说明 M 是分次 R-模蕴含 $M_{\leq 0}$ 是 Noether $R_{\leq 0}$-模. 现在 [推论1.4] 说明我们只需要验证 $M_{\leq 0}$ 作为 $R_{\leq 0}$-模是分次 Noether 模. 任取 $M_{\leq 0}$ 的分次左 $R_{\leq 0}$-子模 N, 我们说明 N 是有限生成 $R_{\leq 0}$-模来得到 $M_{\leq 0}$ 作为 $R_{\leq 0}$-模是分次 Noether 模来完成证明. 根据 N 的选取, RN 是 M 的分次 R-子模. 进而由 M 的分次 Noether 条件得到 RN 是有限生成 R-模. 于是可选取 N 的有限齐次元子集作为 RN 的生成元集, 设为 $\{x_1,...,x_\ell\}$, 并设 $\deg x_i=n_i\in\mathbb{Z}_{\leq 0}$. 置 $n=\min\{n_1,...,n_\ell\}$, 那么对任何 $k\leq n$, N_k 中元素关于 $\{x_1,...,x_\ell\}$ 的线性表出系数在 $R_{\leq 0}$ 中, 所以 $N=(\oplus_{k\leq n}N_k)\oplus N_{n+1}\oplus\cdots\oplus N_0$ 作为 $R_{\leq 0}$-模是有限生成的 (结合每个 N_i 是有限生成 R_0-模). 因此 $M_{\leq 0}$ 是分次 Noether $R_{\leq 0}$-模. □

Remark 1.11. 如果 $\mathbb{Z}$-分次环 R 作为分次左模是 Noether 的, 称 R 是**分次左 Noether 环**. 之后我们将看到分次环的左分次 Noether 性就是左 Noether 性, [定理1.12]. 这里再指出 [引理1.10] 说明当分次环 R 是左 Noether 环时, R_0 也是左 Noether 环. 如果 R 是交换 $\mathbb{N}$-分次环, 那么 R 是 Noether 环当且仅当 R_0 是 Noether 环且 R 是有限生成 R_0-代数: 只需验证必要性中的 R 是有限生成 R_0-代数. 这时 $R_{\geq 1}$ 作为 R 的分次 R_0-子模, 可由有限多个 (正次数) 齐次元生成, 记作 $\{u_1, ..., u_m\}$. 通过考察齐次元次数, 可归纳地证明对每个自然数 n, R_n 中元素可由 $\{u_1, ..., u_m\}$ 构成的单项式 R_0-线性表出, 所以 $R = R_0[u_1, ..., u_m]$.

Theorem 1.12 ([NaavO82])**.** 设 R 是 $\mathbb{Z}$-分次环, 则分次左 R-模是 Noether 模等价于是分次 Noether 模.

Proof. 设 M 是分次左 R-模, 只需证明 M 是分次 Noether 模蕴含 M 是 Noether 模. 任取 M 的 R-子模升链 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$. 那么 $X_1 \cap M_{\leq 0} \subseteq X_2 \cap M_{\leq 0} \subseteq \cdots$ 是 $M_{\leq 0}$ 作为 $R_{\leq 0}$-模的子模升链, $\tilde{X}_1 \subseteq \tilde{X}_2 \subseteq \cdots$ 是 M 的分次子模升链, 见 [引理1.2]. 现在 [引理1.10] 和 M 的分次 Noether 条件说明存在正整数 ℓ 使得 $X_\ell \cap M_{\leq 0} = X_{\ell+1} \cap M_{\leq 0} = \cdots$ 以及 $\tilde{X}_\ell = \tilde{X}_{\ell+1} = \cdots$. 最后应用 [引理1.2] 得到 $X_\ell = X_{\ell+1} = \cdots$. $\square$

1.2 相伴分次环回顾

设 R 是含幺环, 如果 $(R, +)$ 的子群族 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足 (1) 对任何自然数 i, j, 有 $F_iF_j \subseteq F_{i+j}$; (2) 对任何自然数 i, $F_i \subseteq F_{i+1}$; (3)$\cup_{i\in\mathbb{N}}F_i = R$, 那么称 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 R 的一个**升滤**. 类似可定义 R 上**降滤**的概念, 区别是对任何自然数 i, $F_i \supseteq F_{i+1}$. 称带有滤的环为**滤环** ($F_i - F_{i-1}$ 中元素称为 i **次齐次元**). 如果滤环 R 是 $\Bbbk$-代数, 且 R 上滤 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的每项是 $\Bbbk$-子空间, 则将 R 也称为**滤代数**. 如果 $R = \oplus_{i\in\mathbb{N}}R_i$ 是 $\mathbb{N}$-分次环, 对每个自然数 i, 置 $F_i = R_0 \oplus R_1 \oplus \cdots \oplus R_i$, 那么 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 定义了 R 上的升滤 (称为**标准升滤**). 如果含幺环 R 有理想 I, 那么 $R = I^0 \supseteq I \supseteq I^2 \supseteq \cdots$ 定义出 R 上降滤. 类似可定义滤模的概念: 以升滤情形为例. 如果滤环 R 上左模 M 有子群族 $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足对任何自然数 i, j, $R_iM_j \subseteq M_{i+j}$, $M_i \subseteq M_{i+1}$ 且 $\cup_{i\in\mathbb{N}}M_i = M$, 则称 $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 M 的一个**升滤**, 带有滤的模 M 称为**滤模** (类似可定义滤模的齐次元).

设 R 带有升滤 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 命 $F_{-1} = 0$ 以及 $T = \oplus_{i\in\mathbb{N}}F_i/F_{i-1}$, 那么 $F_iF_j \subseteq F_{i+j}$ 保证了 R 上乘法自然诱导 T 上乘法使得 T 成为分次环, 称为 R 关于给定升滤的**相伴分次环**, 记作 $\mathrm{gr}R$. 如果 $R = \oplus_{i\in\mathbb{N}}R_i$ 是 $\mathbb{N}$-分次的, 那么由 R 上分次诱导的标准升滤产生的相伴分次环就是 R. 对于带有降滤的环同样可定义相伴分次环: 如果 R 带有降滤 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 命 $\mathrm{gr}R = \oplus_{i\in\mathbb{N}}F_i/F_{i+1}$. 将含幺环 R 经理想 I 诱导的降滤 $R = I^0 \supseteq I \supseteq I^2 \supseteq \cdots$ 产生的相伴分次环记作 $G_I(R)$. 对滤模也可以定义**相伴分次模**的概念 (将滤模 M 的相伴分次模记作 $\mathrm{gr}M$), $\mathbb{N}$-分次模带有的标准升滤的相伴分次模就是自身. 如果 R 是含幺环, 固定 R 的理想 I 和左 R-模 M, 那么 M 有降滤 $M = I^0M \supseteq IM \supseteq \cdots$, 由此得到的相伴分次模记作 $G_I(M)$, 这是左 $G_I(R)$-模.

Example 1.13 ([Jac09])**.** 设 R 是交换 Noether 环, I 是 R 的理想且 M 是有限生成 R-模. 那么 $G_I(R)$ 是 Noether 环且 $G_I(M)$ 作为 $G_I(R)$-模是 Noether 模.

Proof. 在 [例1.1] 已经指出 Rees 环 $T(I)$ 是 Noether 环. 于是我们有标准映射 $\eta : T(I) \to G_I(R), \sum_i a_ix^i \mapsto (\overline{a_i})_{i=0}^{\infty}$, 这是满环同态, 于是 $G_I(R)$ 也是交换 Noether 环. 如果设 $M = Rx_1 + \cdots + Rx_t$, 那么 $T_I(M)$ 作为 $T(I)$-模是有限生成模, [例1.5]. 并且 $T_I(M)$ 到 $G_I(M)$ 有自然的满加群同态使得当 $G_I(M)$ 通过 η 视作 $T(I)$-模后该加群同态成为满 $T(I)$-模同态. 因此 $G_I(M)$ 作为 $G_I(R)$-模是有限生成模. $\square$

之后我们也会看到含幺环 R 关于给定理想 I 诱导的降滤 $R = I^0 \supseteq I^1 \supseteq \cdots$ 产生的相伴分次环 $G_I(R)$ 在 I-adic 完备化理论中的应用, 见 [推论2.42] 和 [定理2.43].

1.3 正则序列回顾

本节回顾些交换代数中正则序列理论的基本结果 (为缩减篇幅, 这里略去大部分结果的证明, 主要参考文献是 [BH93]), 不会在 I-adic 完备化的定义和主要性质中用到, 初次阅读可跳过.

设 M 是交换环 R 上的模. 如果 $a \in R$ 满足对任何 $x \neq 0 \in M$ 有 $ax \neq 0$, 则称 a 是 **M-正则元**. 如果 R 中序列 $a_1, ..., a_n$ 满足 a_1 是 M-序列, a_2 是 M/a_1M-序列,..., a_n 是 $M/(a_1, ..., a_{n-1})M$-序列, 那么称 $a_1, ..., a_n$ 是**弱 M-正则序列**; 若进一步有 $M \neq (a_1, ..., a_n)M$, 则称 $a_1, ..., a_n$ 是 **M-正则序列**. 如果 I 是 R 的理想, $a_1, ..., a_n \in I$ 是 M-正则序列, 则称 $a_1, ..., a_n$ 是含于 I 的 M-正则序列. 当 R 是交换 Noether 环时, 含于 I 的任何 M-正则序列都可以扩充为含于 I 的极大 M-正则序列. 之后我们会看到 R 的 I-adic 完备化 $\widehat{R}$ 是平坦 R-模 (见 [定理2.37]), 所以关于正则序列, 我们指出

Lemma 1.14 ([BH93])**.** 设 R, S 是含幺环, M 是 R-模, N 是 S-模且 $\varphi : R \to S$ 是保幺环同态满足将 N 由 φ 视作 R-模后 N 是平坦 R-模. 则对弱 M-正则序列 $a_1, ..., a_n$, 有 $\varphi(a_1), ..., \varphi(a_n) \in S$ 是弱 $M \otimes_R N$-正则序列.

Proof. 由条件, 每个 a_i 决定的 $M/(a_1, ..., a_{i-1})M$ 上左乘变换是单射, 所以由 N 是平坦 R-模以及 S-模同构 $M/(a_1, ..., a_{i-1})M \otimes_R N \cong (M \otimes_R N)/(a_1, ..., a_{i-1})(M \otimes_R N)$ 便得结果. □

之后我们也需要下述 Rees 定理

Theorem 1.15 (Rees 定理, [BH93])**.** 设 R 是交换 Noether 环, 有理想 I, M 是有限生成 R-模满足 $IM \neq M$. 那么含于 I 的所有极大 M-正则序列长度一致且就是 $\inf\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Ext}^i_R(R/I, M)\}$. 如果 $IM = M$, 那么对所有的自然数 i 有 $\mathrm{Ext}^i_R(R/I, M) = 0$. 称 $\inf\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Ext}^i_R(R/I, M)\}$ 为 **I 在 M 上的级**, 记作 $\mathrm{grade}(I, M)$.

当 $(R, \mathfrak{m})$ 是交换 Noether 局部环, M 是有限生成 R-模. 将 $\mathrm{grade}(\mathfrak{m}, M)$ 称为 M 的**深度**, 记作 $\mathrm{depth}M$. 因此 [定理1.15] 也说明对交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 上的有限生成模 M, $\mathrm{depth}M = \inf\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M)\}$. 一般地, 对交换 Noether 局部环 R 上有限生成模 M, 总有 $\mathrm{depth}_R M \leq \mathrm{k.dim}M$. 当等号成立时, 称 M 是 **Cohen-Macaulay R-模**. 如果 Cohen-Macaulay R-模 M 进一步满足 $\mathrm{depth}_R M = \mathrm{k.dim}M = \mathrm{k.dim}R$, 称 M 是**极大 Cohen-Macaulay 模**. 当交换 Noether 局部环 R 满足是自身上 Cohen-Macaulay 模时, 称 R 是 **Cohen-Macaulay 环**. 如果交换 Noether 环 R 上有限生成模 M 满足对任何 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Supp}M$, $M_\mathfrak{m}$ 作为 $R_\mathfrak{m}$-模是 Cohen-Macaulay 模, 称 M 是 **Cohen-Macaulay 模**. 如果交换 Noether 环 R 满足是自身上 Cohen-Macaulay 模, 称 R 是 **Cohen-Macaulay 环**. 自内射维数有限的交换 Noether 局部环被称为 **Gorenstein 局部环**.

注意 $\mathrm{inj.dim}_R M = \sup\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M)\}$. 回忆 Bass 公式说当 M 是交换 Noether 局部环 R 上内射维数有限的非零有限生成模时, 总有 $\mathrm{k.dim}M \leq \mathrm{inj.dim}_R M = \mathrm{depth}R$. 特别地, 当 R 是 Gorenstein 局部环时,

$$\mathrm{k.dim}R = \mathrm{inj.dim}_R R = \mathrm{depth}R.$$

这说明 Gorenstein 局部环是 Cohen-Macaulay 局部环. 且若记 $d = \mathrm{k.dim}R$, 那么 $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, R) = 0, \forall i \neq d$, 且能够证明 $\mathrm{Ext}^d_R(R/\mathfrak{m}, R)$ 的 $R/\mathfrak{m}$-线性维数为 1. 如果交换 Noether 环 R 满足对任何极大理想 $\mathfrak{m}$, $R_\mathfrak{m}$ 是 Gorenstein 局部环, 则称 R 是 **Gorenstein 环**. 故 Gorenstein 环是 Cohen-Macaulay 环.

Lemma 1.16 ([Eis95])**.** 设 R 是含幺交换环, M, N 是 R-模, M 是有限表现 R-模. 那么对任何交换 R-代数 S, 只要 S 是平坦 R-模, 标准 R-模同态 $\alpha_M : S \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R M, S \otimes_R N) : s \otimes \varphi \mapsto s \otimes \varphi$ 是 S-模同构. 特别地, 当 S 是平坦 R-模时, 对任何交换环 R 上伪凝聚模 M 和任何 R-模 N, 有 S-模同构

$$\mathrm{Ext}^i_S(S \otimes_R M, S \otimes_R N) \cong S \otimes_R \mathrm{Ext}^i_R(M, N), \forall i \in \mathbb{N}.$$

Proof. 首先 α_M 明显是定义合理的 S-模同态并且 α_M 关于变量 M 是自然的. 当 $M=R$ 时, α_R 是同构, 所以由张量积和 Hom 函子保持有限直和得到对任何有限生成自由 R-模 F 有 α_F 是同构.

现在任取 M 作为 R-模的有限表现 $R^m\longrightarrow R^n\longrightarrow M\longrightarrow 0$, 由 $\mathrm{Hom}_S(-,S\otimes_R N),\mathrm{Hom}_R(-,N)$ 是左正合函子, $S\otimes_R -$ 是正合函子, 得到 S-模正合列

$$0\longrightarrow S\otimes_R \mathrm{Hom}_R(M,N)\longrightarrow S\otimes_R \mathrm{Hom}_R(R^n,N)\longrightarrow S\otimes_R \mathrm{Hom}_R(R^m,N),$$

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_S(S\otimes_R M,S\otimes_R N)\longrightarrow \mathrm{Hom}_S(S\otimes_R R^n,S\otimes_R N)\longrightarrow \mathrm{Hom}_S(S\otimes_R R^m,S\otimes_R N).$$

于是我们得到下述 S-模交换图, 其中上下两行正合:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S\otimes_R \mathrm{Hom}_R(M,N) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_M"] & S\otimes_R \mathrm{Hom}_R(R^n,N) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{R^n}"] & S\otimes_R \mathrm{Hom}_R(R^m,N) \arrow[d, "\alpha_{R^m}"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_S(S\otimes_R M,S\otimes_R N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_S(S\otimes_R R^n,S\otimes_R N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_S(S\otimes_R R^m,S\otimes_R N)
\end{tikzcd}$$

根据前面的讨论, 上图最右边两个竖直方向上的映射是同构, 应用五引理便得 α_M 也是同构.

现在设 M 是伪凝聚 R-模, 即 M 作为 R-模有有限生成投射分解

$$\cdots\longrightarrow P_2\xrightarrow{d_2}P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon}M\longrightarrow 0,$$

这里每个 P_i 是有限生成投射 R-模. 由 $S\otimes_R -$ 是正合函子, $S\otimes_R \mathrm{Ext}^i_R(M,N)$ 由下述复形的 i 次同调给出:

$$0\to S\otimes_R \mathrm{Hom}_R(M,N)\xrightarrow{\mathrm{id}_S\otimes\varepsilon^*}S\otimes_R \mathrm{Hom}_R(P_0,N)\xrightarrow{\mathrm{id}_S\otimes d_1^*}S\otimes_R \mathrm{Hom}_R(P_1,N)\to\cdots\to S\otimes_R \mathrm{Hom}_R(P_i,N)\to\cdots$$

于是我们得到下述交换图, 并且竖直方向上的态射都是同构, 即我们得到复形间链同构:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S\otimes_R \mathrm{Hom}_R(M,N) \arrow[r, "\mathrm{id}_S\otimes\varepsilon^*"] \arrow[d, "\alpha_M"] & S\otimes_R \mathrm{Hom}_R(P_0,N) \arrow[r, "\mathrm{id}_S\otimes d_1^*"] \arrow[d, "\alpha_{P_0}"] & \cdots \arrow[r] & S\otimes_R \mathrm{Hom}_R(P_i,N) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{P_i}"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_S(S\otimes_R M,S\otimes_R N) \arrow[r, "(\mathrm{id}_S\otimes\varepsilon)^*"] & \mathrm{Hom}_S(S\otimes_R P_0,S\otimes_R N) \arrow[rr, "(\mathrm{id}_S\otimes d_1)^*"] & & \mathrm{Hom}_S(S\otimes_R P_i,S\otimes_R N) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

于是我们得到对每个自然数 i, 有 S-模同构 $\mathrm{Ext}^i_S(S\otimes_R M,S\otimes_R N)\cong S\otimes_R \mathrm{Ext}^i_R(M,N)$. □

Remark 1.17. 之后我们会应用 [引理1.16] 证明完备化保持交换 Noether 局部环的 Cohen-Macaulay 性质以及 Gorenstein 性质, 反之也成立, 见 [命题2.54].

2 I-adic 完备化

2.1 I-adic 拓扑

回忆带有拓扑的群 G 被称为**拓扑群**, 如果乘法映射 $\mu: G\times G\to G,(g,h)\mapsto gh$ 和求逆映射 $\iota: G\to G, g\mapsto g^{-1}$ 都是连续映射 (其中 $G\times G$ 带有拓扑空间 G 的积拓扑). 如果带有拓扑的环 R 满足 $(R,+)$ 是拓扑群且 R 上乘法映射是连续的, 称 R 是**拓扑环**. 设 R 是拓扑环, M 是左 R-模且带有拓扑使得 $(M,+)$ 是拓扑群, 如果数乘作用 $R\times M\to M,(a,x)\mapsto ax$ 是连续的, 则称 M 是 R 上**拓扑模**. 根据定义, 拓扑环 R 作为自身上左模是拓扑模. 对于拓扑群 G, 任何 $g\in G$ 诱导的左乘变换 $G\to G,x\mapsto gx$ 是连续的: 首先常值映射 $G\to G,x\mapsto g$ 是连续的保证了 $G\to G\times G,x\mapsto(g,x)$, 再由 g 决定的左乘变换是上述映射与 G 上乘法映射的合成得到左乘变换也连续 (类似地, G 中给定元素决定的 G 上右乘变换也是连续的).

Example 2.1. 设 $(A,+)$ 是交换拓扑群, 那么对任何 $a\in A$, a 决定的平移变换 $A\to A,x\mapsto a+x$ 是拓扑同胚. 特别地, $U\subseteq A$ 是 a 的开邻域当且仅当 $U-a$ 是 0 的开邻域.

Lemma 2.2. 设 $(A,+)$ 和 $(B,+)$ 是交换拓扑群, $\varphi: A\to B$ 是群同态. 则 φ 连续当且仅当 φ 在 0 处连续.

Proof. 只需验证充分性: 对任何 $a\in A$ 和 $\varphi(a)$ 的开邻域 V, 有 $V-\varphi(a)$ 是 $\varphi(0)$ 的开邻域, 所以存在 $0\in A$ 的开邻域 $W\subseteq A$ 使得 $\varphi(W)\subseteq V-\varphi(a)$. 于是 $a+W$ 是 a 的开邻域, [例2.1], 且含于 $\varphi^{-1}(V)$. □

设 R 是含幺环, 可通过定义 $F_i=R, i\in\mathbb{N}$, 将 R 视作滤环. 这时左 R-模 M 作为滤环 R 如果有子模降链 $F_0M\supseteq F_1M\supseteq\cdots$, 那么当该子模降链满足 $\cup_{i\in\mathbb{N}}F_iM=M$ 时, M 便成为滤模. 更一般地, 我们在下面的 [引理2.3] 说明只要左 R-模 M 具有子模降链 $F_0M\supseteq F_1M\supseteq\cdots$, 该降链能够自然诱导 M 上拓扑.

Lemma 2.3 ([Jac09])**.** 设左 R-模 M 有子模降链 $F_0M\supseteq F_1M\supseteq\cdots$, 那么集族 $\mathcal{B}=\{x+F_nM|x\in M,n\in\mathbb{N}\}$ 满足 $\mathcal{B}$ 中所有集合之并是 M 且 $\mathcal{B}$ 中任意两个集合 B_1,B_2, 如果有 $x\in B_1\cap B_2$, 那么存在 $x\in B\subseteq B_1\cap B_2$. 因此 M 上存在唯一的拓扑使得该拓扑以 $\mathcal{B}$ 为拓扑基. 这时 $(M,+)$ 是拓扑群.

Proof. 因为 $x\in x+F_nM$, 所以 $\mathcal{B}$ 中所有集合之并是 M. 任取 $\mathcal{B}$ 中集合 $x+F_nM$ 和 $y+F_mM$, 如果这两个集合的交集含有 $z\in M$, 那么 $x-z\in F_nM$ 以及 $y-z\in F_mM$. 这说明 $z+F_{n+m}M\subseteq(x+F_nM)\cap(y+F_mM)$.

由于对任何 $x,y\in M$, 有 $(x+F_nM)+(y+F_nM)=(x+y)+F_nM$, 故 $(M,+)$ 是拓扑群. □

Remark 2.4. 如果左 R-模 M 还有子模降链 $G_0M\supseteq G_1M\supseteq\cdots$, 满足和 $\{F_iM\}_{i\in\mathbb{N}}$ 诱导 M 上相同拓扑, 那么考察 $0\in M$ 的开邻域可得对每个 G_iM, 存在 F_jM 使得 $F_jM\subseteq G_iM$, 类似地, 每个 F_jM 包含某个 G_iM.

Proposition 2.5 (I-adic 拓扑, [Jac09])**.** 设 R 是含幺环, I 是理想, M 是左 R-模. 则由 R 的降滤 $R\supseteq I\supseteq I^2\supseteq\cdots$ 和 M 的降滤 $M\supseteq IM\supseteq I^2M\supseteq\cdots$ 在 [引理2.3] 下诱导的 R 和 M 上拓扑使得 R 成为拓扑环, M 成为拓扑环 R 上的拓扑模. 称如上诱导的 R 和 M 上的拓扑为 ***I*-adic 拓扑**.

Proof. 根据 [引理2.3], R 的理想降链 $R\supseteq I\supseteq I^2\supseteq\cdots$ 和 M 的子模降链 $M\supseteq IM\supseteq I^2M\supseteq\cdots$ 诱导的拓扑使得 $(R,+)$ 和 $(M,+)$ 都是拓扑群. 任取 $a,b\in R$, 有 $(a+I^n)(b+I^n)\subseteq ab+I^n$, 所以 R 是拓扑环. 类似地, 对任何 $a\in R$ 和 $x\in M$, 由 $(a+I^n)(x+I^nM)\subseteq ax+I^nM$ 得到 M 是拓扑模. □

Example 2.6. 固定含幺环 R. 如果取 $I=0$, 那么 R 的任何单点子集是开集 (根据 [引理2.3] 的构造), 于是 R 上 0-adic 拓扑给出 R 上离散拓扑. 如果取 $I=R$, 那么 R 上 R-adic 拓扑给出平凡拓扑.

Proposition 2.7 (I-adic 拓扑的分离性刻画, [Jac09])**.** 设 R 是含幺环, I 是理想且 M 是左 R-模. 那么 M 的 I-adic 拓扑是 Hausdorff 的当且仅当 $\cap_{n=0}^{\infty} I^n M = 0$(也称为“分离性条件”). 特别地, 当 R 是交换 Noether 环, M 是有限生成 R-模且 J 是 R 的 Jacobson 根时, [注记1.9] 说明 M 上的 J-adic 拓扑是 Hausdorff 的.

Proof. 必要性: 如果 $\cap_{n=0}^{\infty} I^n M \neq 0$, 取 $x \neq 0 \in \cap_{n=0}^{\infty} I^n M$, 那么根据 I-adic 拓扑的定义, 任何 M 的非空开子集含有 x, 这和 M 关于 I-adic 拓扑是 Hausdorff 空间矛盾.

充分性: 任取 $x, y \in M$ 满足 $x \neq y$, 那么存在自然数 ℓ 使得 $x - y \notin I^\ell M$. 所以 $x + I^\ell M$ 和 $y + I^\ell M$ 作为不同的陪集不相交, 它们给出分离 x 和 y 的开子集. □

Example 2.8. 设 M 是交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 上有限生成模. 则 M 上 $\mathfrak{m}$-adic 拓扑是 Hausdorff 的.

下面我们将说明当 R 和左 R-模 M 关于 R 的理想 I 诱导的 I-adic 拓扑都是 Hausdorff 空间时, I-adic 拓扑可度量化, [命题2.11]. 首先容易验证下述 [命题2.9].

Proposition 2.9 ([Jac09])**.** 设含幺环 R, 理想 I 和左 R-模 M 满足 $\cap_{n=0}^{\infty} I^n = 0, \cap_{n=0}^{\infty} I^n M = 0$. 对每个 $x \neq 0 \in M$, 存在最大自然数 n_0 使得 $x \in I^{n_0} M$, 称 n_0 是 x 的**阶**, 记作 $o(x)$. 约定 $o(0) = +\infty$. 取 $M = R$, 便得到 R 中元素阶的定义. 对任何 $x \in M$, 记 $|x| = 2^{-o(x)}$(对 R 中元素也有相应定义). 那么:
(1) 对任何 $a \in R$ 和 $x, y \in M$, 有 $o(x) = -o(x), o(x+y) \geq \min\{o(x), o(y)\}, o(ax) \geq o(a) + o(x)$.
(2) 对任何 $x \in M$, 有 $|x| \geq 0, |-x| = |x|$ 且 $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(3) 对任何 $x, y \in M$ 有 $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\} \leq |x| + |y|$.
(4) 对任何 $a \in R$ 和 $x \in M$ 有 $|ax| \leq |a||x|$.

Remark 2.10. 一般地, 如果左 R-模 M 有子模降滤 $M = F_0 M \supseteq F_1 M \supseteq \cdots$ 满足 $\cap_{n=0}^{\infty} F_n M = 0$, 那么 [引理2.3] 意义下由 $\{F_n M\}_{n=0}^{\infty}$ 诱导的 M 上拓扑同样可对元素定义阶的概念: 即每个 $x \neq 0 \in M$, $o(x)$ 表示包含 x 的 $F_n M$ 的最大指标 n. 约定 $o(0) = +\infty$, 可同样引入记号 $|x|$ 表示 $2^{-o(x)}$. 于是对任何 $x, y \in M$, 也有 $o(x) = -o(x), o(x+y) \geq \min\{o(x), o(y)\}$ 并且 $|x| = 0$ 当且仅当 $x = 0$. 于是通过定义 $d : M \times M \to M, (x, y) \mapsto |x - y|$, 得到 M 上度量.

Proposition 2.11 (I-adic 拓扑的度量化, [Jac09])**.** 设含幺环 R, 有理想 I 以及左 R-模 M 满足 $\cap_{n=0}^{\infty} I^n = 0, \cap_{n=0}^{\infty} I^n M = 0$, 并保持 [命题2.9] 中的记号. 对任何 $x, y \in M$, 定义 $d(x, y) = |x - y|$. 那么 $d : M \times M \to M$ 定义了 M 上度量且诱导的度量拓扑就是 M 上的 I-adic 拓扑.

Proof. 根据 [命题2.9(2)(3)], $d : M \times M \to M$ 定义了 M 上度量. 对 $x \in M$ 和正实数 α, 用 $B_\alpha(x)$ 表示以 y 为中心, α 为半径的关于度量 d 的开球. 要证明 d 诱导的度量拓扑就是 I-adic 拓扑, 我们需要验证: (1) 对任何 $x + I^n M$ 和 $y \in x + I^n M$, 存在开球 $B_\varepsilon(y) \subseteq x + I^n M$; (2) 对任何开球 $B_\alpha(x)$ 和 $y \in B_\alpha(x)$, 存在正整数 n 使得 $y + I^n M \subseteq B_\alpha(x)$. 先任取 $y \in x + I^n M$, 那么对 $z \in y + I^{n+1} M$ 有 $o(z, y) \geq n + 1$, 所以 $d(z, y) \leq 1/2^{n+1}, \forall z \in y + I^{n+1} M \subseteq x + I^n M$. 这说明只要取 $0 < \varepsilon < 1/2^{n+1}$, 那么 $z \in B_\varepsilon(y)$ 满足 $o(z - y) \geq n + 1$, 这保证 $z \in x + I^n M$. 于是 $B_\varepsilon(y) \subseteq x + I^n M$. 反之, 对任何开球 $B_\alpha(x)$ 和 $y \in B_\alpha(x)$, 如果 $x = y$, 那么可选取正整数 n 使得 $1/2^n < \alpha$, 于是 $z \in y + I^n M$ 满足 $o(z, x) \geq 2^n$, 所以 $d(z, x) < \alpha$, 这说明 $y + I^n M \subseteq B_\alpha(x)$. 下设 $x \neq y$. 取正整数 n 满足 $n > \log_2(1/\min\{|x - y|, \alpha - |x - y|\})$, 那么对 $z \in y + I^n M$, 有 $o(z, y) \geq n$, 于是 $d(z, y) < \min\{|x - y|, \alpha - |x - y|\}$, 那么 $d(z, x) < \alpha$ 说明 $y + I^n M \subseteq B_\alpha(x)$. □

Remark 2.12. 设左 R-模 M 有子模降滤 $M = F_0M \supseteq F_1M \supseteq \cdots$ 满足 $\cap_{n=0}^{\infty} F_nM = 0$. 在 [注记2.10] 中我们看到可同样定义出 M 上度量, 并且重复 [命题2.11] 的证明过程可知 [注记2.10] 中定义的 M 上度量诱导的拓扑就是降滤 $\{F_nM\}_{n=0}^{\infty}$ 产生的 M 上拓扑. 所以只要 M 有子模降滤 $M = F_0M \supseteq F_1M \supseteq \cdots$ 满足 $\cap_{n=0}^{\infty} F_nM = 0$, 由 $\{F_nM\}_{n=0}^{\infty}$ 在 [引理2.3] 意义下给出的 M 上拓扑可度量化, 这是 [命题2.11] 的推广.

Example 2.13. 设 A 是含幺环, $R = A[[x]]$ 是形式幂级数环, $I = (x)$. 那么 $I^n = (x^n)$ 并且 $\cap_{n=0}^{\infty} I^n = 0$. 这时 $o(f(x))$ 就是形式幂级数 $f(x)$ 所有非零系数的项中次数最小项的次数.

Example 2.14. 设 M 是交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 上有限生成模. 则 M 上 $\mathfrak{m}$-adic 拓扑可度量化.

回忆度量空间 (M, d) 被称为**完备度量空间**, 如果 M 中任何 Cauchy 列收敛. 下面我们说明 R 的 I-adic 拓扑在 Hausdorff 的前提下, 未必是完备的 (也见 [例2.32]).

Proposition 2.15 ([Jac09])**.** 设 R 是含幺环, 有理想 I, 记 J 是 R 的 Jacobson 根, 并设 R 的 I-adic 拓扑是 Hausdorff 的 (那么可度量化, [命题2.11]). 如果 R 关于 I-adic 拓扑完备, 那么 $I \subseteq J$.

Proof. 任取 $b \in I$, 那么 $\{b^n\}_{n=0}^{\infty}$ 收敛于零并且 $\{1+b+b^2+\cdots+b^n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 Cauchy 列. 因此 $1+b+b^2+\cdots \in R$ 存在且为 $1-b$ 的逆元, 由此得到 $b \in J$. $\square$

如果交换环 R 的理想 I 满足 R 上 I-adic 拓扑是分离且完备的, 那么 R/I 具有幂等元提升性质.

Proposition 2.16 ([Jac09])**.** 设 R 是交换环, I 是 R 的理想满足 R 上 I-adic 拓扑是 Hausdorff 的. 如果 R 上的 I-adic 拓扑是完备的, 那么对 R/I 的任何幂等元 $u+I$, 存在 R 的幂等元 e 使得 $e+I = u+I$.

Proof. 对每个正整数 n, 下面的 [引理2.17] 保证了 $(R/I^n)/(I/I^n)$ 中的幂等元 $\overline{u} + (I/I^n)$ 能够唯一地提升为幂等元 $e_n + I^n$(注意 I/I^n 是 R/I^n 的幂零理想). 那么有 $e_n - u \in I$ 以及 $e_n^2 - e_n \in I^n$. 根据提升的唯一性, 得到对任何正整数 n 和自然数 k 有 $e_n + I^n = e_{n+k} + I^n$, 由此得到 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列. 那么由 R 上的 I-adic 拓扑完备, 得到存在 $e \in R$ 使得 $e_n \to e(n \to +\infty)$. 特别地, $e^2 - e \in \cap_{n=0}^{\infty} I^n$ 得到 e 是 R 中幂等元. 此外, 对任何自然数 k, 存在正整数 N_k 使得 $e_n - e \in I^k, \forall n \geq N_k$. 取 $k=1$ 以及由 $e_n - u \in I$ 得到 $e - u \in I$. $\square$

Lemma 2.17 ([Jac09])**.** 设 R 是含幺环, N 是 R 的诣零理想, 如果 $u + N \in R/N$ 是幂等元, 那么存在 R 的幂等元 e 使得 $e + N = u + N$. 如果进一步 R 是交换的, 满足 $e+N = u+N$ 的幂等元 e 唯一.

Proof. 现在 $u - u^2 \in N$ 是幂零元, 所以存在正整数 n 使得 $(u-u^2)^n = 0$. 并记 $v = 1-u$, 则 $u^n v^n = 0$. 考察

$$1 = (u+v)^{2n-1} = \sum_{i=0}^{2n-1} C_{2n-1}^i u^{2n-1-i} v^i = \sum_{i=0}^{n-1} C_{2n-1}^i u^{2n-1-i} v^i + \sum_{i=n}^{2n-1} C_{2n-1}^i u^{2n-1-i} v^i,$$

记 $e = \sum_{i=0}^{n-1} C_{2n-1}^i u^{2n-1-i} v^i, f = \sum_{i=n}^{2n-1} C_{2n-1}^i u^{2n-1-i} v^i$, 则 $e+f=1, ef=fe=0$, 所以 e 是 R 中幂等元.

易见 $e - u^{2n-1} \in N$. 所以 $e + N = u^{2n-1} + N = u + N$. 最后证明当 R 交换时, $u+N$ 的幂等元提升唯一. 现在设 R 是交换环, 那么对任何形如 $e+z$ 的幂等元, 这里 $z \in N$, 我们说明必定有 $z = 0$ 来完成证明. 由于 $e+z$ 是 R 中幂等元, 所以由 $(e+z)^2 = e+z$ 得到 $(1-2e)z = z^2$. 归纳地可证对任何正整数 n 有 $(1-2e)^n z = z^{n+1}$. 由于 $(1-2e)^2 = 1$, 所以 $z(1-z^2) = 0$. 通过 z 是幂零元得到 $1-z^2$ 可逆, 因此 $z = 0$. $\square$

2.2 I-adic 完备化

现在设 R 是含幺环, 有理想 I 和左 R-模满足 $\cap_{n=0}^{\infty}I^n = 0, \cap_{n=0}^{\infty}I^nM = 0$. 记 $C(M)$ 是 M 中所有 Cauchy 列构成的集合, 那么根据 [命题2.9(4)], $C(M)$ 上有自然的 R-模结构. 将 $C(M)$ 中所有收敛于零的 Cauchy 列构成的集合记作 $N(M)$, 那么 $N(M)$ 是 $C(M)$ 的 R-子模. 引入记号 $\widehat{M} = C(M)/N(M)$ 和 $\widehat{R} = C(R)/N(R)$. 我们说明 $\widehat{R}$ 有自然的含幺环结构并且 $\widehat{M}$ 可自然视作左 $\widehat{R}$-模. 利用 Cauchy 列总是有界数列, 容易验证对任何 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in C(R)$ 和 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in C(M)$, 有 $\{a_nx_n\}_{n=0}^{\infty} \in C(M)$ 并且当进一步有 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in N(R)$ 或 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in N(M)$ 时, $\{a_nx_n\}_{n=0}^{\infty} \in N(M)$. 因此 $\widehat{R}$ 有标准环结构, 且 $\widehat{M}$ 可视作左 $\widehat{R}$-模.

将上述构造的环 $\widehat{R}$ 和模 $\widehat{M}$ 分别称为 R 和 M 的 **I-adic 完备化**. 并且当 R 交换时, $\widehat{R}$ 也是交换环. 之后我们将说明当 R 是交换 Noether 环时, $\widehat{R}$ 也是交换 Noether 环, [定理2.43].

Example 2.18. 设 p 是素数, 整数环 $\mathbb{Z}$ 关于素理想 $p\mathbb{Z}$ 的 $p\mathbb{Z}$-adic 完备化 $\mathbb{Z}_p$ 被称为 **p-adic 整数环**.

由 [注记2.4], 如果左 R-模 M 有子模降链 $\{F_kM\}_{k=0}^{\infty}$ 和 $\{I^kM\}_{k=0}^{\infty}$ 诱导 M 上相同拓扑, 那么 $\cap_{n=0}^{\infty}I^nM = 0$ 当且仅当 $\cap_{n=0}^{\infty}F_nM = 0$. 并且这时 M 上序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 在 $\{I^kM\}_{k=0}^{\infty}$ 下是 Cauchy 列当且仅当 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 在 $\{F_kM\}_{k=0}^{\infty}$ 下是 Cauchy 列. 这说明 $\widehat{R}$ 和 $\widehat{M}$ 也可以用与 $\{I^k\}_{k=0}^{\infty}, \{I^kM\}_{k=0}^{\infty}$ 导出相同拓扑的降滤来定义. 例如, 对赋予 Hausdorff 的 I-adic 拓扑的左 R-模 M, 任何子模 X 带有标准降滤 $X \supseteq IX \supseteq I^2X \supseteq \cdots$ 以及

$$X \supseteq X \cap IM \supseteq X \cap I^2M \supseteq,$$

我们将在 [引理2.22] 使用 Artin-Rees 引理证明这两个降滤导出 X 上相同拓扑.

根据 [例2.14], 我们看到要求 R 和 M 满足 I-adic 拓扑 Hausdorff 在交换局部环情形自动满足:

Example 2.19. 设 M 是交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 上有限生成模, 那么 $\mathfrak{m}$-adic 完备化 $\widehat{R}$ 和 $\widehat{M}$ 存在.

Lemma 2.20 ([Jac09]). 设 R 是含幺环, 有理想 I 以及左 R-模 M 满足 $\cap_{n=0}^{\infty}I^n = 0, \cap_{n=0}^{\infty}I^nM = 0$. 那么标准映射 $R \to \widehat{R}, a \mapsto \{a\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $M \to \widehat{M}, x \mapsto \{x\}_{n=0}^{\infty}$ 是单加群同态, 且前者是单环同态.

Proof. 如果 $x \in M$ 满足 $\{x\}_{n=0}^{\infty} \in N(M)$, 那么由 x 是 $\{x\}_{n=0}^{\infty}$ 的极限得到 $x = 0$. □

Remark 2.21. 保持 [引理2.20] 的假设和记号, 记标准映射 $\mathrm{j}_X : X \to \widehat{X}$. 对任何左 R-模同态 $f : X \to Y$, 我们定义 $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ 满足将每个 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} + N(X) \in \widehat{X}$ 映至 $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty} + N(Y)$. 先说明这是定义合理的映射: 如果 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in N(X)$, 那么对任何自然数 k, 存在正整数 N_k 使得 $x_n \in I^kX, \forall n \geq N_k$. 于是也有 $f(x_n) \in I^kY, \forall n \geq N_k$. 类似地, 易验证当 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in C(X)$ 时, $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty} \in C(Y)$. 所以 $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ 作为映射定义合理, 这明显也是左 R-模同态. 考虑 X 和 Y 上的 I-adic 拓扑, 那么易知左 R-模同态 $f : X \to Y$ 是连续的. 易见我们有下述交换图:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{j}_X"] \arrow[d, "f"'] & \widehat{X} \arrow[d, "\widehat{f}"] \\ Y \arrow[r, "\mathrm{j}_Y"] & \widehat{Y} \end{tikzcd}$$

Lemma 2.22 ([Jac09]). 设 R 是交换 Noether 环, M 是有限生成 R-模且 I 是 R 的理想满足 M 和 R 上 I-adic 拓扑都是 Hausdorff 的. 那么对 M 的任何子模 X, 标准嵌入 $\iota : X \to M$ 诱导的 $\widehat{\iota} : \widehat{X} \to \widehat{M}$ 是单射. 并且 X 上的 I-adic 拓扑就是 M 上 I-adic 拓扑诱导的 X 上子空间拓扑.

Proof. 因为 X 是 M 的子模, 所以 X 上的 I-adic 拓扑也是 Hausdorff 的. 下面我们用 Artin-Rees 引理来说明 X 上任何 Cauchy 列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in C(X)$ 如果在 $N(M)$ 中, 则也在 $N(X)$ 中. 首先 [注记1.7] 说明存在正整数 k_0 使得对任何 $n \geq k_0$, 有 $I^n M \cap X \subseteq I^{n-k_0}X$. 现在 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in N(M)$ 说明对任何自然数 k, 存在正整数 N_k, 使得当 $\ell \geq N_k$ 时 $x_\ell \in I^{k+k_0}M$. 于是 $x_\ell \in I^k X, \forall \ell \geq N_k$. 因此 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in N(X)$, 故 $\widehat{\iota}$ 是单射.

对任何自然数 k 和 $x \in X$, 总有 $x + I^k X \subseteq x + (I^k M \cap X)$. 因此 X 赋予 M 上 I-adic 拓扑的子空间拓扑后的开子集总是 X 上 I-adic 拓扑中的开子集. 反之, 根据 Artin-Rees 引理, 总存在正整数 k_0 满足对任何 $n \geq k_0$ 有 $I^n M \cap X = I^{n-k_0}(I^{k_0}M \cap X)$. 因此对 $x \in X$ 和自然数 ℓ, $x + (I^{\ell+k_0}M \cap X) \subseteq x + I^\ell X$, 这说明 X 在 I-adic 拓扑下的开子集也是 X 赋予 M 上 I-adic 拓扑的子空间拓扑下的开子集. □

依然设 M 是 R 上有限生成左 R-模, I 是 R 的理想满足 R 和 M 上 I-adic 拓扑都是 Hausdorff 的, [命题2.7]. 定义 $\widehat{I}$ 是 $\widehat{R}$ 中所有陪集代表元可选为每项都在 I 中的 Cauchy 列的陪集构成的子集, 那么 $\widehat{I}$ 是 $\widehat{R}$ 的理想. 对每个自然数 k, 总有 $\widehat{I}^k \subseteq \widehat{I^k}$(当 R 是交换 Noether 环时, 我们将说明 $\widehat{I}^k = \widehat{I^k}$, 见 [命题2.33]). 对每个自然数 k, 也记 $F_k\widehat{M}$ 是 $\widehat{M}$ 中所有陪集代表元可选为每项都在 $I^k M$ 中的 Cauchy 列的陪集构成的子集, 那么 $F_k\widehat{M}$ 是 $\widehat{M}$ 的左 $\widehat{R}$-子模. 当 $M = R$ 时, $F_k\widehat{R} = \widehat{I^k}$. 我们得到 $\widehat{R}$ 的降滤 $\widehat{R} \supseteq \widehat{I} \supseteq \widehat{I^2} \supseteq \cdots$ 以及 $\widehat{M}$ 作为左 $\widehat{R}$-模的子模降滤 $\widehat{M} = F_0\widehat{M} \supseteq F_1\widehat{M} \supseteq$. 根据 [引理2.3], $\widehat{R}$ 的理想降滤 $\{\widehat{I^k}\}_{k=0}^{\infty}$ 和 $\widehat{M}$ 的 $\widehat{R}$-子模降滤 $\{F_k\widehat{M}\}_{k=0}^{\infty}$ 分别诱导 $\widehat{R}$ 和 $\widehat{M}$ 上拓扑 (事实上, 当 M 是交换 Noether 环 R 上有限生成模时, 我们能够证明这就是 $\widehat{I}$-adic 拓扑, 见 [注记2.34]). 那么对任何自然数 k, [引理2.20] 中的标准嵌入 $R \to \widehat{R}$ 将 I^k 映至 $\widehat{I^k}$; $M \to \widehat{M}$ 将 $I^k M$ 映至 $F_k\widehat{M}$, 所以标准嵌入 $\mathrm{j}_R : R \to \widehat{R}$ 和 $\mathrm{j}_M : M \to \widehat{M}$ 都是单的连续映射, [引理2.2]. 分别赋予 $\mathrm{j}_R(R)$ 和 $\mathrm{j}_M(M)$ 空间 $\widehat{R}$ 和 $\widehat{M}$ 的子空间拓扑, 那么 $\mathrm{j}_R(R)$ 和 $\mathrm{j}_M(M)$ 关于各自加法运算构成拓扑群. 于是利用 [引理2.2] 知 R 和 $\mathrm{j}_R(R)$ 同胚, M 和 $\mathrm{j}_M(M)$ 同胚. 我们有

Lemma 2.23 ([Jac09])**.** 设 R 是含幺环, M 是有限生成左 R-模, I 是 R 的理想满足 R 和 M 上 I-adic 拓扑都是 Hausdorff 的. 并设 $\widehat{R}$ 和 $\widehat{M}$ 分别是 R 和 M 的 I-adic 完备化, 并赋予前述 $\widehat{R}$ 的理想降滤 $\{\widehat{I^k}\}_{k=0}^{\infty}$ 和 $\widehat{M}$ 的 $\widehat{R}$-子模降滤 $\{F_k\widehat{M}\}_{k=0}^{\infty}$ 由 [引理2.3] 诱导的拓扑. 那么:
(1) $\cap_{n=0}^{\infty} F_n\widehat{M} = 0$ 以及 $\cap_{n=0}^{\infty}\widehat{I^n} = 0$, 并且 $\widehat{M}$ 和 $\widehat{R}$ 上拓扑可度量化.
(2) 考虑 [引理2.20] 的标准嵌入 $\mathrm{j}_R : R \to \widehat{R}$ 和 $\mathrm{j}_M : M \to \widehat{M}$(这可将 R 和 M 分别等同视作 $\widehat{R}$ 和 $\widehat{M}$ 的子集), 那么对每个自然数 k, 有 $F_k\widehat{M} \cap \mathrm{j}_M(M) = \mathrm{j}_M(I^k M)$. 特别地, 当 $M = R$ 时, 得到 $\widehat{I^k} \cap \mathrm{j}_R(R) = \mathrm{j}_R(I^k)$.
(3) 考虑 [引理2.20] 的标准嵌入 $\mathrm{j}_M : M \to \widehat{M}$, 则 $\mathrm{j}_M(M)$ 在 $\widehat{M}$ 中稠密. 特别地, 如果 M 上的 I-adic 拓扑是完备的, 那么 $\mathrm{j}_M : M \to \widehat{M}$ 是同构. 所以当 R 上的 I-adic 拓扑完备时, j_R 给出环同构 $R \cong \widehat{R}$.
(4) 左 $\widehat{R}$-模 $\widehat{M}$ 关于子模降滤 $\{F_k\widehat{M}\}_{k=0}^{\infty}$ 诱导的拓扑完备. 特别地, $\widehat{R}$ 关于 $\{\widehat{I^k}\}_{k=0}^{\infty}$ 诱导的拓扑完备.

Proof. (1) 如果 Cauchy 列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in C(M)$ 满足对任何自然数 k, 存在每项都在 $I^k M$ 中的 Cauchy 列 $\{y_n^k\}_{n=0}^{\infty} \in C(M)$ 使得 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} - \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in N(M)$, 那么这说明对任何自然数 k, 存在正整数 N_k(可不妨设 $N_k \geq k$), 使得对任何 $n \geq N_k$ 有 $x_n - y_n \in I^k M$. 结合 $N_k \geq k$, 可知 $n \geq N_k$ 时, $y_n \in I^k M$, 因此 $x_n \in I^k M, \forall n \geq N_k$. 至此我们得到对任何自然数 k, 存在正整数 $N_k \geq k$ 使得 $|x_n| \leq 2^{-k}, \forall n \geq N_k$. 于是 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in N(M)$. 所以 $\cap_{k=0}^{\infty} F_k\widehat{M} = 0$. 当 $M = R$ 时, 得到 $\cap_{k=0}^{\infty}\widehat{I^k} = 0$. 再应用 [注记2.12] 即可.

(2) 固定自然数 k, 总有 $\mathrm{j}_M(I^k M) \subseteq F_k\widehat{M} \cap \mathrm{j}_M(M)$. 如果 $x \in M$ 满足存在每项都在 $I^k M$ 中的 Cauchy 列 $\{y_n^k\}_{n=0}^{\infty} \in C(M)$ 使得 $\{x\}_{n=0}^{\infty} - \{y_n^k\}_{n=0}^{\infty} \in N(M)$. 所以存在正整数 $N_k \geq k$ 使得当 $n \geq N_k$ 时, $x - y_n^k \in I^k M$. 这说明 $x \in I^k M$, 由此得到 $\mathrm{j}_M(I^k M) = F_k\widehat{M} \cap \mathrm{j}_M(M)$. 取 $M = R$ 得到 $\widehat{I^k} \cap \mathrm{j}_R(R) = \mathrm{j}_R(I^k)$.

(3) 我们通过说明任何 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}+N(M)\in\widehat{M}$, 都是 $\mathrm{j}_M(M)$ 中某个点列的极限来得到 $\mathrm{j}_M(M)$ 在 $\widehat{M}$ 中稠密. 事实上, 对每个自然数 k, 定义 $X_k=\{x_k\}_{n=0}^{\infty}+N(M)$ 为 $\mathrm{j}_M(M)$ 中点, 那么由 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\in C(M)$, 对任何自然数 t, 存在正整数 N_t 使得当 $n,m\geq N_t$ 时, $x_n-x_m\in I^tM$. 于是对任何自然数 t, 当 $m\geq N_t$ 时, $(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}+N(M))-X_m$ 有陪集代表元除前有限项外, 均在 I^tM 中, 进而 $(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}+N(M))-X_m\in F_t\widehat{M}$. 于是得到对任何自然数 t, 存在正整数 N_t 使得只要 $m\geq N_t$, 就有 $|(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}+N(M))-X_m|\leq 2^{-t}$, 这说明 $\{X_m\}_{m=0}^{\infty}\subseteq \mathrm{j}_M(M)$ 收敛且极限为 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}+N(M)$. 因此 $\mathrm{j}_M(M)$ 在 $\widehat{M}$ 中稠密.

如果 M 上的 I-adic 拓扑完备, 那么 M 中 Cauchy 列都收敛. 而 $\mathrm{j}_M:M\to\widehat{M}$ 满足 $|x-y|=|\mathrm{j}_M(x)-\mathrm{j}_M(y)|$ 对任何 $x,y\in M$ 成立. 因此, 对任何 $\widehat{x}\in\widehat{M}$, 我们已经看到存在 M 中点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 使得 $\{\mathrm{j}_M(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 $\widehat{x}$, 这迫使 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 Cauchy 列. 于是若设 $x_n\to x(n\to+\infty)$, 则有 $\mathrm{j}_M(x_n)\to\mathrm{j}_M(x)(n\to+\infty)$. 由极限的唯一性, 我们得到 $\widehat{x}\in\mathrm{Im}\mathrm{j}_M$, 所以 j_M 是满射. 再结合 [引理2.20] 得到 j_M 是双射.

(4) 根据 (1), $\widehat{M}$ 关于子模降滤 $\{F_k\widehat{M}\}_{k=0}^{\infty}$ 诱导的拓扑可度量化. 为叙述方便, 把 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}+N(M)\in\widehat{M}$ 记作 $\overline{\{x_n\}_{n=0}^{\infty}}$. 给定 $\widehat{M}$ 中 Cauchy 列 $\{X_m\}_{m=0}^{\infty}$, 这里 $X_m=\overline{\{x_k^m\}_{k=0}^{\infty}}\in\widehat{M}$. 那么对任何自然数 k, 存在正整数 N_k(不妨设 $N_k\geq k$) 使得对任何自然数指标 n,m, 只要 $n,m\geq N_k$, 就有 $|X_m-X_n|\leq 2^{-k}$, 即 $\overline{\{x_\ell^m\}_{\ell=0}^{\infty}}-\overline{\{x_\ell^n\}_{\ell=0}^{\infty}}\in F_k\widehat{M}$. 而 (3) 说明对每个自然数 k, 可选取 $x^k\in M$ 使得 $X_k-\overline{\{x^k\}_{\ell=0}^{\infty}}\in F_k\widehat{M}$, 因此当 $n,m\geq N_k$ 时, $\overline{\{x^m\}_{\ell=0}^{\infty}}-\overline{\{x^n\}_{\ell=0}^{\infty}}$ 也在 $F_k\widehat{M}$ 中. 现在对每个自然数 k, 有正整数 N_k 使得当 $n,m\geq N_k$ 时, 我们有 $x^n-x^m\in I^kM$. 于是 $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ 是 M 中 Cauchy 列. 故 $\overline{\{x^\ell\}_{\ell=0}^{\infty}}\in\widehat{M}$. 最后说明 Cauchy 列 $\{X_m\}_{m=0}^{\infty}$ 收敛于 $\overline{\{x^\ell\}_{\ell=0}^{\infty}}$ 来完成证明. 由于 $\{x^\ell\}_{\ell=0}^{\infty}$ 是 M 中 Cauchy 列, 所以对每个自然数 k, 存在正整数 L_k 使得当 $\ell_1,\ell_2\geq L_k$ 时, $x^{\ell_1}-x^{\ell_2}\in I^kM$. 所以只要 $m\geq L_k$, 那么当 ℓ 充分大时, 有 $x^\ell-x^m\in I^kM$ 以及 $x_\ell^m-x^m\in I^kM$. 这说明 $m\geq L_k$ 时, 对充分大的 ℓ 有 $x_\ell^m-x_\ell\in I^kM$. 于是当 $m\geq L_k$ 时, $X_m-\overline{\{x^\ell\}_{\ell=0}^{\infty}}\in F_k\widehat{M}$. 总结一下, 对任何自然数 k, 我们得到存在正整数 L_k, 使得当 $m\geq L_k$ 时, $|X_m-\overline{\{x^\ell\}_{\ell=0}^{\infty}}|\leq 2^{-k}$. $\square$

Remark 2.24. 保持 [引理2.23] 的假设和记号, 我们看到当 M 上 I-adic 拓扑完备时, [引理2.20] 意义下的标准映射 j_M 是同构. 反之, 如果 [引理2.20] 中的标准映射 j_M 是同构, 那么根据 $\mathrm{j}_M:M\to\widehat{M}$ 满足 $|x-y|=|\mathrm{j}_M(x)-\mathrm{j}_M(y)|$ 对任何 $x,y\in M$ 成立, 以及 [引理2.23(4)], 可直接验证 M 中任何 Cauchy 列收敛, 即 M 上的 I-adic 拓扑完备. 所以 M 上 I-adic 拓扑完备当且仅当 j_M 是同构.

设左 R-模同态 $f:X\to Y$ 和 R 的理想 I 满足 $\cap_{n=0}^{\infty}I^n=0,\cap_{n=0}^{\infty}I^nX=0,\cap_{n=0}^{\infty}I^nY=0$. 根据 [注记2.21], 有左 R-模同态 $\widehat{f}:\widehat{X}\to\widehat{Y}$, 满足 $\widehat{X}$ 和 $\widehat{Y}$ 赋予 [引理2.23] 中考虑的拓扑后 $\widehat{f}$ 连续且下图交换:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\mathrm{j}_X} & \widehat{X} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{f}} \\ Y & \xrightarrow{\mathrm{j}_Y} & \widehat{Y} \end{array}$$

下面利用 [引理2.23] 说明 $\widehat{f}:\widehat{X}\to\widehat{Y}$ 是左 $\widehat{R}$-模同态. 任取 $\widehat{a}\in\widehat{R}$, 根据 [引理2.23(3)], 有 R 中点列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 使得 $\mathrm{j}_R(a_n)\to\widehat{a}(n\to+\infty)$. 任取 $\widehat{x}\in\widehat{X}$, 有 $\widehat{f}(\mathrm{j}_R(a_n)\widehat{x})=\mathrm{j}_R(a_n)\widehat{f}(\widehat{x})$. 现在由 $\widehat{f}$ 的连续性以及 [注记2.10], 得到 $\widehat{f}(\widehat{a}\widehat{x})=\widehat{a}\widehat{f}(\widehat{x})$. 由此得到 $\widehat{f}:\widehat{X}\to\widehat{Y}$ 是左 $\widehat{R}$-模同态, 称为 f 的**完备化**. 于是当 R 上 I-adic 拓扑 Hausdorff 时, $\widehat{(-)}$ 定义了 R-**Mod** 中所有 I-adic 拓扑是 Hausdorff 的模构成的全子范畴到 $\widehat{R}$-**Mod** 的函子. 例如当 R 是交换 Noether 局部环时, [例2.19] 说明 $\widehat{(-)}$ 能够定义有限生成 R-模范畴到 $\widehat{R}$-**Mod** 的函子.

虽然前面对 R 和 M 的 I-adic 完备化, $\widehat{R}$ 和 $\widehat{M}$, 的构造是具体的, 但下述 [定理2.25] 表明 R 和 M 的 I-adic 完备化可以视作特殊的逆向极限. 进而也可以用逆向极限给出 I-adic 完备化的等价定义, 这种泛性质定

义也反映了 I-adic 完备化只要存在, 便在同构意义下唯一.

Theorem 2.25 (I-adic 完备化的逆向极限描述, [AK21])**.** 设 M 是左 R-模, I 是 R 的理想满足 $\cap_{n=0}^{\infty} I^n = 0, \cap_{n=0}^{\infty} I^n M = 0$. 对任何自然数 $i \leq j$, 有标准满模同态 $\psi_i^j : M/I^j M \to M/I^i M$, 这定义了 R-**Mod** 中的逆向系 $\{M/I^i M, \psi_i^j\}_{\mathbb{N}}$. 对每个自然数 i, 定义 $\alpha_i : \widehat{M} \to M/I^i M, \{x_n\}_{n=0}^{\infty} + N(M) \mapsto x_s + I^i$, 这里指标 s 是满足 $x_k - x_s \in I^i, \forall k \geq s$ 成立的指标 (s 的存在性来自 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 Cauchy 列, α_i 的定义合理性来自 s 的选取). 那么 $\alpha_i : \widehat{M} \to M/I^i M$ 是左 R-模同态, 并且 $(\widehat{M}, \{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}})$ 是逆向系 $\{M/I^i M, \psi_i^j\}_{\mathbb{N}}$ 的逆向极限, 即有左 R-模同构 $\widehat{M} \cong \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} M/I^i M$. 当 $M = R$ 时, 有环同构 $\widehat{R} \cong \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} R/I^i$.

Proof. 对每个指标 $i \in \mathbb{N}$, 易见 $\alpha_i : \widehat{M} \to M/I^i M$ 是定义合理的左 R-模同态 (当 $M = R$ 时, 这也是环同态). 对任何指标 $i \leq j \in \mathbb{N}$, 置 $s \in \mathbb{N}$ 满足 $x_k - x_s \in I^j M, \forall k \geq s$. 那么也有 $x_k - x_s \in I^i M, \forall k \geq s$, 所以 $\psi_i^j \alpha_j = \alpha_i$. 现在任给加群 N 以及加群同态族 $\{\beta_i : N \to M/I^i M\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足对 $i \leq j$ 有 $\psi_i^j g_j = g_i$, 对每个 $y \in N$, 记 $g_i(y) = x_i + I^i M = x_i' + I^i M$, 那么 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ 和 $\{x_i'\}_{i=0}^{\infty}$ 都是 Cauchy 列: 对任何指标 $i \leq j$, $\psi_i^j g_j = g_i$ 说明 $x_j - x_i \in I^i M$, 故 $|x_j - x_i| \leq 1/2^i$. 由此得到 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是 Cauchy 列, 类似地, $\{x_i'\}_{i=0}^{\infty}$ 也是 Cauchy 列.

因为 $x_i - x_i' \in I^i M, \forall i \in \mathbb{N}$, 所以 $\{x_i - x_i'\}_{i=0}^{\infty}$ 是收敛于零的 Cauchy 列. 于是我们得到 $\beta : N \to \widehat{M}, y \mapsto \{x_i\}_{i=0}^{\infty} + N(M)$ 是定义合理的加群同态, 满足 $\alpha_i \beta = \beta_i, \forall i \in \mathbb{N}$. 下面验证满足该条件的加群同态 β 是唯一的: 如果还有加群同态 $\beta' : N \to \widehat{M}$ 满足 $\alpha_i \beta' = \beta_i, \forall i \in \mathbb{N}$, 那么对每个 $y \in N$, $\alpha_i(\beta(y) - \beta'(y)) = 0$. 由此可直接验证 $\beta(y) - \beta'(y) = 0 + N(M)$. 因此 β 是满足 $\alpha_i \beta = \beta_i, \forall i \in \mathbb{N}$ 的唯一的加群同态.

$$\begin{tikzcd}
\widehat{M} \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha_j"'] & & N \arrow[ll, dashed, "\beta"'] \arrow[dl, "\beta_i"'] \arrow[ddl, bend left, "\beta_j"] \\
& M/I^i M & \\
& M/I^j M \arrow[u, "\psi_i^j"] &
\end{tikzcd}$$

当 N 进一步是左 R-模, 每个 β_i 都是左 R-模同态时, 前面构造的加群同态 β 也是左 R-模同态. 当 $M = R$ 时, 如果 N 进一步是含幺环, 每个 β_i 是环同态, 那么前面构造的 β 也是环同态. 故 $\widehat{R} \cong \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} R/I^i$. □

Remark 2.26. 保持 [定理2.25] 的假设和记号, 对左 R-模 M, 每个自然数 i 对应标准投射 $\pi_i : M \to M/I^i M$, 那么对任何自然数 $i \leq j$, 有 $\psi_i^j \pi_j = \pi_i$. 因此存在唯一的左 R-模同态 $\pi : M \to \widehat{M}$ 使得 $\alpha_i \pi = \pi_i, \forall i \in \mathbb{N}$. 根据 [定理2.25] 的证明过程, π 就是 [引理2.20] 意义下的标准嵌入, 这里记作 j_M. 并回忆 [注记2.24] 指出 M 上 I-adic 拓扑完备当且仅当 j_M 是同构. 于是, 在左 R-模 M 和 R 满足 I-adic 拓扑都 Hausdorff 的前提下, M 上 I-adic 拓扑完备的充要条件是使得下图交换的唯一的 R-模同态 $\mathrm{j}_M : M \to \widehat{M}$ 是同构:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{M} \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha_j"'] & & M \arrow[ll, dashed, "\mathrm{j}_M"'] \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[ddl, bend left, "\pi_j"] \\
& M/I^i M & \\
& M/I^j M \arrow[u, "\psi_i^j"] &
\end{tikzcd}$$

同样地, 满足 I-adic 拓扑 Hausdorff 的环 R 和理想 I, R 上 I-adic 拓扑完备的充要条件是下述交换图确定的环同态 $\mathrm{j}_R : R \to \widehat{R}$ 是同构:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{R} \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & R \arrow[ll, dashed, "\mathrm{j}_R"'] \arrow[dl, "\pi_i"] \\
& R/I^i &
\end{tikzcd}$$

设 X, Y 是左 R-模, I 是 R 的理想, 满足 R, X, Y 上的 I-adic 拓扑都有分离性. 那么对任何左 R-模同态 $f : X \to Y$, [注记2.21] 意义下的左 $\widehat{R}$-模同态 $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ 满足下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{Y} \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha_j"'] & & & \widehat{X} \arrow[lll, "\widehat{f}"'] \arrow[dl, "\beta_i"'] \arrow[ddl, bend left, "\beta_j"] \\
& Y/I^iY & X/I^iX \arrow[l, "\overline{f}"'] & \\
& Y/I^jY \arrow[u, "\psi_i^j"] & X/I^jX \arrow[l, "\overline{f}"] \arrow[u, "\varphi_i^j"'] &
\end{tikzcd}$$

因此 $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ 也可以视作 f 诱导的逆向系间自然变换 $\overline{f} : \{X/I^iX, \varphi_i^j\}_{\mathbb{N}} \to \{Y/I^iY, \psi_i^j\}_{\mathbb{N}}$ 的逆向极限.

对左 R-模 M 和 R 的理想 I, 即使 M 关于 I-adic 拓扑没有分离性, 我们依然能够定义 **Ab** 中的逆向系 $\{M/I^iM, \psi_i^j\}_{\mathbb{N}}$(相应地, 逆向系 $\{R/I^i, \psi_i^j\}_{\mathbb{N}}$), 于是得到加法群 $\varprojlim_{i\in\mathbb{N}} M/I^iM$. 并且注意前面关于逆向极限的讨论说明只要 M 是左 R-模, I 是 R 的理想, 那么 $\varprojlim_{i\in\mathbb{N}} M/I^iM = \{\{x_n\}_{n=0}^{\infty} | 每个 x_n \in M 且 x_n - x_{n+1} \in I^nM\}$. 于是 $\varprojlim_{i\in\mathbb{N}} R/I^i$ 可自然视作含幺环且 $\varprojlim_{i\in\mathbb{N}} M/I^iM$ 是左 $\varprojlim_{i\in\mathbb{N}} R/I^i$-模. 一些文献中使用逆向极限 $\varprojlim_{i\in\mathbb{N}} R/I^i$ 和 $\varprojlim_{i\in\mathbb{N}} M/I^iM$ 分别定义 R 和 M 的 I-adic 完备化来避免 I-adic 拓扑分离性的假设. 而 [定理2.25] 说明当 R 和 M 上的 I-adic 拓扑满足分离性时, $\varprojlim_{i\in\mathbb{N}} M/I^iM$ 就是前面定义的 M 的 I-adic 完备化 $\widehat{M}$. 因此我们能够使用逆向极限的工具来导出完备化的一些基本性质 (尤其对指标集为 $\mathbb{N}$ 的逆向系时).

设 R 是含幺环, $\{M_i, \psi_i^j\}_{\mathbb{N}}$ 是以自然数集 $(\mathbb{N}, \leq)$ 为指标集的左 R-模逆向系. 由逆向极限的构造, 若定义

$$\theta' : \prod_{i\in\mathbb{N}} M_i \to \prod_{i\in\mathbb{N}} M_i, (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (x_i - \psi_i^{i+1} x_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$$

那么 $\mathrm{Ker}\theta'$ 都定义出 $\{M_i, \psi_i^j\}_{\mathbb{N}}$ 的逆向极限 $\varprojlim_{\mathbb{N}} M_i$. 如果我们有左 R-模逆向系的短正合列

$$0 \longrightarrow \{K_i, \theta_i^j\}_{\mathbb{N}} \xrightarrow{\{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}} \{M_i, \psi_i^j\}_{\mathbb{N}} \xrightarrow{\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}} \{N_i, \varphi_i^j\}_{\mathbb{N}} \longrightarrow 0,$$

那么对任何自然数 i, 有下述交换图, 满足上下两行正合:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \prod_{i\in\mathbb{N}} K_i \arrow[r, "(s_i)_{i\in\mathbb{N}}"] \arrow[d, "\theta'_K"'] & \prod_{i\in\mathbb{N}} M_i \arrow[r, "(t_i)_{i\in\mathbb{N}}"] \arrow[d, "\theta'_M"'] & \prod_{i\in\mathbb{N}} N_i \arrow[r] \arrow[d, "\theta'_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \prod_{i\in\mathbb{N}} K_i \arrow[r, "(s_i)_{i\in\mathbb{N}}"] & \prod_{i\in\mathbb{N}} M_i \arrow[r, "(t_i)_{i\in\mathbb{N}}"] & \prod_{i\in\mathbb{N}} N_i \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

根据前面的讨论, $\mathrm{Ker}\theta'_K = \varprojlim_{\mathbb{N}} K_i, \mathrm{Ker}\theta'_M = \varprojlim_{\mathbb{N}} M_i$ 以及 $\mathrm{Ker}\theta'_N = \varprojlim_{\mathbb{N}} N_i$. 根据蛇形引理, 我们得到如下左 R-模正合列

$$0 \longrightarrow \varprojlim_{\mathbb{N}} K_i \xrightarrow{\varprojlim_{\mathbb{N}} s_i} \varprojlim_{\mathbb{N}} M_i \xrightarrow{\varprojlim_{\mathbb{N}} t_i} \varprojlim_{\mathbb{N}} N_i \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\theta'_K \longrightarrow \mathrm{Coker}\theta'_M \longrightarrow \mathrm{Coker}\theta'_N \longrightarrow 0.$$

特别地, 从上述正合列我们得到逆向极限函子 $\varprojlim_{\mathbb{N}}:\mathbf{Inv}(\mathbb{N})\to R\text{-}\mathbf{Mod}$ 是左正合的.

如果对任何自然数 n 有 θ_n^{n+1} 是满射, 那么对任何自然数 $i\le j$ 也有 θ_i^j 是满射. 于是知 $\theta_K':\prod_{i\in\mathbb{N}}K_i\to\prod_{i\in\mathbb{N}}K_i,(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\mapsto(x_i-\theta_i^{i+1}x_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$ 是满射. 这说明 $\mathrm{Coker}\theta_K'=0$. 于是由前面讨论得到正合列

$$0\longrightarrow\varprojlim_{\mathbb{N}}K_i\xrightarrow{\varprojlim_{\mathbb{N}}s_i}\varprojlim_{\mathbb{N}}M_i\xrightarrow{\varprojlim_{\mathbb{N}}t_i}\varprojlim_{\mathbb{N}}N_i\longrightarrow 0.$$

特别地, 如果我们有左 R-模短正合列 $0\longrightarrow X\xrightarrow{s}Y\xrightarrow{t}Z\longrightarrow 0$, 则 X 有子模降滤 $X\supseteq s^{-1}(IY)\supseteq s^{-1}(I^2Y)\supseteq\cdots$, Z 也有子模降链 $Z\supseteq I^2Z\supseteq I^3Z\supseteq\cdots$. 则对每个自然数 i, 有短正合列

$$0\longrightarrow X/s^{-1}(I^iY)\xrightarrow{s_i}Y/I^iY\xrightarrow{t_i}Z/I^iZ\longrightarrow 0,\tag{2.1}$$

考虑标准映射 $\theta_i^j:X/s^{-1}(I^jY)\to X/s^{-1}(I^iY),\psi_i^j:Y/I^jY\to Y/I^iY$ 和 $\varphi_i^j:Z/I^jZ\to Z/I^iZ$, 那么 (2.1) 也定义出逆向系短正合列, 于是由每个 θ_i^j 是满射, 由前面的讨论得到左 R-模短正合列

$$0\longrightarrow\varprojlim_{\mathbb{N}}X/s^{-1}(I^iY)\xrightarrow{\varprojlim_{\mathbb{N}}s_i}\varprojlim_{\mathbb{N}}Y/I^iY\xrightarrow{\varprojlim_{\mathbb{N}}t_i}\varprojlim_{\mathbb{N}}Z/I^iZ\longrightarrow 0.$$

如果 R 是交换 Noether 环, Y 是有限生成 R-模, 那么根据 [引理2.22], Artin-Rees 引理保证了前面考虑的 X 上子模降链诱导的拓扑就是 X 上 I-adic 拓扑. 所以我们得到

Theorem 2.27 ([AM69])**.** 设 R 是交换 Noether 环, I 是理想且给定有限生成 R-模的短正合列

$$0\longrightarrow X\xrightarrow{s}Y\xrightarrow{t}Z\longrightarrow 0,$$

那么 $0\longrightarrow\varprojlim_{\mathbb{N}}X/I^iX\xrightarrow{\varprojlim_{\mathbb{N}}s_i}\varprojlim_{\mathbb{N}}Y/I^iY\xrightarrow{\varprojlim_{\mathbb{N}}t_i}\varprojlim_{\mathbb{N}}Z/I^iZ\longrightarrow 0$ 正合.

特别地, 当 X,Y,Z 上 I-adic 拓扑都 Hausdorff 时, 有 $\widehat{R}$-模短正合列 $0\longrightarrow\widehat{X}\xrightarrow{\widehat{s}}\widehat{Y}\xrightarrow{\widehat{t}}\widehat{Y}\longrightarrow 0$.

从 [定理2.27] 我们看到, 固定交换 Noether 环 R 的理想 I, 那么从 I-adic 拓扑满足分离性条件的有限生成 R-模构成的范畴到 $\widehat{R}$-**Mod** 的完备化函子 $\widehat{(-)}$ 保持短正合列. 特别地, 结合 [例2.19] 我们得到

Corollary 2.28. 设 R 是交换 Noether 局部环, $\widehat{(-)}:R\text{-}\mathbf{mod}\to\widehat{R}\text{-}\mathbf{Mod}$ 是正合函子.

Remark 2.29. 事实上, 对交换 Noether 局部环 R 上有限生成模 M, $\widehat{M}$ 总是有限生成 $\widehat{R}$-模, [命题2.33].

Definition 2.30 (完备局部环, [Eis95])**.** 如果交换 Noether 局部环 $(R,\mathfrak{m})$ 上的 $\mathfrak{m}$-adic 拓扑是完备的 (或等价地, [引理2.20] 中的标准嵌入 $R\to\widehat{R}$ 的环同构, 这里 $\widehat{R}$ 是 R 的 $\mathfrak{m}$-adic 完备化), 则称 R 是**完备局部环**.

Example 2.31 ([Mat86])**.** 设交换 Noether 局部环 $(R,\mathfrak{m})$ 是 Artin 的, 那么 R 是完备 Noether 局部环: 这时存在正整数 ℓ 使得 $\mathfrak{m}^\ell=0$, 所以 R 赋予 $\mathfrak{m}$-adic 拓扑后是离散度量空间, 并且经 [命题2.11] 度量化后, 任意两个不同的元素的距离至少为 $2^{-\ell}$, 这说明 R 关于 $\mathfrak{m}$-adic 拓扑是完备度量空间. Artin 局部环未必是正则的, 例如域 $\Bbbk$ 上交换代数 $\Bbbk[x]/(x^2)$, 因此完备 Noether 局部环未必是正则局部环也未必是整区.

Example 2.32. 设 K 是含幺交换环, $R=[x_1,...,x_n]$ 是多项式代数, $I=(x_1,...,x_n)$. 那么对每个自然数 n, I^n 中的非零多项式每个单项式至少是 n 次的, 因此 $\cap_{n=0}^{\infty}I^n=0$. 那么 R 关于理想 I 的 I-adic 完备化

$$\widehat{R}\cong K[[x_1,...,x_n]].$$

Proof. 对任给 $f(x_1,...,x_n) \in K[[x_1,...,x_n]]$, 记 $f_k(x_1,...,x_n)$ 是将 f 删去存在某个变量幂指数严格大于 k 的单项式后得到的多项式, 那么 $\beta_k : K[[x_1,...,x_n]] \to R/I^k, f(x_1,...,x_n) \mapsto f_k(x_1,...,x_n)+I^k$ 是定义合理的环同态. 并且对任何自然数 $i \le j$, 有 $\psi_i^j \beta_j = \beta_i$, 这里 $\psi_i^j : R/I^j \to R/I^i$ 是 [定理2.25] 中的标准映射. 根据 [定理2.25], 存在环同态 $\beta : K[[x_1,...,x_n]] \to \widehat{R}$ 使得 $\beta(f(x_1,...,x_n)) = \{f_k(x_1,...,x_n)\}_{k=0}^{\infty} + N(R)$. 现在通过 $f_k(x_1,...,x_n)$ 的定义以及 $K[x_1,...,x_n]$ 中 Cauchy 列可定义出极限形式幂级数可直接验证 β 是同构. □

如果 R 关于理想 I 的 I-adic 拓扑是 Hausdorff 的, 对每个自然数 k, 明显有 $\widehat{I}^k \subseteq \widehat{I^k}$. 下面说明 R 是交换 Noether 环时等号成立. 于是在 R 交换 Noether 的条件下, [引理2.23] 考虑的 $\widehat{R}$ 上拓扑就是 $\widehat{I}$-adic 拓扑.

Proposition 2.33 ([Jac09]). 设 R 是含幺环且 M 是有限生成左 R-模, I 是 R 的理想满足 M 和 R 上的 I-adic 拓扑都是 Hausdorff 的. 记 $\widehat{R}$ 和 $\widehat{M}$ 分别是 R 和 M 的 I-adic 完备化, 并用 [引理2.23] 中的标准嵌入 $\mathrm{j}_M : M \to \widehat{M}$ 将 M 视作 $\widehat{M}$ 的子集, 那么 $\widehat{M} = \widehat{R}M$. 特别地, $\widehat{M}$ 是有限生成左 $\widehat{R}$-模.

当 R 进一步是交换 Noether 环时, 对任何自然数 k, 有 $\widehat{I^k} = \widehat{I}^k$ 以及 $\widehat{I^kM} = I^k\widehat{M} = \widehat{I}^k\widehat{M}$.

Proof. 因为 M 是有限生成左 R-模, 所以可设 $M = Rx_1 + Rx_2 + \cdots + Rx_r$, 并取定 $\widehat{y} \in \widehat{M}$. 根据 [引理2.23(3)], 存在 M 中点列 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ 使得 $\{\mathrm{j}_M(y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 $\widehat{y}$. 特别地, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in C(M)$.

因为 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 Cauchy 列, 所以 $y_{n+1} - y_n \to 0 (n \to +\infty)$, 于是存在自然数列 $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ 使得 $s_n \to +\infty (n \to +\infty)$ 且对任何自然数 n 有 $y_{n+1} - y_n \in I^{s_n}M$. 所以对每个自然数 n, 可选取 $a_{n1},...,a_{nr} \in I^{s_n}$ 使得

$$y_{n+1} - y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nr}x_r.$$

于是通过将 y_n 表示为 $y_0 + (y_1 - y_0) + \cdots + (y_n - y_{n-1})$ 得到 Cauchy 列 $\{b_{n1}\}_{n=0}^{\infty},...,\{b_{nr}\}_{n=0}^{\infty} \in C(R)$ 使得 $y_n = b_{n1}x_1 + \cdots + b_{nr}x_r, n \ge 0$. 由于 $\{\mathrm{j}_R(b_{n1})\}_{n=0}^{\infty},...,\{\mathrm{j}_R(b_{nr})\}_{n=0}^{\infty}$ 也是 $\widehat{R}$ 中 Cauchy 列, 所以 [引理2.23] 保证了 $\widehat{R}$ 上 Cauchy 列都收敛, 可设 $\mathrm{j}_R(b_{nk}) \to \widehat{b_k} (k \to +\infty)$. 那么 [命题2.9] 保证了

$$\mathrm{j}_M(y_n) \to \widehat{b_1}\mathrm{j}_M(x_1) + \cdots + \widehat{b_r}\mathrm{j}_M(x_r) (n \to +\infty).$$

因此如果将 $\mathrm{j}_M(x_i)$ 和 x_i 视作等同, 我们得到 $\widehat{y} = \widehat{b_1}x_1 + \cdots + \widehat{b_r}x_r \in \widehat{R}M$.

现在由 R 是 Noether 环且 M 是有限生成左 R-模, 我们看到对任何自然数 k, I^k 和 I^kM 作为左 R-模都是有限生成模. 于是应用前面证明的结果, 得到 $\widehat{I^k} = \widehat{R}I^k$ 以及 $\widehat{I^kM} = \widehat{R}(I^kM)$. R 的交换性保证了 $\widehat{R}$ 的交换性, 我们有 $\widehat{I^kM} = \widehat{R}(I^kM) = I^k(\widehat{R}M) = I^k\widehat{M}$. 取 $M = R$ 得到 $\widehat{I^k} = I^k\widehat{R} = \widehat{I}^k$. □

Remark 2.34. 保持 [命题2.33] 的记号和假设, 对交换 Noether 环 R 的理想 I 和有限生成 R-模 M, 因为这时对任何自然数 k 有 $\widehat{I^k} = \widehat{I}^k$ 以及 $\widehat{I^kM} = \widehat{I}^k\widehat{M}$, 所以 $\widehat{R}$ 和 $\widehat{M}$ 上我们考虑的拓扑就是 $\widehat{I}$-adic 拓扑.

Remark 2.35. 设 R 是交换 Noether 环, 理想 I 满足 R 上 I-adic 拓扑是 Hausdorff 的. 根据 [注记2.34] 和 [引理2.23], $\widehat{R}$ 上的 $\widehat{I}$-adic 拓扑是完备的. 现在应用 [命题2.15] 得到 $\widehat{I}$ 含于 $\widehat{R}$ 的 Jacobson 根. 我们也可以应用 [命题2.16] 得到 $\widehat{R}/\widehat{I}$ 的任何幂等元能够提升为 $\widehat{R}$ 中幂等元.

Corollary 2.36 ([AM69]). 设 R 是交换 Noether 环, I 是 R 的理想, M 是有限生成 R-模满足 R 和 M 上 I-adic 拓扑是 Hausdorff 的. 那么标准 $\widehat{R}$-模同态 $\widehat{R} \otimes_R M \to \widehat{M}, \widehat{a} \otimes x \mapsto \widehat{a}x$ 是同构. 所以对定义在 I-adic 拓扑 Hausdorff 的有限生成 R-模范畴上的完备化函子 $\widehat{(-)}$ 有自然同构 $\widehat{R} \otimes_R - \cong \widehat{(-)}$.

特别地, 当 R 是交换 Noether 局部环时, 任何有限生成 R-模 M 满足标准同构 $\widehat{R} \otimes_R M \cong \widehat{M}$. 并且这时完备化函子 $\widehat{(-)} : R\text{-}\mathbf{mod} \to \widehat{R}\text{-}\mathbf{mod}$ 满足自然同构 $\widehat{R} \otimes_R - \cong \widehat{(-)}$.

Proof. 记 $\mu : \widehat{R} \otimes_R M \to \widehat{M}$ 是标准 $\widehat{R}$-模同态, 根据 [命题2.33], μ 是满射. 而 $\mu_R : \widehat{R} \otimes_R R \to \widehat{R}$ 明显是同构, 由此可知对任何有限生成自由 R-模 F, $\mu_F : \widehat{R} \otimes_R F \to \widehat{F}$ 也是同构 (易见 F 上 I-adic 拓扑也是 Hausdorff 的). 对 M, 由 R 的 Noether 条件可取定有限生成 R-模的短正合列 $0 \longrightarrow K \xrightarrow{\iota} F \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$ 使得 F 是自由 R-模. 那么 K, F, M 上 I-adic 拓扑都是 Hausdorff 的, 应用 [定理2.27] 得到短正合列

$$0 \longrightarrow \widehat{K} \xrightarrow{\widehat{\iota}} \widehat{F} \xrightarrow{\widehat{\pi}} \widehat{M} \longrightarrow 0.$$

于是我们得到下述交换图, 满足上下两行正合:

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{R}\otimes_R K \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\iota"] \arrow[d, "\mu_K"'] & \widehat{R}\otimes_R F \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\pi"] \arrow[d, "\mu_F"'] & \widehat{R}\otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, "\mu_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widehat{K} \arrow[r, "\widehat{\iota}"] & \widehat{F} \arrow[r, "\widehat{\pi}"] & \widehat{M} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中 μ_F 是同构且 μ_K 是满射 (因为 K 是有限生成 R-模). 对上图应用蛇形引理得到 μ_M 是单射. □

交换环 R 在乘闭子集 S 处的局部化 R_S 是平坦 R-模. 类似地, R 的 I-adic 完备化 $\widehat{R}$ 也是平坦 R-模.

Theorem 2.37 ([AM69])**.** 设 R 是交换 Noether 环, 有理想 I 满足 R 上 I-adic 拓扑是 Hausdorff 的. 记 $\widehat{R}$ 是 R 的 I-adic 完备化. 那么 $\widehat{R}$ 是平坦 R-模.

Proof. 要证 $\widehat{R}$ 是平坦 R-模, 只需证对任何 R 的理想 L, 嵌入 $\iota : L \to R$ 满足 $\mathrm{id} \otimes \iota : \widehat{R} \otimes_R L \to \widehat{R} \otimes_R R$ 是单射. 由 [推论2.36], 只要说明 $\widehat{\iota} : \widehat{L} \to \widehat{R}$ 是单射, 而这就是 [引理2.22]. □

下面我们做些准备后证明当 R 是交换 Noether 环且 R 的理想 I 满足分离条件时, R 的 I-adic 完备化 $\widehat{R}$ 也是交换 Noether 环, [定理2.43]. 我们首先在 [推论2.38] 说明相伴分次环 $G_{\widehat{I}}(\widehat{R})$ 是交换 Noether 环, 再借助 [推论2.42] 将 $G_{\widehat{I}}(\widehat{R})$ 提升至 $\widehat{R}$ 上 (这时 $\widehat{R}$ 上的 $\widehat{I}$-adic 拓扑是完备的, [命题2.33] 和 [引理2.23]).

Corollary 2.38 ([Jac09])**.** 设 R 是交换 Noether 环, I 是 R 的理想满足 $\cap_{k=0}^{\infty} I^k = 0$, 并记 $\widehat{R}$ 是 R 的 I-adic 完备化. 则有 $\mathbb{N}$-分次环同构 $G_I(R) \cong G_{\widehat{I}}(\widehat{R})$. 特别地, $G_{\widehat{I}}(\widehat{R})$ 是交换 Noether 环, [例1.13].

Proof. 我们将标准嵌入 $R \to \widehat{R}$ 视作等同, 那么对任何自然数 k, 有 $I^k \cap \widehat{I^{k+1}} = I^{k+1}$, [引理2.23(2)]. 下面验证 $I^k + \widehat{I^{k+1}} = \widehat{I}^k$: 只需验证对任何 $\widehat{b} \in \widehat{I}^k$ 有 $\widehat{b} \in I^k + \widehat{I^{k+1}}$. 根据 R 在 $\widehat{R}$ 中的稠密性, [引理2.23(3)], 对前面固定的自然数 k, 存在 $b \in R$ 使得 $\widehat{b} - b \in \widehat{I^{k+1}}$. 于是 $b \in R \cap \widehat{I}^k = I^k$, [引理2.23(2)]. 由此得到 $I^k + \widehat{I^{k+1}} = \widehat{I}^k$.

现在对任何自然数 k, (利用前面的讨论, [命题2.33] 和 [引理2.23(2)]) 我们有标准加群同构 $\widehat{I}^k/\widehat{I}^{k+1} = \widehat{I}^k/\widehat{I^{k+1}} = (I^k + \widehat{I^{k+1}})/\widehat{I^{k+1}} \cong I^k/(I^k \cap \widehat{I^{k+1}}) = I^k/I^{k+1}$. 由此我们得到分次加群同态 $G_I(R) \to G_{\widehat{I}}(\widehat{R})$, 限制在每个分次上为加群同构, 并且 $G_I(R) \to G_{\widehat{I}}(\widehat{R})$ 明显是环同态. □

设 $(R, \mathfrak{m})$ 是交换 Noether 局部环, 记 $\widehat{R}$ 是 R 的 $\mathfrak{m}$-adic 完备化. 那么 [推论2.38] 说明有环同构 $\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}} \cong R/\mathfrak{m}$. 特别地, $\widehat{\mathfrak{m}}$ 是 $\widehat{R}$ 的极大理想. 而 [注记2.35] 说明 $\mathfrak{m}$ 含于 $\widehat{R}$ 的 Jacobson 根, 所以我们证明了

Proposition 2.39 ([AM69])**.** 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是交换 Noether 局部环, 则 R 的 $\mathfrak{m}$-adic 完备化 $(\widehat{R}, \widehat{\mathfrak{m}})$ 是局部环.

Remark 2.40. 这时 [引理2.20] 意义下的标准嵌入 $\mathrm{j}_R = \widehat{(-)} : R \to \widehat{R}$ 满足 $\mathrm{j}_R(\mathfrak{m}) \subseteq \widehat{\mathfrak{m}}$. 因此 $\mathrm{j}_R^{-1}(\widehat{\mathfrak{m}})$ 作为 R 的包含 $\mathfrak{m}$ 的真理想, 有 $\mathrm{j}_R^{-1}(\widehat{\mathfrak{m}}) = \mathfrak{m}$. 特别地, 对任何有限生成 R-模 M, 含于 $\mathfrak{m}$ 的 M-正则序列 $a_1, ..., a_n$ 导

出含于 $\widehat{\mathfrak{m}}$ 的 $\widehat{M}$-正则序列 $\widehat{a_1},...,\widehat{a_n}$: 因为 $\widehat{R}$ 是平坦 R-模, [定理2.37], 所以 [引理1.14] 说明 $\widehat{a_1},...,\widehat{a_n}$ 是含于 $\widehat{\mathfrak{m}}$ 的弱 $\widehat{M}$-正则序列 (这里也利用了 $\widehat{R}$-模同构 $\widehat{R}\otimes_R M\cong\widehat{M}$, [推论2.36]). 而 $\widehat{M}/\widehat{\mathfrak{m}}\widehat{M}\cong\widehat{M/\mathfrak{m}M}$ 也说明了 $\widehat{a_1},...,\widehat{a_n}$ 是含于 $\widehat{\mathfrak{m}}$ 的 $\widehat{M}$-正则序列.

Lemma 2.41 ([Jac09])**.** 设 R 是含幺环, M 是左 R-模, R 有理想降滤 $R=F_0\supseteq F_1\supseteq\cdots$(注意这里有 $F_iF_j\subseteq F_{i+j}$), 相应的相伴分次环记作 $\mathrm{gr}R$. 并设 M 有子模降滤 $M=M_0\supseteq M_1\supseteq\cdots$(这里要求对任何自然数 i,j 有 $F_iM_j\subseteq M_{i+j}$) 满足 $\cap_{n=0}^{\infty}F_n=0,\cap_{n=0}^{\infty}M_n=0$, 并且 R 关于降链 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ 在 [引理2.3] 意义下诱导的拓扑是完备的 (该拓扑总可度量化, 见 [注记2.12]). 设 $\mathrm{gr}M$ 是 M 关于降滤 $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的相伴分次模. 如果 $\mathrm{gr}M$ 是有限生成 $\mathrm{gr}R$-模, 那么 M 是有限生成左 R-模.

Proof. 不妨设 $M\neq 0$, 那么 $\mathrm{gr}M\neq 0$, 由条件可设 $\mathrm{gr}M$ 作为有限生成 $\mathrm{gr}R$ 的非零齐次生成元集 $\{\overline{x_1},...,\overline{x_n}\}$, 可设每个 $x_i\in M_{e_i}$ 但 $x_i\notin M_{e_i+1}$(因为所有 M_k 之交为零). 于是对任何 $\mathrm{gr}M$ 中的 m 次齐次元 $\overline{u}$ 在 $\{\overline{x_1},...,\overline{x_n}\}$ 下的线性表示, 可表示为使每个 $\overline{x_i}$ 前的 $\mathrm{gr}R$ 中系数是 $m-e_i$ 次齐次元. 下证 $\{x_1,...,x_n\}$ 可 R-线性张成 M 来得到 M 是有限生成左 R-模. 如果有 $u_1\neq 0\in M$ 无法由 $\{x_1,...,x_n\}$ 来 R-线性表出, 那么可设 $o(u_1)=m_1\in\mathbb{N}$. 这时 $\overline{u_1}\in\mathrm{gr}M$ 是 m_1 次齐次元, 那么存在 $a_{1i}\in F_{m_1-e_i}$ 使得 $u_2=u_1-a_{11}x_1-\cdots-a_{1n}x_n\in M_{m_1+1}$, 记 $o(u_2)=m_2\geq m_1+1$. 那么有 $a_{2i}\in F_{m_2-e_i}$ 使得 $u_3=u_2-a_{21}x_1-\cdots-a_{n1}x_n\in M_{m_2+1}$.

重复上述讨论, 可得严格递增的自然数列 $m_1<m_2<\cdots$, M 中元素 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 $o(u_k)=m_k$, 以及 $F_{m_k-e_i}$ 中元素 a_{ki} 使得 $u_{k+1}=u_k-a_{k1}x_1-\cdots-a_{kn}x_n\in M_{m_k+1}$. 对固定的 $1\leq i\leq n$, 由 m_k 严格递增 (易见 $m_k\geq k-1,\forall k\geq 1$, 所以 $u_{k+1}\in M_k$) 可直接验证 R 中点列 $\{a_{1i}+a_{2i}+\cdots+a_{\ell i}\}_{\ell=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列, 因此由 R 的完备性条件, 有 $\sum_{\ell=1}^{\infty}a_{\ell i}\in R$, 记作 a_i. 那么利用前面 $u_{k+1}-u_k$ 的表达, 可直接验证对每个自然数 k 有 $u_1-a_1x_1-\cdots-a_nx_n\in M_k$, 最后由 $\cap_{n=0}^{\infty}M_n=0$ 得到 $u_1-a_1x_1-\cdots-a_nx_n=0$. 这与 u_1 的假设矛盾. 由此得到 M 中元素均可由 $\{x_1,...,x_n\}$ 来 R-线性表出. $\square$

Corollary 2.42 ([Jac09])**.** 设 I 是含幺环 R 的理想, 满足 R 上 I-adic 拓扑是 Hausdorff 且完备的. 如果相伴分次环 $G_I(R)$ 是左 Noether 环, 那么 R 也是左 Noether 环.

Proof. 任取 R 的左理想 M, 那么 M 可视作左 R-模, 并且 M 有子模降滤 $M=R\cap M\supseteq I\cap M\supseteq I^2\cap M\supseteq\cdots$, 因为对任何自然数 i,j 有 $I^i(I^j\cap M)\subseteq I^{i+j}\cap M$, 所以该降滤定义出分次左 $G_I(R)$-模 $\mathrm{gr}M$, 下面我们说明 $\mathrm{gr}M$ 作为左 $G_I(R)$-模是有限生成的, 一旦证明该断言, 应用 [引理2.41] 可知 M 是有限生成左 R-模. 进而由左理想 M 的任意性得到 R 是左 Noether 环. 考虑 $\mathrm{gr}M$ 到 $G_I(R)$ 的标准映射 $\iota:\mathrm{gr}M\to G_I(R)$, 那么根据 $\mathrm{gr}M$ 的定义, 易知 ι 是单左 $G_I(R)$-模同态. 于是由 $G_I(R)$ 的左理想都有限生成完成断言证明. $\square$

Theorem 2.43 ([Jac09])**.** 设 I 是交换 Noether 环 R 的理想, 满足 R 的 I-adic 拓扑是 Hausdorff 的. 那么 R 的 I-adic 完备化 $\widehat{R}$ 也是交换 Noether 环. 特别地, 根据 [命题2.39], 如果 $(R,\mathfrak{m})$ 是交换 Noether 局部环, 那么 R 的 $\mathfrak{m}$-adic 完备化 $(\widehat{R},\widehat{\mathfrak{m}})$ 是交换 Noether 局部环且 $\widehat{R}$ 是平坦 R-模, [定理2.37].

Proof. 根据 [推论2.38], $G_{\widehat{I}}(\widehat{R})$ 是交换 Noether 环. 从 [引理2.23] 和 [命题2.33] 我们看到 $\widehat{R}$ 上 $\widehat{I}$-adic 拓扑是 Hausdorff 且完备的. 所以可应用 [推论2.42] 导出 $\widehat{R}$ 是交换 Noether 环. $\square$

Remark 2.44. 根据 [注记2.34], [引理2.23(4)] 和 [定理2.43], 我们看到交换 Noether 局部环 $(R,\mathfrak{m})$ 的 $\mathfrak{m}$-adic 完备化 $(\widehat{R},\widehat{\mathfrak{m}})$ 是完备 Noether 局部环. 由于 $(R,\mathfrak{m})$ 上的不可约模 M 满足 $\mathrm{Ann}_RM=\mathfrak{m}$, 所以 $\mathfrak{m}^nM=0,\forall n\geq 1$, 说明 M 到自身的 $\mathfrak{m}$-adic 完备化 $\widehat{M}$ 的标准映射是满射, 也见 [引理2.20]. 特别地, $\widehat{M}$ 作为 R-模是单模, 所以

$\widehat{M}$ 也是单 $\widehat{R}$-模. 根据 [推论2.36], 任何有限生成 R-模 X 和其子模 Y, 有 $\widehat{R}$-模同构 $\widehat{X/Y} \cong \widehat{X}/\widehat{Y}$. 因此由前面关于完备化函子保持 Noether 局部环上单模的讨论, 我们看到: 对任何有合成列的 R-模 M, 如果 M 有合成列 $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_t = 0$, 那么 $\widehat{M}$ 作为 $\widehat{R}$-模有合成列 $\widehat{M} = \widehat{M_0} \supsetneq \cdots \supsetneq \widehat{M_t} = 0$.

设 $(R, \mathfrak{m})$ 是交换 Noether 局部环, 那么 [注记2.44] 说明对任何正整数 n, 记 $\ell_R(R/\mathfrak{m}^n)$ 是 $R/\mathfrak{m}^n$ 作为 Artin R-模的长度. 则有 $\ell_R(R/\mathfrak{m}^n) = \ell_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}^n)$. 回忆交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 的 Krull 维数就是 R 关于任何 $\mathfrak{m}$-准素理想的特征多项式次数, 由此我们证明了

Theorem 2.45 ([AK21]). 对交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 及其 $\mathfrak{m}$-adic 完备化 $\widehat{R}$, 总有 $\text{k.dim}R = \text{k.dim}\widehat{R}$.

由于交换 Noether 环 R 的 I-adic 完备化 $\widehat{R}$ 是平坦 R-模, 我们记录

Lemma 2.46. 设 $\alpha : R \to S$ 是交换环间保幺环同态, 并且将 S 通过 α 视作 R-模后, S 是平坦 R-模. 那么对任何 R-模 M 和 $x \in M$, 有 $\text{ann}_S(x \otimes 1) = \text{ann}_R(x)S$. 特别地, 取 R 是交换 Noether 环, 有理想 I 满足 R 上 I-adic 拓扑是 Hausdorff 的, 并设 $S = \widehat{R}$ 是 R 的 I-adic 完备化, 那么对任何有限生成 R-模 M 有

$$\widehat{\text{Ann}_R M} = (\text{Ann}_R M)\widehat{R} = \text{Ann}_{\widehat{R}}\widehat{M}.$$

Proof. 我们有标准正合列 $0 \longrightarrow \text{ann}_R(x) \longrightarrow R \xrightarrow{x} M$, 根据 S 的 R-平坦性, 对该正合列作用 $-\otimes_R S$ 得到 $\text{ann}_S(x \otimes 1) = \text{ann}_R(x)S$. 现在我们说明对任何 R 的理想 $\mathfrak{a}_1, ..., \mathfrak{a}_t$ 满足 $(\cap_{i=1}^t \mathfrak{a}_i)S = \cap_{i=1}^t \mathfrak{a}_i S$. 考察

$$0 \longrightarrow \bigcap_{i=1}^t \mathfrak{a}_i \longrightarrow R \longrightarrow \prod_{i=1}^t R/\mathfrak{a}_i,$$

对上述正合列作用 $- \otimes_R S$ 后便得断言. 现在设 M 是交换 Noether 环 R 上有限生成 R-模, 那么取定 M 的有限生成元集后利用 $\widehat{R}$ 是平坦 R-模, [定理2.37], 得到 $(\text{Ann}_R M)\widehat{R} = \text{Ann}_{\widehat{R}}\widehat{M}$. 因为 $\text{Ann}_R M$ 是有限生成 R-模, 所以 [命题2.33] 说明 $\widehat{\text{Ann}_R M} = (\text{Ann}_R M)\widehat{R}$. □

现在我们把 [定理2.45] 的结论加强到交换 Noether 局部环上的有限生成模的 Krull 维数在完备化下保持.

Corollary 2.47 ([GS71]). 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是交换 Noether 局部环, M 是非零有限生成 R-模, 并记 $\widehat{R}$ 和 $\widehat{M}$ 为 R 和 M 的 $\mathfrak{m}$-adic 完备化, 那么 $\text{k.dim}_R M = \text{k.dim}_{\widehat{R}}\widehat{M}$.

Proof. 现在 $\widehat{R}$ 也是交换 Noether 局部环, [定理2.43], 并且根据定义有 $\text{k.dim}_R M = \text{k.dim}R/\text{Ann}_R M$ 以及 $\text{k.dim}_{\widehat{R}}\widehat{M} = \text{k.dim}\widehat{R}/\text{Ann}_{\widehat{R}}\widehat{M}$. 所以由 [定理2.45] 和 [推论2.47] 得到结论. □

Example 2.48. 设 K 是交换 Noether 环, 那么形式幂级数环 $K[[x_1, ..., x_n]]$ 也是 Noether 环, [例2.32]. 并且 $K[[x_1, ..., x_n]]$ 作为 $K[x_1, ..., x_n]$-模是平坦的, [定理2.37].

Corollary 2.49 ([BH93]). 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是交换 Noether 局部环, $\widehat{R}$ 是 R 的 $\mathfrak{m}$-adic 完备化. 那么

$$\dim_{R/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim_{\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}} \widehat{\mathfrak{m}}/\widehat{\mathfrak{m}}^2.$$

特别地, 交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 是正则局部环当且仅当 R 的 $\mathfrak{m}$-adic 完备化 $\widehat{R}$ 是正则局部环.

Proof. 从 [注记2.38] 得到环同构 $G_{\mathfrak{m}}(R) \cong G_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{R})$ 该标准同构给出环同构 $R/\mathfrak{m} \cong \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}$ 以及加群同构 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \widehat{\mathfrak{m}}/\widehat{\mathfrak{m}}^2$. 由此可知 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 作为 $R/\mathfrak{m}$-线性空间的维数与 $\widehat{\mathfrak{m}}/\widehat{\mathfrak{m}}^2$ 作为 $\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}$-线性空间的维数一致.

现在, [定理2.45] 说明 $\mathrm{k.dim}R = \mathrm{k.dim}\widehat{R}$ 总成立, 因此 R 是正则局部环当且仅当 $\widehat{R}$ 是正则局部环. □

Proposition 2.50 ([Mat80])**.** 设 R 是交换 Noether 环, I 是 R 的理想, R 上 I-adic 拓扑 Hausdorff, 并且设 $I = (a_1, ..., a_n)$. 那么有环同构 $R[[x_1, ..., x_n]]/(x_1 - a_1, ..., x_n - a_n) \cong \widehat{R}$.

Proof. 有标准同构 $R[x_1, ..., x_n]/(x_1 - a_1, ..., x_n - a_n) \cong R$, 于是由 [命题2.33] 和 [定理2.27] 得到两边对 I(以及 I 对应的左边商环的理想) 作完备化给出环同构 $R[[x_1, ..., x_n]]/(x_1 - a_1, ..., x_n - a_n) \cong \widehat{R}$, [例2.32]. □

2.3 Cohen-Macaulay 性质

本节固定交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$, 并设 $\widehat{R}$ 是 R 的 $\mathfrak{m}$-adic 完备化. 那么 $\widehat{R}$ 是平坦 R-模, [定理2.37]. 于是对任何有限生成 R-模 M, 由 $\widehat{R}$-模同构 $\widehat{M} \cong \widehat{R} \otimes_R M$, [推论2.36], 于是我们可应用 [引理1.16] 得到

Lemma 2.51. 设 M, N 是交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 上有限生成模. 则对任何自然数 i 有 $\widehat{R}$-模同构

$$\widehat{\mathrm{Ext}_R^i(M, N)} \cong \mathrm{Ext}_{\widehat{R}}^i(\widehat{M}, \widehat{N}).$$

Corollary 2.52 ([BH93])**.** 设 M 是交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 上有限生成模, 则 $\mathrm{depth}_R M = \mathrm{depth}_{\widehat{R}} \widehat{M}$.

Proof. 现在 $\widehat{R}$ 是以 $\widehat{\mathfrak{m}}$ 为极大理想的交换 Noether 局部环, [定理2.43]. 并且 $\widehat{M}$ 是有限生成 $\widehat{R}$-模, [命题2.33]. 所以, 根据 [引理2.51] 和 [引理2.20], 我们可应用 [定理1.15] 得到 $\mathrm{depth}_R M = \inf\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, M)\} = \inf\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Ext}_{\widehat{R}}^i(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}, \widehat{M})\} = \mathrm{depth}_{\widehat{R}} \widehat{M}$. □

Corollary 2.53. 设 M 是交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 上有限生成模, 则 $\mathrm{inj.dim}_R M = \mathrm{inj.dim}_{\widehat{R}} \widehat{M}$.

Proof. 与 [推论2.52] 同样地, $\widehat{M}$ 是交换 Noether 局部环 $(\widehat{R}, \widehat{\mathfrak{m}})$ 上有限生成模, 现在由 $\mathrm{inj.dim}_R M = \sup\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, M)\} = \sup\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Ext}_{\widehat{R}}^i(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}, \widehat{M})\} = \mathrm{inj.dim}_{\widehat{R}} \widehat{M}$ 完成证明. □

在 [推论2.49] 我们看到交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 是正则局部环的充要条件是 R 的 $\mathfrak{m}$-adic 完备化 $\widehat{R}$ 是正则局部环. 所以可利用完备化来证明交换 Noether 局部环是正则局部环. 类似地, 有

Proposition 2.54 ([BH93])**.** 设 M 是交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 上有限生成模, 分别记 $\widehat{M}$ 和 $\widehat{R}$ 为 M 和 R 的 $\mathfrak{m}$-adic 完备化. 那么有:
(1) M 作为 R-模是 Cohen-Macaulay 模当且仅当 $\widehat{M}$ 作为 $\widehat{R}$-模是 Cohen-Macaulay 模.
(2) R 是 Cohen-Macaulay 环当且仅当 $\widehat{R}$ 是 Cohen-Macaulay 环.
(3) M 作为 R-模是极大 Cohen-Macaulay 模当且仅当 $\widehat{M}$ 作为 $\widehat{R}$-模是极大 Cohen-Macaulay 模.
(4) R 是 Gorenstein 局部环当且仅当 $\widehat{R}$ 是 Gorenstein 局部环.

Proof. (1) 和 (3) 来自 [推论2.47] 和 [推论2.52], (2) 是 (1) 的特殊情况. (4) 来自 [推论2.53]. □

Definition 2.55 (完全交局部环, [BH93])**.** 如果交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 满足其 $\mathfrak{m}$-adic 完备化 $\widehat{R}$ 同构于某个正则局部环关于一个正则序列生成理想的商, 则称 R 是**完全交局部环**.

Theorem 2.56 ([BH93])**.** 正则局部环是完全交局部环, 完全交局部环是 Gorenstein 局部环.

Proof. 由于正则局部环的完备化依然是正则局部环, [推论2.49], 故正则局部环是完全交局部的. 如果 $(R, \mathfrak{m})$ 是完全交局部环, 那么 $\widehat{R}$ 作为 Gorenstein 局部环关于某个正则序列生成理想的商依然是 Gorenstein 局部环, 进而 [命题2.54] 保证了 R 是 Gorenstein 局部环. □

参考文献

[AK21] Allen Altman and Steven Kleiman. *A term of Commutative Algebra*. Worldwide Center of Mathematics, 2021.

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[BH93] Winfried Bruns and Jürgen Herzog. *Cohen-Macaulay rings*, volume 39 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[GS71] Silvio Greco and Paolo Salmon. *Topics in $\mathfrak{m}$-adic topologies*, volume Band 58 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.

[GWJ04] Kenneth R Goodearl and Robert Breckenridge Warfield Jr. *An introduction to noncommutative Noetherian rings*. Cambridge university press, 2004.

[Jac09] Nathan Jacobson. *Basic algebra II*. Dover Publications, 2nd edition, 2009.

[Mat80] Hideyuki Matsumura. *Commutative algebra*, volume 56 of *Mathematics Lecture Note Series*. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, MA, second edition, 1980.

[Mat86] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. Translated from the Japanese by M. Reid.

[MR87] J. C. McConnell and J. C. Robson. *Noncommutative Noetherian Rings*. American Mathematical Society, 1987.

[NaavO82] C. N˘astăsescu and F. van Oystaeyen. *Graded ring theory*, volume 28 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1982.