Grothendieck 群

戚天成

复旦大学 数学科学学院

2023 年 7 月 24 日

为证明代数几何中 Riemann-Roch 定理经典形式的推广, A. Grothendieck 在 [BJG$^+$71] 中给出了下面介绍的 Grothendieck 群的具体构造. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴使得所有对象同构类构成集合 (例如左 Noether 环上的有限生成模范畴或者代数上的有限维模范畴), 即 $\{[X]|X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}\}$ 是集合 (一些文献称这样的范畴是**本质小**的). 以同构类集作自由 Abel 群 $F(\mathcal{A})$, 记 $F(\mathcal{A})$ 的子集

$$\{[X]-[X']-[X'']|\mathcal{A}\text{中有形如 } 0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0 \text{ 的正合列}\}$$

生成的子群为 $R(\mathcal{A})$, 那么可定义出 Abel 群 $K(\mathcal{A})$, 称为 $\mathcal{A}$ 的 **Grothendieck 群**. 为叙述方便, 将 $K(\mathcal{A})$ 中以同构类 $[X]$ 为代表元的陪集也记作 $[X]$. 在这一记号下, 易见对任何 $\mathcal{A}$ 中对象 X, Y 有 $[X \oplus Y] = [X] + [Y]$.

Lemma 0.1. 设 $\mathcal{A}$ 是使得 $\{[X]|X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}\}$ 构成集合的 Abel 范畴, $K(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Grothendieck 群. 那么 $K(\mathcal{A})$ 满足下述泛性质：对任何 Abel 群 G 和定义在同构类集上的映射 $f : \{[X]|X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}\} \to G$, 只要 $f([X]) = f([X']) + f([X''])$ 对 $\mathcal{A}$ 中任何正合列 $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ 成立, 那么存在唯一的加群同态 $\tilde{f} : K(\mathcal{A}) \to G$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
\{[X]|X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}\} \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & K(\mathcal{A}) \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] \\
 & G
\end{tikzcd}$$

回忆若 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中非零对象 X 有长度为 $n \geq 1$ 的子对象严格链

$$0 = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n = X,$$

使得 $X_0, X_1/X_0, ..., X_n/X_{n-1}$ 均为单对象, 则称上述严格链为 X 的**合成列**. 与模范畴情形一样可定义有限长严格子对象链 (对应模范畴中的正规列) 的等价性. 称零对象或有合成列的非零对象为**有有限长的**. 与模范畴情形一样, 我们有 Abel 范畴层面的 Jordan-Hölder 定理：

Jordan-Hölder Theorem. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, X 是 $\mathcal{A}$ 中有合成列的非零对象, 则 X 任意两个合成列等价, 即若 X 有合成列

$$0 = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n = X,$$

$$0 = Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_{m-1} \subsetneq Y_m = X,$$

则 $n = m$ 且存在 $\sigma \in S_n$ 使得 $X_i/X_{i-1} \cong Y_{\sigma(i)}/Y_{\sigma(i)-1}$.

Proof. 证明较困难, 因为 Abel 范畴间的正合忠实满函子未必保持单对象, 所以这里无法应用 Freyd-Mitchell 嵌入定理, 只能在 Abel 范畴层面应用同构定理直接地证明. 对正整数 n 作归纳. 当 $n = 1$ 时, X 是单对象, 进而 $m = 1$, 结论成立. 假设结论在 $n-1(n \geq 2)$ 的情形成立. 设 j 是使得 $X_1 \subseteq Y_j$ 的最小正整数 (首先满足条件的正整数 j 存在, 例如取 $j = m$, 故最小正整数也存在), 设 $t : X_1 \to Y_j$ 是 monic 态, 考虑下图:

$$\begin{tikzcd}
 & & X_1 \arrow[d, "t"] & & \\
0 \arrow[r] & Y_{j-1} \arrow[r, "l"] & Y_j \arrow[r, "p"] & Y_j/Y_{j-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

因为 X_1 不是 Y_{j-1} 的子对象, 所以 $pt \neq 0$. 于是由 X_1 和 Y_j/Y_{j-1} 均为单对象知 pt 是同构. 下面说明

$$0 \subsetneq X_2/X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n/X_1 = X/X_1$$

以及

$$0 \subsetneq \frac{Y_1 + X_1}{X_1} \subsetneq \frac{Y_2 + X_1}{X_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \frac{Y_{j-2} + X_1}{X_1} \subsetneq Y_j/X_1 \subsetneq Y_{j+1}/X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_m/X_1 = X/X_1$$

都是 X/X_1 的两个合成列, 一旦验证该断言, 则由归纳假设便得结论 (第二条合成列与 X 本身合成列的商因子相比缺少 $Y_j/Y_{j-1} \cong X_1$). 首先由第三同构定理易知 $0 \subsetneq X_2/X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n/X_1 = X/X_1$ 是非零对象 X/X_1 的合成列. 利用第二同构定理, 对每个 $1 \leq s \leq j-2$, 有 $(Y_s + X_1)/X_1 \cong Y_s/(X_1 \cap Y_s)$, 因为单对象 X_1 不是 Y_s 的子对象, 所以 $X_1 \cap Y_s = 0$, 进而 $(Y_s + X_1)/X_1 \cong Y_s$. 结合第三同构定理, 易知只需再验证同构

$$(Y_{j-1} + X_1)/X_1 \cong Y_j/X_1.$$

考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "1_{X_1}"'] & Y_{j-1} + X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \frac{Y_{j-1}+X_1}{X_1} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & Y_j \arrow[r] & Y_j/X_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中 α 是 monic 态. 利用五引理可知 β 也是 monic 态, 如果能够说明 $Y_j/(Y_{j-1} + X_1) = 0$, 则 β 的余核是零, 进而可得 β 是同构. 为此, 由第三同构定理, 有下述形式正合列

$$0 \longrightarrow \frac{Y_{j-1}+X_1}{Y_{j-1}} \xrightarrow{m} Y_j/Y_{j-1} \xrightarrow{e} \frac{Y_j}{Y_{j-1}+X_1} \longrightarrow 0,$$

因为 X_1 不是 Y_{j-1} 的子对象, 所以由第二同构定理得到 $(X_1 + Y_{j-1})/Y_{j-1}$ 是非零对象. 结合 Y_j/Y_{j-1} 是单对象可知 m 为同构, 因此 $Y_j/(Y_{j-1} + X_1) = 0$. 结合前面的讨论知结论成立. □

Remark 0.2. 证明过程中使用了 Abel 范畴版本的基本同构定理: 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, X 是 $\mathcal{A}$ 中对象, X_1, X_2 均为 X 的子对象, $f : X \to Y$ 是态射. 那么

•(第一同构定理)$X/\mathrm{Ker}f \cong \mathrm{Im}f$.

•(第二同构定理) 总有

$$\frac{X_1 + X_2}{X_1} \cong \frac{X_2}{X_1 \cap X_2}.$$

•(第三同构定理) 如果 $X_1 \subseteq X_2$, 则

$$\frac{X/X_1}{X_2/X_1} \cong X/X_2.$$

这里不予以证明, 证明细节可参见我关于 Freyd-Mitchell 嵌入定理注记的笔记.

Proposition 0.3. 如果 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的对象都是有限长的 (例如有限维代数上的有限维模范畴、群的有限维表示范畴), 那么当 $\mathcal{A}$ 的对象同构类构成集合时, 其 Grothendieck 群是由单对象同构类 (为代表元的陪集) 为基生成的自由 Abel 群. 因此, 对所有对象长度有限的本质小 Abel 范畴, 其 Grothendieck 群可等价地定义为由单对象同构类全体张成的自由 Abel 群.

Proof. 任取 $X \neq 0 \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 设有合成列 $0 = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n = X$, 那么对每个正整数 $1 \leq k \leq n$, 都有正合列 $0 \longrightarrow X_{k-1} \longrightarrow X_k \longrightarrow X_k/X_{k-1} \longrightarrow 0$. 进而知在 $K(\mathcal{A})$ 中

$$[X] = [X_n] = \sum_{k=1}^{n} [X_k/X_{k-1}] + [X_0].$$

所以 $K(\mathcal{A})$ 作为 Abel 群可由 $\{[S] | S\text{是单对象}\}$ 生成. 再说明集合 $\{[S] \in K(\mathcal{A}) | S\text{是单对象}\}$ 的 $\mathbb{Z}$-线性无关性. 对每个单对象同构类 $[S]$(注意, 这里对象 X 的同构类和同构类在 $K(\mathcal{A})$ 中对应的陪集记号上都写作 $[X]$, 需要区分), 作映射 $\theta_{[S]} : \{[X] | X \in \mathrm{ob}\mathcal{A}\} \to \mathbb{Z}$ 满足 $\theta_{[S]}([X])$ 为 X 的合成列中同构于 $[S]$ 的商因子数目 (零对象同构类映射至零). Jordan-Hölder 定理保证了 $\theta_{[S]}$ 是定义合理的函数并且 $\theta_{[S]}([X]) = \theta_{[S]}([X']) + \theta_{[S]}([X''])$ 对 $\mathcal{A}$ 中任何正合列 $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ 成立. 所以由 Grothendieck 群的泛性质可诱导加群同态, 仍记作 $\theta_{[S]}$, 使得 $\theta_{[S]}$ 在每个对象同构类 (对应陪集) 处的取值是它合成列中同构于 S 的商因子数目. 进而对不同构于 S 的单对象 T, 有 $\theta_{[S]}([T]) = 0$. 现在假设有不同的单对象同构类 $[S_1], [S_2], ..., [S_m]$ 以及整数 $n_1, ..., n_m$ 使得

$$\sum_{k=1}^{m} n_k [S_k] = 0,$$

那么对每个 $[S_l]$, 用 $\theta_{[S_l]}$ 作用上式可得 $n_l = 0$. 这说明 $\{[S] \in K(\mathcal{A}) | S\text{是单对象}\}$ 是 $\mathbb{Z}$-线性无关的. □

参考文献

[BJG+71] Pierre Berthelot, O Jussila, Alexandre Grothendieck, M Raynaud, S Kleiman, Luc Illusie, and Pierre Berthelot. Théorie des intersections et théoreme de riemann-roch. *Lecture notes in mathematics*, 225, 1971.