Gelfand-Kirillov 维数

Gelfand-Kirillov 维数起源于 Israel Gelfand（苏联数学家，1913-2009）与 Alexander Kirillov（苏联数学家，1936-，他是 Gelfand 的学生）1966 年的工作中。Gelfand-Kirillov 维数理论最早被系统发展是在 Borho 与 Kraft 1976 年的工作中。Gelfand-Kirillov 维数也被简称为 GK 维数。

Def（滤环与滤）给定环 R，若加群 $(R,+)$ 存在子群族 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足 (1) 任给自然数 i,j，有 $F_iF_j\subseteq F_{i+j}$；(2) 任给自然数 $i\le j$ 有 $F_i\subseteq F_j$；(3) $R=\bigcup_{n=0}^{\infty}F_n$，则称 R 是一个滤环（filtered ring），并称子群族 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是环 R 的一个滤（filtration）。

Rmk 这里 F_iF_j 表示集合 $\{ab\mid a\in F_i, b\in F_j\}$ 在加群 $(R,+)$ 中生成的子群，即 $F_iF_j=\{\sum_{k=1}^{n}a_kb_k \mid a_k\in F_i, b_k\in F_j, 1\le k\le n, n\in\mathbb{Z}_{>0}\}$。滤环定义中 (1) 表明子群族关于 R 运算的某种相容性，(2) 表明子群族 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ 关于指标递增，(3) 表明 R 可被子群族覆盖。

滤环的概念当然可以在代数上定义，只不过 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ 需添上线性结构。

Def（滤代数）设 k 是含幺交换环，A 为 k-代数。如果 A 的 k-子模族 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足 (1) $A_iA_j\subseteq A_{i+j}$，$\forall i,j\in\mathbb{N}$；(2) $A_i\subseteq A_j$，$\forall i\le j\in\mathbb{N}$；(3) $A=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$，则称 A 为一个滤代数（filtered algebra），并称子模族 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为代数 A 的一个滤。

Rmk 这里 A_iA_j 表示集合 $\{ab\mid a\in A_i, b\in A_j\}$ 在 k-模 A 中生成的子模。

E.g. 设 m 为正整数，F 是域，考虑域 F 上 m 元多项式环 $R=F[x_1,x_2,\dots,x_m]$，对每个自然数 n，记 V^n 是 R 中全体 n 次单项式生成的 F-子空间，那么 $V^0=F$，$V^1=\{k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_mx_m \mid k_1,k_2,\dots,k_m\in F\}$。一般地，对正整数 n，V^n 就是 R 中全体 n 次齐次多项式与零多项式构成的集合。易见对每个正整数 n，V^n 有一个基为全体首一 n 次单项式构成的集合，即 $\{x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_m^{i_m}\in R \mid i_1,i_2,\dots,i_m\in\mathbb{N}$ 且 $i_1+i_2+\cdots+i_m=n\}$，因为自然数 $i_1,i_2,\dots,i_m$ 满足整数方程 $X_1+X_2+\cdots+X_m=n$ 的自然数解有 C_{n+m-1}^{m-1} 个，所以作为线性空间，有 $\dim_F V^n=C_{n+m-1}^{m-1}$。对 $n=0$，有 $\dim_F V^0=1$，所以 $\dim_F V^n=C_{n+m-1}^{m-1}$，$\forall n\in\mathbb{N}$。对任给自然数 n，命 $R_n=\bigoplus_{i=0}^{n}V^i$，因为对每个固定的 $1\le i\le n$ 有 $V^i\cap\sum_{j\ne i}V^j=\{0\}$，所以这确实是直和，那么我们可以直接计算 R_n 的维数：$\dim_F R_n=1+\sum_{i=1}^{n}C_{i+m-1}^{m-1}=C_m^m+C_m^{m-1}+C_{m+1}^{m-1}+\cdots+C_{n+m-1}^{m-1}=C_{n+m}^m$，$\forall n\ge 1$。对 $n=0$ 的情形，$\dim_F R_0=1$，所以 $\dim_F R_n=C_{n+m}^m$，$\forall n\ge 0$。直接验证可得 $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 R 作为环（也是作为 F-代数）的一个滤。并且 $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的各分量维数导出映射 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$，$n\mapsto\dim_F R_n$，它可反映该滤的增长速度，我们之后会专门对这样的函数作讨论。在 $R=F[x_1,x_2,\dots,x_m]$ 这个例子中，由于 $f(n)=C_{n+m}^m$，$\forall n\ge 0$，故由 $C_{n+m}^m=\frac{(n+m)!}{n!m!}=\frac{1}{m!}(n+m)(n+m-1)\cdots(n+1)$ 我们可以看到，若取多项式 $p(x)=\frac{1}{m!}(x+m)(x+m-1)\cdots(x+1)$ 这一 m 次多项式，就有 $f(n)=p(n)$，$\forall n\ge 0$，也就是说这个滤的增长速度可以用某个多项式衡量，它是多项式增长的。

一般地，对域F上的一个有限生成代数（后面我们会正式称为仿射代数），我们都有办法去构造一个滤 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 使 $\dim_F A_n < +\infty$，进而可用函数 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto \dim_F A_n$ 去衡量它的增长速度。具体地，我们引入生成元集的标准滤的概念。

Def（标准滤）给定交换环 K，A 为 K 代数且有生成元集 $\{x_i \mid i\in I\}$，这里指标集 I 非空。我们把形如 $k x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$，$i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$，$n \geq 1$ 这样的元素称为 A 关于该生成元集长度为 n 的字（word），我们称形如 $k1$ 的元素为 A 关于该生成元集长度为 0 的字，其中 $k\in K$。对每个自然数 n，记 F_n 为 A 中所有长度不超过 n 的字生成的子群（这里指加法群 $(A,+)$ 的子群，也即实际上是 K-模 A 的一个子模），那么可直接验证 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为所有 K 代数的一个滤，我们称为代数 A 关于该生成元集的一个标准滤（standard filtration）。

Ex. 对 $R = F[x_1, x_2, \ldots, x_m]$，我们先前所构造的滤 $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ 就是 R 作为 F 代数的一个标准滤。

对有限生成的代数，我们称为仿射代数（affine algebra），那么对域 F 上的仿射代数 A，它的标准滤（关于某个有限生成元集的）$\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足每个 F_n 是有限维线性空间（因为长度不超过 n 的字一共只有有限可能），于是我们可引入函数 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto \dim_F F_n$ 来观察该滤的增长速度。因为我们这里的 f 是针对域上某个代数的滤来说的，故 f 应当加以限制：当 n 充分大时，有 $f(n) \geq 1$。下面我们考虑这样的函数，并发展一些基本性质来为后续工作做准备。

Def（多项式增长函数）设函数 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 满足当 n 充分大后 $f(n) \geq 1$。如果存在实数 c 使当 n 充分大后 $f(n) \leq n^c$，则称 f 是多项式增长函数，否则称 f 不是多项式增长的。

注 若 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 是多项式增长的，那么集合 $\{c \in \mathbb{R} \mid 当 n 充分大时 f(n) \leq n^c\}$ 非空，该集合明显是有下界的，因为对 $c \leq -1$，有 $f(n) \geq 1 > n^{-1} \geq n^c$（当 n 充分大时），所以该集合作为 $\mathbb{R}$ 的子集有下界，从而由确界原理，上述集合有最大下界，即下确界，记 $\gamma(f) \triangleq \inf\{c \in \mathbb{R} \mid 当 n 充分大时有 f(n) \leq n^c\}$，称为 f 的次数（degree）。若 f 不是多项式增长的，定义其次数为 $\gamma(f) = +\infty$。易证 $\gamma(f) \geq 0$。

对函数 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$，满足当 n 充分大时 $f(n) \geq 1$，明显前面的定义在实际计算中并不便利；为此我们有：

Prop 设 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 满足当 n 充分大时有 $f(n) \geq 1$，那么 $\gamma(f) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln f(n)}{\ln n}$。

证 因当 n 充分大时 $f(n) \geq 1$，故 $\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln f(n)}{\ln n}$ 定义合理。

下面是关于函数 f 次数的基本性质：

Prop 设 $f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 满足当 n 充分大时有 $f(n), g(n) \geq 1$，则

$\gamma(f+g) = \sup\{\gamma(f), \gamma(g)\}$.

$\gamma(fg) \leq \gamma(f) + \gamma(g)$.

若存在 $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ 使当 n 充分大时有 $f(n) = p(n)$，则 $\gamma(f) = \deg p$.

若 $\gamma(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln f(n)}{\ln n}$，则 $\gamma(fg) = \gamma(f) + \gamma(g)$；当 f, g 均为多项式函数时，(3) 说明这就是次数公式

(5) 如果存在自然数 a,b 使 $g(n) \le f(an+b)$（当 n 充分大时），那么 $\gamma(g) \le \gamma(f)$.

<u>Rmk</u> 一般地，(2)中不等号可能是严格的，例如取 $f(n)=\begin{cases} n^4, & n\text{为奇数} \\ n^5, & n\text{为偶数} \end{cases}$，$g(n)=\begin{cases} n^5, & n\text{为奇数} \\ n^4, & n\text{为偶数} \end{cases}$，此时 $\gamma(f)=5$，$\gamma(g)=5$，$\gamma(fg)=9<10=\gamma(f)+\gamma(g)$. 在(5)证明中，对 $a=b=0$ 的情形需要利用 $\gamma(f)\ge 0$ 来处理. 这是(3)的作用，我们将 $\gamma(f)$ 称为 f 的次数是自然的.

为之后叙述方便，我们再引入指数增长函数的概念. 如果函数 $f: \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 满足存在实数 $a>1$ 使当 n 充分大时有 $f(n)\ge a^n$，则称 f 是指数增长的.

之前我们针对代数的生成元集定义了标准滤的概念，对域上代数我们也有标准滤：

<u>Def</u> 设 A 是域 F 上的代数，M 为右 A-模，并设 A 作为 F 代数有滤 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$，M 作为右 A-模有滤 $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$（具体地，右 A-模 M 的滤是指 F-线性空间 M 的一个子空间族 $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$，满足对任给自然数 i,j 有 $M_iA_j\subseteq M_{i+j}$；对任给自然数 $i<j$ 有 $M_i\subseteq M_j$；对 M 有 $M=\bigcup_{n} M_n$. 称 $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为滤代数 A 上的滤模）. 如果 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足对任给自然数 n 有 $A_1^n=A_n$（此处当 $n=0$ 时 $A_1^0=F1_A$，当 n 为正整数时 A_1^n 表示集合 $\{x_1x_2\cdots x_n \mid x_1,\ldots,x_n\in A_1\}$ 在 M 中生成的 F-子空间），那么我们称滤 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是标准的. 如果滤 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足 $A_0=F1_A$ 且 $\dim_F A_n<+\infty, \forall n\in\mathbb{N}$，则称滤 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是有限维的（finite dimensional）. 如果滤 $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足对任给自然数 n，$M_n=M_0A_n$，则称该滤是标准的. 如果滤 $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足对任何自然数 n，$\dim_F M_n$ 有限，则称该滤是有限维的.

<u>Rmk</u> 对域 F 上的仿射代数 A，它作为 F 代数总是由某个有限维子空间 V 生成的. 因为如果 $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ 是 A 作为代数的一个生成元集，那么 $V=Fx_1+Fx_2+\cdots+Fx_n$ 也是代数 A 的一个生成元集. 反之，如果一个域 F 上的代数可由某个有限维子空间生成，那么它必是仿射代数. 因此一个域 F 上的代数 A 是仿射代数当且仅当它作为代数可由某个有限维子空间生成. 对仿射代数 A，我们把生成 A 的有限维子空间称为 A 的生成子空间（generating subspace）. 因为生成子空间是生成元集，故关于该生成元集有标准滤 $A_0=F1_A$，$A_n=\sum_{i\le n} V^i$，这里 V^i 是集合 $\{v_1v_2\cdots v_i \mid v_1,v_2,\ldots,v_i\}$ 在线性空间 A 中生成的子空间. 易见每个 A_n 作为线性空间是有限生成的，所以是有限维的. 而 $A_1=F1_A+V$，易验证 $A_1^n=A_n, \forall n\in\mathbb{N}$，故 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为代数 A 的有限维标准滤. 如果仿射代数 A 上的右模 M 是有限生成的，那么它存在有限维子空间 M_0 使 $M=M_0A$，称 M_0 为 M 的生成子空间（注意我们这里的 M 可以是零模，之后我们是针对仿射代数上的非零有限生成模来定义 GK 维数）. 于是 M 有标准有限维滤 $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$，其中 $M_n=M_0A_n, \forall n\in\mathbb{N}$.

下面我们定义域上仿射代数 A 与非零有限生成右模 M 的 GK 维数.

<u>Def</u>（仿射代数的 GK 维数以及仿射代数上非零有限生成模的 GK 维数）设 A 是域 F 上仿射代数，M 是右 A-模且非零有限生成. 设 V 是 A 的一个生成子空间，M_0 是 M 的一个生成子空间，命 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$，$n\mapsto \dim_F A_n$；$g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$，$n\mapsto\dim_F M_n$；这里 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是由生成子空间 V 决定的标准有限维滤；

$\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是由 M_0 决定的标准有限维滤。因为 A 与 M 作为线性空间非零，故当 n 充分大时 $\dim_F A_n, \dim_F M_n \geq 1$，于是 $\gamma(f)$ 与 $\gamma(g)$ 有意义，称 $\gamma(f)$ 为仿射代数 A 的 Gelfand-Kirillov 维数，记 $\mathrm{GKdim}(A)=\gamma(f)$，$\gamma(g)$ 为模 M 的 Gelfand-Kirillov 维数，$\mathrm{GKdim}(M)=\gamma(g)$；Gelfand-Kirillov 维数也简称为 GK 维数。

对于上述定义很自然会有两个问题：(1) GK 维数是否定义合理？(2) 若将仿射代数 A 视作左 A-模，它是非零有限生成的，那么 A 作为代数的 GK 维数与 A 作为模的 GK 维数是否一致？我们下面就给这两个问题肯定的答复。

Prop (GK 维数定义合理) 设 A 是域 F 上仿射代数，M 为非零有限生成左 A-模，则 $\mathrm{GKdim}(A)$ 与 $\mathrm{GKdim}(M)$ 是定义合理的，具体地，它们不依赖于生成子空间 V 与 M_0 的选取。

Pf: 设仿射代数 A 有生成子空间 V, V'，M 有生成子空间 M_0, M_0'。设 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 V 决定的标准有限维滤，$\{A_n'\}_{n=0}^{\infty}$ 是 V' 决定的标准有限维滤，$\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 M_0 决定的标准有限维滤，$\{M_n'\}_{n=0}^{\infty}$ 是 M_0' 决定的标准有限维滤。因为 $A=\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$，所以存在自然数 m 使 $V' \subseteq A_m$。对任给自然数 n，及 $0 \leq j \leq n$，有 $(V')^j \subseteq A_{mj} \subseteq A_{mn}$，所以 $A_n' = \sum_{j=0}^{n} (V')^j \subseteq A_{mn}$。记 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto \dim_F A_n$，$f': \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto \dim_F A_n'$，则 $f'(n) \leq f(mn), \forall n \geq 0$，因此 $\gamma(f') \leq \gamma(f)$。同理可证 $\gamma(f) \leq \gamma(f')$，这表明 $\gamma(f)=\gamma(f')$（注意这里 f 与 f' 的实数可以为 $+\infty$）。因此仿射代数 A 的 GK 维数定义合理。设 $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto \dim_F M_n$，$g': \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto \dim_F M_n'$，我们说明 $\gamma(g)=\gamma(g')$。因为 $M=\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$，所以存在自然数 s 使 $M_0' \subseteq M_s$，结合前面的 $A_n' \subseteq A_{mn}, \forall n \geq 0$ 知 $M_n' = A_n' M_0' \subseteq A_{mn} M_s \subseteq M_{s+mn}, \forall n \geq 0$。因此 $g'(n) \leq g(s+mn), \forall n \geq 0$，从而 $\gamma(g') \leq \gamma(g)$。同理可得 $\gamma(g) \leq \gamma(g')$。这就证明了非零有限生成模 M 的 GK 维数定义合理。□

Rmk: 如果域 F 上仿射代数 A 的生成子空间 V 满足 $1_A \in V$，那么由 V 决定的标准有限维滤 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足 $A_n = V^n, \forall n \geq 0$，此时 $\dim_F A_n = \dim_F V^n, \forall n \geq 0$，表明 $\mathrm{GKdim}(A) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \dim_F A_n}{\ln n} = \varlimsup_{n\to\infty} \log_n(\dim_F V^n)$。当生成子空间 V 不含 1_A 的时候此结论不成立，例如对域 F 上的 m 元多项式代数 $R=F[x_1,x_2,\dots,x_m]$，$V=\{k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_mx_m \mid k_1,k_2,\dots,k_m \in F\}$ 是 R 作为 F 代数的一个生成子空间，那么由 V 决定的标准有限维滤 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足 $\dim_F A_n = C_{m+n}^{m}$，而 $\dim_F V^n = C_{m+n-1}^{m-1}$。易知 $\mathrm{GKdim}(A)=m$，$\varlimsup_{n\to\infty} \log_n(\dim_F V^n) = m-1$，所以当 $1_A \notin V$ 时无法使用 $\varlimsup_{n\to\infty} \log_n(\dim_F V^n)$ 计算 A 的 GK 维数。一般将零模的 GK 维数定义为 $-\infty$。

E.g. (域上 m 元多项式代数的 GK 维数) 设 F 是域，$m \geq 1$，则 $R=F[x_1,x_2,\dots,x_m]$ 有 GK 维数 $\mathrm{GKdim}(R)=m$。其推导与上述过程相同。同时我们看到对任何正整数 m，存在仿射代数 A 使得 $\mathrm{GKdim}(A)=m$。

前面定义了域 F 上仿射代数 A 与 A 上非零有限生成模 M 的 GK 维数，并看到 GK 维数定义合理。A 本身自然可视作有限生成左 A-模 ${}_AA$，下面我们说明 A 作为代数与左 A-模的 GK 维数一致。

Prop: 设 F 为域，A 为 F 上仿射代数，则 $\mathrm{GKdim}(A)=\mathrm{GKdim}({}_AA)$。

Pf: 设 V 是仿射代数 A 的一个生成子空间，取 $M_0 = F1_A$，那么 M_0 是 A 作为左 A-模的一个生成子空间，于是 V 决定的标准有限维滤 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 与 M_0 决定的标准有限维滤 $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足 $M_n = A_n, \forall n \geq 0$，从而

$\mathrm{GKdim}(A_n) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln(\dim_F M_n)}{\ln n} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln(\dim_F A_n)}{\ln n} = \mathrm{GKdim} A$. □

对于GK维数自然还可以提出:若A是仿射代数,A'是A的仿射子代数,是否$\mathrm{GKdim}(A')\le \mathrm{GKdim}(A)$?若仿射代数A上非零有限生成模M有子模M'也是非零有限生成的,是否有$\mathrm{GKdim}(M')\le \mathrm{GKdim}(M)$?下面给出肯定的回答.

Prop 设F是域,A为F-仿射代数,M为左A-模且是有限生成模,则(1)对A任何仿射子代数A',有$\mathrm{GKdim}(A')\le \mathrm{GKdim}(A)$;(2)对M任何非零有限生成子模M',有$\mathrm{GKdim}(M')\le \mathrm{GKdim}(M)$.

Pf: (1) 我们总可选取A'的生成子空间V'与A的生成子空间V使$V'\subseteq V$,所以对应的标准有限维滤满足$\dim_F A_n' \le \dim_F A_n, \forall n\ge 0$,从而$\mathrm{GKdim}(A')\le \mathrm{GKdim}(A)$.

(2) 同样可选取M'的生成子空间M_0'与M的生成子空间M_0使$M_0'\subseteq M_0$,由此可得$\mathrm{GKdim}(M')\le \mathrm{GKdim}(M)$. □

下面我们将给出仿射代数相伴分次环的GK维数性质,在此之前让我们回忆一下滤环的相伴分次环的概念.

Def (分次环,相伴分次环) 若环T满足加群(T,+)有子群族$\{T_n\}_{n=0}^\infty$满足对任给自然数i,j有$T_iT_j\subseteq T_{i+j}$且$T=\bigoplus_{n=0}^\infty T_n$,则称T是一个分次环(graded ring),子群族$\{T_n\}_{n=0}^\infty$称为T的一个分次(grading). 易见分次环T有天然的滤,令$F_i=\bigoplus_{n=0}^{i} T_n$,则$\{F_i\}_{i=0}^\infty$是T的一个滤. 反之,设环S是滤环,$\{F_n\}_{n=0}^\infty$是S作为环的一个滤,则可构造一分次环. 具体地,令$T_0=F_0/\{0\}$,$T_n=F_n/F_{n-1}, \forall n\ge 1$(这里$T_n$为商群),置$T=\bigoplus_{n=0}^\infty T_n$,则T上有天然加法运算. 下面在T上定义乘法:$(\bar{a}_n)_{n=0}^\infty(\bar{b}_n)_{n=0}^\infty=\left(\sum_{i+j=k}\overline{a_ib_j}\right)_{k=0}^\infty$,易见$(T,+,\cdot)$构成环,称为滤环S的相伴分次环(associated graded ring),记作grS.

Rmk 如果A是含幺交换环K上的滤代数,那么A的相伴分次环grA上有K-代数结构. 如果A是域K上仿射代数,$\{A_n\}_{n=0}^\infty$是A的一个标准有限维滤,设grA是关于$\{A_n\}_{n=0}^\infty$的相伴分次环,那么grA是仿射代数且A_1/A_0给出grA的一个生成子空间(具体地,记$\iota: A_1/A_0\to \mathrm{gr}A$是标准映射,即$\iota(\bar{a})$为指标1处分量为$\bar{a}$,其余分量为零的元素,那么$\iota(A_1/A_0)$是grA的一个生成子空间).

Prop 设F是域,F-代数A是仿射代数,$\{A_n\}_{n=0}^\infty$为A作为F-代数的标准有限维滤,那么$\mathrm{GKdim}(A)=\mathrm{GKdim}(\mathrm{gr}A)$,这里grA表示关于滤$\{A_n\}_{n=0}^\infty$的相伴分次环.

Pf: 令$V=A_1$,则V是A的生成子空间且$F1=A_0\subseteq V$,表明$\mathrm{GKdim}(A)=\varlimsup_{n\to\infty}\log_n(\dim_F V^n)$,这里$V^n=A_n, \forall n\ge 0$. 而$A_1/A_0$给出grA的一个生成子空间$\iota(A_1/A_0)$,这里$\iota: A_1/A_0\to \mathrm{gr}A$为标准映射,它决定的标准有限维滤满足$\dim_F\sum_{k=0}^{n}(\iota(A_1/A_0))^k=\dim_F A_0+\dim_F A_1/A_0+\cdots+\dim_F A_n/A_{n-1}=\dim_F A_n$,从而$\mathrm{GKdim}(\mathrm{gr}A)=\varlimsup_{n\to\infty}\log_n\left(\dim_F\sum_{k=0}^{n}(\iota(A_1/A_0))^k\right)=\varlimsup_{n\to\infty}\log_n(\dim_F A_n)=\mathrm{GKdim}(A)$,这就证明了A与grA有相同的GK维数. □

对滤环S上的滤模M,设S有滤$\{S_n\}_{n=0}^\infty$,M有滤$\{M_n\}_{n=0}^\infty$,我们可以定义相伴分次环grS上的分次模grM. 在此之前先回顾一下分次模的概念.

Def (分次模) 设T为分次环,有分次$\{T_n\}_{n=0}^\infty$,如果左T-模M满足存在(M,+)的子群族$\{M_n\}_{n=0}^\infty$使$M=\bigoplus M_n$

且对任何自然数 i,j 有 $M_iT_j\subseteq M_{i+j}$，则称 M 是分次模 (graded module)，称 $\{M_i\}_{i=0}^{\infty}$ 为 M 上的分次 (grading).

Rmk 类似于滤环 S 的相伴分次环 $\mathrm{gr}S$，我们可定义 $\mathrm{gr}S$ 上的分次模 $\mathrm{gr}M$：记 $(\mathrm{gr}M)_0=M_0/\{0\}$，对正整数 n，记 $(\mathrm{gr}M)_n=M_n/M_{n-1}$，命 $\mathrm{gr}M=\bigoplus_{n=0}^{\infty}(\mathrm{gr}M)_n$，这里 M 是滤模，$\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 M 的一个滤. 那么 $\mathrm{gr}M$ 上有明确的加法结构，我们记滤环 S 的滤为 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$，那么 $\mathrm{gr}S=\bigoplus_{n=0}^{\infty}(\mathrm{gr}S)_n$，其中 $(\mathrm{gr}S)_0=F_0/\{0\}$，$(\mathrm{gr}S)_n=F_n/F_{n-1}$，$\forall n\geq 1$. 定义 $\mathrm{gr}S$ 在 $\mathrm{gr}M$ 上的右数乘作用为 $\mathrm{gr}M\times\mathrm{gr}S\longrightarrow\mathrm{gr}M$，$\left((\overline{m_i})_{i=0}^{\infty},(\overline{q_j})_{j=0}^{\infty}\right)\longmapsto\left(\sum_{i+j=k}\overline{m_iq_j}\right)_{k=0}^{\infty}$，易验证 $\mathrm{gr}M$ 是右 $\mathrm{gr}S$-模. 因为 S 未必是含幺环所以 $\mathrm{gr}S$ 未必含幺，因此 $\mathrm{gr}M$ 可能不是含幺环上的模. 这里的 $\mathrm{gr}M$ 是分次模.

Prop 如果域 F 上仿射代数 A 有标准有限维滤 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$，M 为非零有限生成右 A-模有标准有限维滤 $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$，记 $\mathrm{gr}A$ 是关于滤 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的相伴分次环，$\mathrm{gr}M$ 是关于 $\mathrm{gr}A$ 与滤 $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的分次模，那么 $\mathrm{gr}M$ 为 $\mathrm{gr}A$ 上非零有限生成模且 $\mathrm{GKdim}(M)=\mathrm{GKdim}(\mathrm{gr}M)$.

Pf: 我们已经看到 A 是以 $V=A_1$ 为生成子空间的仿射代数，由 $M\neq\{0\}$ 知 $M_0\neq\{0\}$ 且为 M 的生成子空间，记 $i_0: M_0/\{0\}\longrightarrow\mathrm{gr}M$ 是标准嵌入映射，那么 $i_0(M_0/\{0\})$ 是 $\mathrm{gr}M$ 的一个生成元集 (作为右 $\mathrm{gr}A$-模)，为 $\mathrm{gr}M$ 的一个生成子空间，而它决定的标准有限维滤就是 $\left\{i_0(M_0/\{0\})\bigoplus_{k=0}^{n}i_1(A_1/A_0)^k\right\}_{n=0}^{\infty}$，其中 $i_1: A_1/A_0\longrightarrow\mathrm{gr}A$ 是标准嵌入映射. 且 $\dim_F i_0(M_0/\{0\})\sum_{k=0}^{n}i_1(A_1/A_0)^k=\dim_F M_0+\dim_F M_1/M_0+\cdots+\dim_F M_n/M_{n-1}=\dim_F M_0+\dim_F M_1-\dim_F M_0+\cdots+\dim_F M_n-\dim_F M_{n-1}=\dim_F M_n$，这说明 $\mathrm{GKdim}(\mathrm{gr}M)=\mathrm{GKdim}(M)$. □

下面我们再构造一个 GK 维数为 $+\infty$ 的例子，先回顾自由(结合)代数的概念.

Def (自由代数) 设 K 是含幺交换环，如果 K-代数 F 满足存在子集 X 使得对任给 K-代数 A 与映射 $f: X\to A$，存在唯一的 K-代数同态 $\hat{f}: F\longrightarrow A$ 使 $\hat{f}i=f$，即下图交换:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "\exists!\hat{f}"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

则称 F 是自由 K-(结合)代数 (free associative algebra)，称 X 是自由生成元集，记 F 为 $K\langle X\rangle$. 当 X 是有限集 $X=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$ 时记 $K\langle X\rangle$ 为 $K\langle x_1,x_2,\dots,x_m\rangle$.

Rmk 对任给集合 X，以 X 为自由生成元集的 K-代数存在且在 K-代数同构意义下唯一. 先说明存在性. 当 $X=\varnothing$ 时，取 $F=K$ 即可. 下设 $X\neq\varnothing$，设 M 是以 X 为基的自由幺半群，F 是以 M 为基的自由 K-模，可在 F 上定义乘法:

$$\left(\sum_{a\in M}k_aa\right)\left(\sum_{b\in M}k_bb\right)=\sum_{c\in M}\left(\sum_{ab=c}k_ak_b\right)c,\quad\forall\sum_{a\in M}k_aa,\ \sum_{b\in M}k_bb\in F.$$

易验证 K-模 F 关于上述乘法构成 K-代数. 记 $i_1: X\longrightarrow M$ 与 $i_2: M\longrightarrow F$ 都是标准嵌入，那么记 $i=i_2i_1$. 对于映射 $f: X\to A$，故存在幺半群同态 $\tilde{f}: M\to A$ 使 $\tilde{f}i_1=f$，且这样的 $\tilde{f}$ 唯一. 进而存在 K-模同态 $\hat{f}: F\to A$ 使 $\hat{f}i_2=\tilde{f}$，易验证 $\hat{f}$ 为 K-代数同态，下证 $\hat{f}$ 唯一. 如果还有 K-代数同态 $g: F\longrightarrow A$ 使 $gi=f$，易得 $g|_M=\tilde{f}$，从而 $\hat{f}=g$. 于是 F 为以 X 为自由生成元集的自由代数. 利用泛性质易证以 X 为自由生成元集的 K-代数在 K-代数同构意义下唯一. 由证明过程易见 F 作为 K-代数有生成元集 X.

E.g. 设F是域，$m\ge 2$，则自由代数 $A=F\langle x_1,x_2,\dots,x_m\rangle$ 的GK维数为 $+\infty$.

Pf: 易知A有生成子空间 $V=\{k_1x_1+k_2x_2+\dots+k_mx_m \mid 1\le i\le m, k_i\in F\}$，记 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为由V决定的标准有限维滤，那么 $A_n=F1_A+V+\dots+V^n, \forall n\ge 1$，其中 V^n 有基 $\{y_1y_2\cdots y_n \mid y_k\in\{x_1,x_2,\dots,x_m\}\}$，即 $\dim_F V^n=m^n$. 易知 $F1_A+V+\dots+V^n$ 为直和，所以 $\dim_F A_n=1+m+m^2+\dots+m^n\ge 1+2+2^2+\dots+2^n=2^{n+1}-1$，于是由 $\frac{\ln(2^{n+1}-1)}{\ln n}$ 无上界知 $\mathrm{GKdim}(A)=+\infty$. □

之前我们在仿射代数的层面上定义了GK维数，下面我们对任何域上代数都定义GK维数.

Def (代数的GK维数) 设A是域F上代数，定义 $\mathrm{GKdim}(A)=\sup\{\mathrm{GKdim}B \mid B为A的仿射子代数\}$，称 $\mathrm{GKdim}(A)$ 为代数A的GK维数.

Rmk 一个自然的问题是上述是否确实是仿射代数上GK维数的推广. 之前已证明对仿射代数A，A的任何仿射子代数B满足 $\mathrm{GKdim}(B)\le \mathrm{GKdim}(A)$，所以当A是仿射代数时，A作为代数的GK维数与A作为仿射代数的GK维数一致. 易见代数的子代数GK维数不超过整个代数的GK维数.

Prop 设F是域，A是F-代数，则 $\mathrm{GKdim}(A)=\sup\{\varlimsup_{n\to\infty}\log_n(\dim_F V^n) \mid V是A的非零有限维子空间\}$.

Pf: 对A的任何仿射子代数B，设B的生成子空间为W，不妨设 $1_A=1_B\in W$，那么 $\mathrm{GKdim}(B)=\varlimsup_{n\to\infty}\log_n(\dim_F W^n)\le\sup\{\varlimsup_{n\to\infty}\log_n(\dim_F V^n) \mid V\ne\{0\}为A有限维子空间\}$. 任取A的非零有限维子空间V，存在含 1_A 的非零有限维子空间U使 $V\subseteq U$，那么 $\varlimsup_{n\to\infty}\log_n(\dim_F V^n)\le\varlimsup_{n\to\infty}\log_n(\dim_F U^n)$；设U在A中生成子代数为B，则B为A的仿射子代数且 $\mathrm{GKdim}(B)=\varlimsup_{n\to\infty}\log_n(\dim_F U^n)$，所以 $\sup\{\varlimsup_{n\to\infty}\log_n(\dim_F V^n) \mid V\ne\{0\}为A有限维子空间\}\le \mathrm{GKdim}(A)$. 由此得 $\mathrm{GKdim}A=\sup\{\varlimsup_{n\to\infty}\log_n(\dim_F V^n) \mid V为A非零有限维子空间\}$. □

类似地，对于F-代数A上的模 $M\ne\{0\}$，我们也可将GK维数的概念定义在M上.

Def 设F是域，A是F-代数，M是非零左A-模，称 $\mathrm{GKdim}(M)=\sup\{\mathrm{GKdim}(N_B) \mid 这里B为A的仿射子代数，N为M的非零有限生成B-子模\}$ 为M的GK维数. 若 $M=\{0\}$，定义 $\mathrm{GKdim}(M)=-\infty$.

Rmk 类似代数的情形，可验证当A仿射且M有限生成时，与原先仿射代数上非零有限生成模的GK维数一致.

对于维数的概念一个自然的问题是搞清楚它可能的取值. 由GK维数的定义立即看到对域F上任何代数A以及左A-模M都有 $\mathrm{GKdim}(A)\ge 0$ 且 $\mathrm{GKdim}(M)\ge 0$. 如果A是有限维F-代数，明显有 $\mathrm{GKdim}(A)=0$. 下面我们引入局部有限维模的概念，由此给出仿射代数上GK维数是零的模之刻画.

Def (局部有限维模) 设F是域，A是F-代数，M是A-模，如果M的任何有限生成子模N作为F-线性空间维数有限，则称M是局部有限维的 (locally finite dimensional).

E.g. 设F是域，$N=F[x]$ 是域F上一元多项式代数，$\frac{d}{dx}: F[x]\to F[x], \sum_{i=0}^{n}a_ix^i\mapsto\frac{d}{dx}\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=a_1+2a_2x+\dots+na_nx^{n-1}$ 是F[x]上求导算子，易知 $\frac{d}{dx}$ 是线性空间F[x]上线性变换，定义 $F[\frac{d}{dx}]=\{f(\frac{d}{dx})=a_n(\frac{d}{dx})^n+a_{n-1}(\frac{d}{dx})^{n-1}+\dots+a_1\frac{d}{dx}+a_0\mathrm{id} \mid f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0\in F[x]\}$，它是F-代数 $\mathrm{Hom}_F(F[x],F[x])$ 的子代数，记 $R=F[\frac{d}{dx}]$，那么 $N=F[x]$ 可视作左R-模，对N的任何有限生成R-子模 N'，设 $N'=$

$Rf_1(x)+Rf_2(x)+\cdots+Rf_m(x)$，因为每个 $f_i(x)$ 都存在某个 k_i 使 $f_i^{(k_i)}(x)$（这里指多项式 f_i 的形式导数）为零多项式，因此 N 作为 F-线性空间可由有限个多项式 F-线性张成，于是 N 作为 F-线性空间维数有限，所以 R-模 N 是局部有限维模（并注意 N 本身是无限维 F-线性空间）。

Lem 设 A 是域 F 上仿射代数，M 为非零右 A-模，那么对任何 A 的仿射子代数 B 及右 B-模 M 的非零有限生成子模 N，存在有限生成 A-子模 $\hat{N}$ 使 $\mathrm{GKdim}(N_B)\le\mathrm{GKdim}(\hat{N}_A)$。特别地，$\mathrm{GKdim}(M_A)=\sup\{\mathrm{GKdim}(N_A)\mid N$ 是 M 的非零有限生成 A-子模$\}$。

Pf. 设 N_B 是 M_B 的非零有限生成右 B-模，设 $x_1,x_2,\dots,x_m\in N$ 使 $N=x_1B+x_2B+\cdots+x_mB$，取 $\hat{N}=x_1A+x_2A+\cdots+x_mA$，则 $\hat{N}$ 是非零有限生成右 A-模，且 $N\subseteq\hat{N}$。取 $N_0=Fx_1+Fx_2+\cdots+Fx_m$，那么 N_0 是 N 的有限维生成子空间，设 $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 B 的一个标准有限维滤，易构造 A 的标准有限维滤 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 使 $B_n\subseteq A_n,\forall n\ge0$。由 $N_n=N_0B_n$ 及 $\hat{N}_n=N_0A_n$ 给出 N 的标准有限维滤 $\{N_n\}_{n=0}^{\infty}$ 及 $\hat{N}$ 的标准有限维滤 $\{\hat{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$，那么对每个 $n\ge0$，N_n 为 $\hat{N}_n$ 的 F-子空间，所以 $\dim_F N_n\le\dim_F\hat{N}_n,\forall n\ge0$，进而 $\mathrm{GKdim}(N_B)\le\mathrm{GKdim}(\hat{N}_A)$。□

Rmk 本观察表明当 A 为仿射代数时，定义模 GK 维数取上确界的集合范围可缩小至仅考虑 A 上非零有限生成子模即可。

Exp（仿射代数的子代数未必是仿射代数）设 F 是域，则 $F[x,y]$ 是仿射代数，它有子代数 $F[x,x^2y,\dots,x^ny^{n-1},\dots]$。我们说明 $F[x,x^2y,\dots,x^ny^{n-1},\dots]$ 不是 Noether 环，那么 $F[x,x^2y,\dots]$ 不是仿射代数。下面验证 $F[x,x^2y,\dots,x^ny^{n-1},\dots]$ 的理想升链 $(x)\subseteq(x^2y,x)\subseteq(x^3y^2,x^2y,x)\subseteq\cdots\subseteq(x^{n+1}y^n,x^ny^{n-1},\dots,x^2y,x)\subseteq\cdots$ 是严格的。只需验证对任何正整数 n，$x^{n+1}y^n\notin(x,\dots,x^ny^{n-1})$。假设 $x^{n+1}y^n\in(x,x^2y,\dots,x^ny^{n-1})$，那么存在 $f_1(x,y),f_2(x,y),\dots,f_n(x,y)\in F[x,x^2y,\dots,x^ny^{n-1},\dots]$ 使 $x^{n+1}y^n=f_1(x,y)x+f_2(x,y)x^2y+\cdots+f_n(x,y)x^ny^{n-1}$。因为每个 $f_i(x,y)$ 除常数项外，每个单项式 x 幂指数严格高于 y 幂指数，所以 $f_i(x,y)x^iy^{i-1}$ 展开式中除 x^iy^{i-1} 同类项，其余单项式若非零，则 x 幂指数至少比 y 幂指数多 2，于是等式 $x^{n+1}y^n=f_1(x,y)x+\cdots+f_n(x,y)x^ny^{n-1}$ 导出矛盾。进而 $F[x,\dots,x^ny^{n-1},\dots]$ 有理想严格升链 $(x)\subsetneq(x,x^2y)\subsetneq\cdots\subsetneq(x,x^2y,\dots,x^ny^{n-1},\dots)\subsetneq\cdots$，这表明 $F[x,x^2y,\dots,x^ny^{n-1},\dots]$ 不是 Noether 环，从而它作为仿射代数 $F[x,y]$ 的子代数不是仿射代数。

Prop 设 F 是域，A 是仿射 F-代数，M_A 是非零右 A-模，则 (1) $\mathrm{GKdim}(M_A)=0\iff M$ 是局部有限维模；(2) 如果 $\mathrm{GKdim}(M_A)>0$，则 $\mathrm{GKdim}(M_A)\ge1$。特别地，对仿射代数 A，$\mathrm{GKdim}(A)=0\iff A$ 作为线性空间维数有限。

Pf. (1) 易知 $\mathrm{GKdim}(M_A)=0\iff$ 对任何非零有限生成的 A-子模 N 有 $\mathrm{GKdim}(N_A)=0$。下面我们说明对 M 的任何非零有限生成子模 N_A，$\mathrm{GKdim}(N_A)=0$ 当且仅当 N 作为 F-线性空间维数有限。一旦证明该断言我们立即得到 $\mathrm{GKdim}(M_A)=0\iff M$ 是局部有限维模。如果 N 作为 F-线性空间维数有限，设 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 A 的标准有限维滤，$\{N_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 N 的标准有限维滤，那么 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(\dim_F N_n)}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(\dim_F N_n)}{\ln n}=0$，故 $\mathrm{GKdim}(N_A)=0$。反设非零有限生成模 $N_A\le M_A$ 满足 $\mathrm{GKdim}(N_A)=0$，我们证明存在正整数 k 使 $N_k=N_{k+1}$，这里 $\{N_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 N 的有限维标准滤。若不然，则对任给自然数 n 有 $N_n\subsetneq N_{n+1}$，进而 $\dim_F N_n\ge n,\forall n\ge0$，这表明 $\mathrm{GKdim}(N_A)\ge1$，

这与 $\mathrm{GKdim}(N_A)=0$ 矛盾. 所以存在自然数 i_0 使 $N_{i_0}=N_{i_0+1}$; 下证 $N_{i_0}=N_{i_0+1}=N_{i_0+2}=\cdots$. 任取 $j\geq i_0$, 我们说明 $N_j=N_{j+1}$. 只需验证 $N_{j+1}\subseteq N_j$. 首先 $N_{j+1}=N_0A_{j+1}=N_0(A_1)^{j+1}=N_0A_{i_0+1}(A_1)^{j-i_0}\subseteq N_{i_0+1}(A_1)^{j-i_0}=N_{i_0}(A_1)^{j-i_0}=N_0A_{j-i_0}\subseteq N_j$, 所以 $N_{j+1}=N_j$, $\forall j\geq i_0$. 从而 $N=N_{i_0}$, 于是 $\dim_F N=\dim_F N_{i_0}$ 有限, 故 N 作为 F-线性空间维数有限. 进而我们得到 $\mathrm{GKdim}(M_A)=0 \Leftrightarrow$ 对 M 的任何非零有限生成子模 N_A, N_A 作为 F-线性空间维数有限 $\Leftrightarrow$ M_A 是局部有限维模, 这就证明了(1).

(2) 如果 $\mathrm{GKdim}(M_A)>0$, 那么 M_A 有非零有限生成子模 N_A 使 $\mathrm{GKdim}(N_A)>0$. 设 N_A 有标准有限维滤 (N_n), 那么 $N_0\subsetneq N_1\subsetneq N_2\subsetneq\cdots$, 进而 $\mathrm{GKdim}(N_A)\geq 1$; 所以 $\mathrm{GKdim}(M_A)\geq 1$. □

Rmk. 如果 A 是仿射代数, A 是非零有限生成右 A-模, 我们已经看到 $\mathrm{GKdim}(A)=\mathrm{GKdim}(A_A)$. 因此(1)表明 A 作为代数 GK 维数是零 $\Leftrightarrow$ A 作为右 A-模是局部有限维的. (2)表明若仿射代数 A 满足 $\mathrm{GKdim}(A)>0$, 那么 $\mathrm{GKdim}(A)\geq 1$. 由此立即得到下述推论.

Cor 设 F 是域, A 是 F-代数, 如果 $\mathrm{GKdim}(A)>0$, 那么 $\mathrm{GKdim}(A)\geq 1$.

Pf. 如果 $\mathrm{GKdim}(A)>0$, 那么 A 有仿射子代数 B 满足 $\mathrm{GKdim}(B)\geq 1$. 于是 $\mathrm{GKdim}(A)\geq\mathrm{GKdim}(B)\geq 1$. □

Rmk 该推论表明代数的 GK 维数取值不可能在 $(0,1)$ 内. 这里等号可以取到, 例如域上的一元多项式环 $F[x]$, 它的 GK 维数是 1.

对于域 F 上的代数 A, 也总有 $\mathrm{GKdim}(A)=\mathrm{GKdim}(A_A)$ 成立:

Prop 设 A 是域 F 上代数, 则 $\mathrm{GKdim}(A)=\mathrm{GKdim}(A_A)$.

Pf. 任取 A 的仿射子代数 B, 有 $\mathrm{GKdim}(B)=\mathrm{GKdim}(B_B)\leq\mathrm{GKdim}(A_A)$, 故 $\mathrm{GKdim}(A)\leq\mathrm{GKdim}(A_A)$. 下设 B 是 A 的仿射子代数, N 是 A_B 的非零有限生成子模, 则可构造 A 的仿射子代数 S 使 $S\supseteq N\cup B$ (具体地, 设 $N=x_1B+x_2B+\cdots+x_mB$, 那么存在仿射子代数 $S\supseteq\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}\cup B$, 进而 $N\subseteq S$). 通过取标准有限维滤可得 $\mathrm{GKdim}(N_B)\leq\mathrm{GKdim}(S_S)=\mathrm{GKdim}(S)\leq\mathrm{GKdim}(A)$, 故 $\mathrm{GKdim}(A_A)\leq\mathrm{GKdim}(A)$. □

Rmk 由此可知对域 F 上代数 A, 考虑 A 上有限生成模的 GK 维数性质可推出 A 作为代数的 GK 维数性质.

下面的结果表明代数同构的代数有相同的 GK 维数, 所以如果有两个域 F 上代数它们的 GK 维数不同, 那么它们必定不同构.

Prop 设 F 是域, A,B 均为 F-代数, 且存在 A 到 B 的满代数同态 $\varphi: A\to B$, 则 $\mathrm{GKdim}(A)\geq\mathrm{GKdim}(B)$.

Pf. 任取 B 的仿射子代数 B', 设它有有限维标准滤 $\{B_n'\}_{n\geq 0}$, 则有 A 的有限维子空间 A_1' 使 $\varphi(A_1')=B_1'$. 设 A' 是 A 的由 A_1' 生成的仿射子代数, 即 A_1' 为 A' 生成子空间, 那么 A_1' 决定 A' 的一个标准有限维滤 $\{A_n'\}_{n\geq 0}$ 满足 $\varphi(A_n')=B_n'$, 故 $\dim_F A_n'\geq\dim_F B_n'$, $\forall n\geq 0$, 这表明 $\mathrm{GKdim}(A')\geq\mathrm{GKdim}(B')$, 进而 $\mathrm{GKdim}(A)\geq\mathrm{GKdim}(B')$, 所以 $\mathrm{GKdim}(A)\geq\mathrm{GKdim}(B)$. □

Rmk 该性质一方面说明域上代数的(代数)同态像的 GK 维数不超过原代数的 GK 维数, 另一方面表明代数同构的代数有相同的 GK 维数, 故可用 GK 维数判别代数是否不同构. 对于代数的

子代数，子代数的GK维数不超过代数的GK维数.

对域F上线性空间 V,W，我们知道 $\dim_F(V\otimes_F W)=\dim_F V\dim_F W$. 具体地，不妨设 V,W 均为非零空间，设 V 有基 $\{v_i|i\in I\}$，W 有基 $\{w_j|j\in J\}$，那么 $\dim_F V=|I|$，$\dim_F W=|J|$. 易知 $\{v_i\otimes w_j|i\in I,j\in J\}$ 是 $V\otimes_F W$ 作为线性空间的一个生成元集，我们断言 $\{v_i\otimes w_j|i\in I,j\in J\}$ 是F-线性无关的，进而 $\dim_F(V\otimes_F W)=|I\times J|=|I||J|=\dim_F V\dim_F W$. 对每个 $i\in I,j\in J$，记 $f_i:V\to F$ 是在 v_i 处取值为 1_F，$v_k(k\neq i\in I)$ 处取值为0的线性映射，$g_j:W\to F$ 是在 w_j 处取值为 1_F，其余 $w_k(k\neq j\in J)$ 处取值为零的线性映射. 那么 $\gamma_{ij}:V\times W\to F$，$(v,w)\mapsto f_i(v)g_j(w)$ 是F-双线性映射. 从而导致F-线性映射 $\gamma_{ij}:V\otimes_F W\to F$ 使 $\gamma_{ij}(v\otimes w)=f_i(v)g_j(w)$，$\forall v\otimes w\in V\otimes_F W$. 利用 $\{\gamma_{ij}|i\in I,j\in J\}$ 易证 $\{v_i\otimes w_j|i\in I,j\in J\}$ 是F-线性无关的. 故 $\dim_F(V\otimes_F W)=\dim_F V\dim_F W$. 对于域F上的代数A,B，自然要问 $\mathrm{GKdim}(A\otimes_F B)$ 与 $\mathrm{GKdim}(A)$ 与 $\mathrm{GKdim}(B)$ 之间的关系.

Prop 设F是域，A,B是F代数，那么 $\sup\{\mathrm{GKdim}(A),\mathrm{GKdim}(B)\}\leq \mathrm{GKdim}(A\otimes_F B)\leq \mathrm{GKdim}(A)+\mathrm{GKdim}(B)$.

Pf: 记 $A\otimes_F F1_B=\{a\otimes k1_B|a\in A,k\in F\}\subseteq A\otimes_F B$，$F1_A\otimes_F B=\{k1_A\otimes b|k\in F,b\in B\}\subseteq A\otimes_F B$，那么它们都是 $A\otimes_F B$ 的子代数，可直接验证 $\varphi:A\to A\otimes_F F1_B$，$a\mapsto a\otimes 1_B$ 是F代数同构，$\psi:B\to F1_A\otimes_F B$，$b\mapsto 1_A\otimes b$ 也是F代数同构(这里的同构需要说明，对一般的张量积，设K为交换环，M,N为K模，N'为K子模，那么 $M\otimes_K N'$ 与 $\{\sum_{i=1}^{l} m_i\otimes n_i'\in M\otimes_K N|n_i'\in N',l\in\mathbb{Z}_{>0}\}$ 可能不同，例如 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes 2\mathbb{Z}$ 中 $\bar{1}\otimes 2$ 为非零元，但 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}$ 中 $\bar{1}\otimes 2$ 是零元) 那么 $\mathrm{GKdim}(A)=\mathrm{GKdim}(A\otimes_F F1_B)\leq \mathrm{GKdim}(A\otimes_F B)$，$\mathrm{GKdim}(B)=\mathrm{GKdim}(F1_A\otimes_F B)\leq \mathrm{GKdim}(A\otimes B)$，这就证明了左边的不等式. 下面证明右边的不等式. 任取 $A\otimes_F B$ 的仿射子代数T，设它有生成子空间W，那么有A的非零有限维子空间P与B的非零有限维子空间Q使 $W\subseteq\{\sum_{i=1}^{l}p_i\otimes q_i|1\leq i\leq l,p_i\in P,q_i\in Q,l\in\mathbb{Z}_{>0}\}=P\otimes_F Q$ (这里张量积等式还使用P,Q是线性空间易证). 设 A' 是由P作为生成子空间生成的仿射代数，B' 是Q作为生成子空间生成的仿射代数，不妨设 $1_A\in P,1_B\in Q$，那么 $T_n\subseteq(A'\otimes_F B')_n=(P\otimes_F Q)^n=P^n\otimes_F Q^n=A_n'\otimes_F B_n'$ (易知 $P\otimes_F Q$ 是 $A'\otimes_F B'$ 的一个生成子空间)，故利用 $\dim_F T_n\leq\dim_F A_n'\otimes_F B_n'=\dim_F A_n'\dim_F B_n'$ 可得 $\mathrm{GKdim}(T)\leq \mathrm{GKdim}(A')+\mathrm{GKdim}(B')\leq \mathrm{GKdim}(A)+\mathrm{GKdim}(B)$，于是知 $\mathrm{GKdim}(A\otimes_F B)\leq \mathrm{GKdim}(A)+\mathrm{GKdim}(B)$. $\square$

Rmk 左边的不等号可能是严格的，例如考虑域F上一元多项式代数 $F[x]$，那么 $\mathrm{GKdim}(F[x]\otimes_F F[x])=2>\sup\{\mathrm{GKdim}F[x],\mathrm{GKdim}F[x]\}$. $F[x]\otimes_F F[x]$ 有生成子空间 $V=F(1\otimes 1)+F(x\otimes 1)+F(1\otimes x)$，直接计算知 $\dim_F V^n=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$，从而 $\mathrm{GKdim}(F[x]\otimes_F F[x])=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(\dim_F V^n)}{\ln n}=2$.

下面我们给出一个 $\mathrm{GKdim}(A\otimes_F B)\leq \mathrm{GKdim}(A)+\mathrm{GKdim}(B)$ 等号成立的条件.

Lem 设F是域，A,B是F代数，B存在一个仿射子代数 B' 使 B' 的标准有限维滤 $\{B_n'\}_{n=0}^{\infty}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(\dim_F B_n')}{\ln n}=\mathrm{GKdim}(B')=\mathrm{GKdim}(B)$，那么 $\mathrm{GKdim}(A\otimes_F B)=\mathrm{GKdim}(A)+\mathrm{GKdim}(B)$.

Pf: 任取A的仿射子代数 A'，且有标准有限维滤 $\{A_n'\}_{n=0}^{\infty}$，记 $T=A'\otimes_F B'\subseteq A\otimes_F B$，它是 $A\otimes_F B$ 的仿射子代数，有生成子空间 $T_1=A_1'\otimes_F F1_B+F1_A\otimes_F B_1'$，记 $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是由 T_1 决定的标准有限维滤，易知对任给正整数n有 $T_{2n}\supseteq A_n'\otimes_F B_n'$，所以 $\dim_F(T_{2n})\geq(\dim_F A_n')(\dim_F B_n')$ 进而 $\mathrm{GKdim}(T)\geq \mathrm{GKdim}(A)$

$+\mathrm{GKdim}(B')$，所以 $\mathrm{GKdim}(A\otimes_F B)\geq \mathrm{GKdim}(A')+\mathrm{GKdim}(B')=\mathrm{GKdim}(A')+\mathrm{GKdim}(B)$，这保证了 $\mathrm{GKdim}(A\otimes_F B)\geq \mathrm{GKdim}(A)+\mathrm{GKdim}(B)$. □

<u>Rmk</u> 一般地，是可以构造 $\mathrm{GKdim}(A\otimes_F B)<\mathrm{GKdim}(A)+\mathrm{GKdim}(B)$ 的例子. 如果 B 是有限维代数，那么 B 本身是仿射代数且 $\mathrm{GKdim}(B)=0$，这时 $\mathrm{GKdim}(A\otimes_F B)=\mathrm{GKdim}(A)$.

作为上述命题的应用，我们可以计算下面三个代数的GK维数.

<u>Prop</u> 设 F 是域，R 是 F-代数，那么：
(1) $\mathrm{GKdim}(M_n(R))=\mathrm{GKdim}(R)$；(2) $\mathrm{GKdim}(RG)=\mathrm{GKdim}(R)$，这里 G 是有限群；(3) $\mathrm{GKdim}(R[x])=\mathrm{GKdim}(R)+1$

<u>Pf:</u> (1) 如果我们说明了代数同构 $M_n(R)\cong R\otimes_F M_n(F)$，那么利用 $M_n(F)$ 是有限维代数立即得到 $\mathrm{GKdim}(M_n(R))=\mathrm{GKdim}(R\otimes_F M_n(F))=\mathrm{GKdim}(R)+0=\mathrm{GKdim}(R)$. 记 E_{ij} 是基本矩阵，$M_n(F)$ 中的 E_{ij} 表示第 i 行第 j 列元素为 1_F，其余元素为零的矩阵；$M_n(R)$ 中的 E_{ij} 表示第 i 行第 j 列为 1_R，其余元素为零的矩阵. 令 $\varphi: M_n(R)\to R\otimes_F M_n(F)$，$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}E_{ij}\mapsto \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}\otimes E_{ij}$，可直接计算验证它是 F-代数同态. 置 $\psi: R\times M_n(F)\to M_n(R)$，$(r,\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n k_{ij}E_{ij})\mapsto \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n k_{ij}rE_{ij}$，易见这是 F-双线性映射，这导出 F-线性映射 $\theta: R\otimes_F M_n(F)\to M_n(R)$ 使得对任给 $r\otimes E_{ij}\in R\otimes_F M_n(F)$ 有 $\theta(r\otimes E_{ij})=rE_{ij}$，进而 $\theta(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}\otimes E_{ij})=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}E_{ij}$，所以 θ 与 φ 互为逆映射，这表明 φ 是 F-代数同构，进而 $R\otimes_F M_n(F)\cong M_n(R)$ 表明 $\mathrm{GKdim}(M_n(R))=\mathrm{GKdim}(R)$.

(2) 如果能证明 F-代数同构 $RG\cong R\otimes_F FG$，那么利用 FG 是有限维 F-代数可得 $\mathrm{GKdim}(RG)=\mathrm{GKdim}(R)$. 令 $\varphi: RG\to R\otimes_F FG$，$\sum_{i=1}^m a_ig_i\mapsto\sum_{i=1}^m a_i\otimes g_i$，易知它是 F-代数同态，$\psi: R\times FG\to RG$，$(r,\sum_{i=1}^m k_ig_i)\mapsto\sum_{i=1}^m k_irg_i$ 是 F-双线性映射，它导出 F-线性映射 $\theta: R\otimes_F FG\to RG$，满足 $\theta(\sum_{i=1}^m a_i\otimes g_i)=\sum_{i=1}^m a_ig_i$（以上 $G=\{g_1,g_2,\dots,g_m\}$）. 进而可直接验证 φ 与 θ 互为逆映射，于是 φ 是代数同构，所以 $\mathrm{GKdim}(RG)=\mathrm{GKdim}(R)$.

(3) 类似地，只需验证代数同构 $R\otimes_F F[x]\cong R[x]$，一旦验证该断言，由 $\mathrm{GKdim}(R[x])=\mathrm{GKdim}(R\otimes_F F[x])$ 以及 $F[x]$ 作为仿射代数有标准有限维滤 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 使 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\dim_F B_n)}{\ln n}=1$ 知 $\mathrm{GKdim}(R[x])=\mathrm{GKdim}(R)+\mathrm{GKdim}(F[x])=\mathrm{GKdim}(R)+1$. 而 $R\otimes_F F[x]\cong R[x]$ 为代数同构可直接验证 $\varphi: R[x]\to R\otimes_F F[x]$，$\sum a_ix^i\mapsto\sum a_i\otimes x^i$ 为代数同构得到. 所以 $\mathrm{GKdim}(R[x])=\mathrm{GKdim}(R)+1$. □

之前我们证明了对域 F 上的代数 A，如果 $\mathrm{GKdim}(A)>0$，那么 $\mathrm{GKdim}(A)\geq 1$. 在1978年，George M. Bergman（美国数学家，1943-）证明了不存在域 F 上的代数使得它的GK维数严格介于1与2之间. 下面我们给出的结果来自 Robert B Warfield 于1984年的工作.

<u>Thm</u> (Warfield) 任给实数 $r\geq 2$，存在域 F 上仿射代数 A 使 $\mathrm{GKdim}(A)=r$.

<u>Pf:</u> 我们只需证明对任给 $r\in[2,3)$，存在以 r 为GK维数的代数 A，一旦证明这一断言，对任给 $n\geq 2$，可归纳地证明对任何 $r\in[n,n+1)$ 存在代数 A 使 $\mathrm{GKdim}(A)=r$（具体地，当 $n=2$ 时，由证明的断言知对每个 $r\in[2,3)$ 存在代数 A 使 $\mathrm{GKdim}(A)=r$. 假设对 $n\geq 2$，对每个 $r\in[n,n+1)$，都存在代数 A 使 $\mathrm{GKdim}(A)=r$，那么对每个 $s\in[n+1,n+2)$，$s-1\in[n,n+1)$，设域 F 上代数 A 使 $\mathrm{GKdim}(A)=s-1$，进而 $\mathrm{GKdim}(A[x])=\mathrm{GKdim}(A)+1=s$，由数学归纳原

理的到(结论). 下面我们证明：对任给实数 $2\le r<3$，存在代数 A 使 $\mathrm{GKdim}(A)=r$. 设 $F\langle x,y\rangle$ 是以二元集 $\{x,y\}$ 为自由生成元集的自由代数，设 I 是 $F\langle x,y\rangle$ 中由 y 生成的理想. 固定实数 $a\in(0,1)$. 易知由集合 $\{x^iyx^kyx^j\in F\langle x,y\rangle \mid i+k+j+2=n,\ k<n-n^a\}$ 所生成的 F-子空间为 J，由函数 $f(x)=x-x^a$ 在 $[1,\infty)$ 递增可知 J 为 $F\langle x,y\rangle$ 的理想. 令 $A=\frac{F\langle x,y\rangle}{I^3+J}$. 不难看到 A 是由 $\{\bar{x}^i \mid i\in\mathbb{N}\}\cup\{\overline{x^iyx^j}\mid i,j\in\mathbb{N}\}\cup\{\overline{x^iyx^kyx^j}\mid i+j+k+2=n 且 k\ge n-n^a\}$ 为基张成的线性空间，那么 A 是 F-仿射代数且有生成子空间 $V=F\bar{x}+F\bar{y}$. 下面来估计 $\dim_F V^n$. 易见 V^n 有基 $\{\bar{x}^n\}\cup\{\overline{x^iyx^j}\mid i,j\in\mathbb{N} 且 i+j=n-1\}\cup\{\overline{x^iyx^kyx^j}\mid i+k+j=n-2 且 k\ge n-n^a\}$，其中 $\{\overline{x^iyx^j}\mid i,j\in\mathbb{N} 且 i+j=n-1\}$ 有 n 个元素，而对每个 $k\ge n-n^a$（这里 $k\le n-2$，并要求 $n\ge 2$）有 $n-k-1$ 个形如 $\overline{x^iyx^kyx^j}$，$i+j+k=n-2$ 的元素. 因此当 $n\ge 2$ 时，$\dim_F V^n\le 1+n+n^a(n^a-1)$，于是 $\dim_F V^n\le 1+n+n^a(n^a-1)$，$\forall n\in\mathbb{N}$. 下设 $\frac{1}{2}\le a<1$，这时 $n-n^a$ 与 $n-\frac{1}{2}n^a$ 间必有自然数（1. 当 $n=0,1$ 时有 0；当 $n\ge 4$ 时，$\frac{1}{2}n^a>\frac{1}{2}\cdot 4^{\frac{1}{2}}=1$，故 $n-n^a$ 与 $n-\frac{1}{2}n^a$ 间有自然数；当 $n=2$ 时，对任给 $a\in[\frac{1}{2},1)$，$n-n^a=2-2^a\le 2-\sqrt{2}<1$，$n-\frac{1}{2}n^a=2-\frac{1}{2}\sqrt{2}>1$，故 $n-n^a$ 与 $n-\frac{1}{2}n^a$ 间有自然数 1；当 $n=3$ 时，若 $a\ge\log_3 2$，则 $3-3^a\le 1$，$3-\frac{1}{2}3^a\ge 1$，故此时 $3-3^a$ 与 $3-\frac{1}{2}3^a$ 间有自然数 1；当 $a<\log_3 2$ 时，$3-\frac{1}{2}3^a>2$，故 $3-3^a$ 与 $3-\frac{1}{2}3^a$ 间有自然数 2.）对每个 $n-n^a\le k\le n-\frac{1}{2}n^a$，有 $n-k-1\ge\frac{1}{2}n^a-1$，所以 $\dim_F V^n\ge 1+n+(\frac{1}{2}n^a-1)(\frac{1}{2}n^a-1)$. 故对 $\frac{1}{2}\le a<1$，存在正整数 N，正实数 C_1,C_2 使当 $n\ge N$ 时有 $C_1n^{2a}\le\dim_F V^n\le C_2n^{2a}$. 于是对 V 决定的标准有限维滤 $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$，存在常数 C_3,C_4，使当 n 充分大时有 $C_3+\int_0^n x^{2a}dx\le\dim_F R_n\le C_4+\int_1^{n+1}x^{2a}dx$，所以 $\ln\left(C_3+\frac{n^{2a+1}}{2a+1}\right)\le\ln(\dim_F R_n)\le\ln\left(C_4+\frac{(n+1)^{2a+1}-1}{2a+1}\right)$. 由上式立即得到 $\mathrm{GKdim}(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(\dim_F R_n)}{\ln n}=2a+1$，$a\in[\frac{1}{2},1)$，得证. □

因此，若承认 Bergman 的工作，便得到下述定理：

<u>Thm</u> (Bergman Gap Theorem) 设 F 是域，那么对任给 $r\in\{0\}\cup\{1\}\cup[2,+\infty)$，存在 F-代数 A 使 $\mathrm{GKdim}(A)=r$，不存在 F-代数 A 使 $\mathrm{GKdim}(A)\in(0,1)\cup(1,2)$.

在交换代数中我们有 Krull 维数的概念：设 R 为含幺交换环，称 $\mathrm{k.dim}\,R=\{s\in\mathbb{N}\mid 存在形如 P_0\supsetneq P_1\supsetneq\cdots\supsetneq P_s 的素理想链\}$. 接下来我们会证明对域 F 上仿射交换代数 A，有 $\mathrm{k.dim}\,A=\mathrm{GKdim}\,A$. 为此先做一些准备.

<u>Lem</u> 设 A 为域 F 上交换代数，B 为 A 的子代数且 A 作为 B-模有限生成，则 $\mathrm{GKdim}(A)\le\mathrm{GKdim}(B)$.

<u>Pf</u> 设 $a_1,a_2,\dots,a_r\in A$ 使 $A=Ba_1+Ba_2+\cdots+Ba_r$. 任取 A 的非零有限维子空间 V；根据代数 GK 维数的定义，如果能证明 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\dim_F(F1+V+\cdots+V^n)}{\ln n}\le\mathrm{GKdim}\,B$，那么立即可得 $\mathrm{GKdim}(A)\le\mathrm{GKdim}(B)$. 设 $\hat{V}\supseteq V$ 为 A 的有限维子空间且 $\hat{V}\supseteq\{a_1,a_2,\dots,a_r\}$. 设 $\hat{V}$ 有生成元集 $\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$，则存在 $b_{ij},b_{ijk}\in B$ 使得 $v_i=\sum_{j=1}^r b_{ij}a_j$，$a_ia_j=\sum_{k=1}^r b_{ijk}a_k$. 进而对 B 的有限维 F-子空间 $W=\mathrm{span}\{1,b_{ij},b_{ijk}\}$，有 $\hat{V}+\hat{V}^2\subseteq Wa_1+Wa_2+\cdots+Wa_r$. 归纳地可证 $\hat{V}^n\subseteq W^{2n}a_1+\cdots+W^{2n}a_r$，$\forall n\ge 1$；由此立即可知 $\dim_F\left(\sum_{i=0}^n\hat{V}^i\right)\le r\dim_F\left(\sum_{j=0}^{2n}W^j\right)$，因此 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\dim_F\left(\sum_{i=0}^n\hat{V}^i\right)}{\ln n}\le\mathrm{GKdim}\,B$. □

<u>Lem</u> 设含幺交换环 R，E 有整扩张 $R\subseteq E$，则 $\mathrm{k.dim}\,R=\mathrm{k.dim}\,E$.

<u>证</u> 任给 R 的素理想链 $P_0\supsetneq P_1\supsetneq\cdots\supsetneq P_s$，利用 Going-up 定理，存在 E 的素理想 $Q_0\supseteq Q_1\supseteq\cdots\supseteq Q_s$ 使 $Q_i\cap R=P_i$，即 $Q_0\supsetneq Q_1\supsetneq\cdots\supsetneq Q_s$，所以 $\mathrm{k.dim}\,R\le\mathrm{k.dim}\,E$. 任取 E 的素理想链 $Q_0\supsetneq Q_1\supsetneq\cdots\supsetneq Q_s$，置 $P_i=Q_i\cap R$，则 P_i 为 R

的素理想且 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_s$，这说明 $k\dim R \geq k\dim E$. □

Lem 设F为域，A为F-交换代数，S是A作为F代数的一个生成元集，则 $k\dim(A) \le \sup\{|T| \mid T\subseteq S$ 为有限代数无关集$\}$. 特别地，对任给正整数m，有 $k\dim(F[x_1,x_2,\dots,x_m]) = m$.

Pf: 不妨设 $\sup\{|T| \mid T\subseteq S$ 为有限代数无关子集$\} < +\infty$. 下面对 $n=\sup\{|T| \mid T\subseteq S$ 为有限代数无关子集$\}$ 作归纳证明结论. 当 $n=0$ 时，S中的元素在F上代数，所以A中任何元素在F上代数. 下证 $k\dim(A)=0$. 假设 $k\dim(A)\geq 1$，则A有素理想链 $P_0 \subsetneq P_1$，进而整环 A/P_0 不是域，但 A/P_0 中的任何元素在F上代数表明 A/P_0 为域，矛盾. 所以 $k\dim(A)=0\leq n$. 所以当 $n=0$ 时结论成立. 下面假设结论对不超过 $n-1$ ($n\geq 1$) 的自然数成立. 现对 $n=\sup\{|T| \mid T\subseteq S$ 为有限代数无关子集$\}$ 证明结论. 证明分为两步，先证A为整环的情形，再处理一般情形.

Step 1: 当A为整环，任取A的素理想链 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_s$，不妨设 $s\geq 1$，我们断言：对整环 A/P_1 以及它的生成元集 $\{a+P_1 \mid a\in S\}$，有：任何 $\{a+P_1 \mid a\in S\}$ 的有限代数无关子集T，有 $|T|\leq n-1$. 一旦证明该断言，则对 A/P_1 应用归纳假设立即得到 $s-1\leq n-1$，故 $s\leq n$，则有 $k\dim(A)\leq n$ 成立. 假设 $\{a+P_1 \mid a\in S\}$ 存在n个元素的代数无关子集 $\{a_1+P_1, a_2+P_1,\dots,a_n+P_1\}$，则 $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ 也为S的代数无关子集，结合 $n=\sup\{|T| \mid T\subseteq S$ 为有限代数无关子集$\}$ 可知任给 $a\in S$，存在以 $F[a_1,a_2,\dots,a_n]$ 中元素为系数的非零多项式 $h(x)\in(F[a_1,a_2,\dots,a_n])[x]$ 使 $h(a)=0$. 进而任给 $a\in A$ 存在以 $F[a_1,a_2,\dots,a_n]$ 中元素为系数的非零多项式 $h(x)$ 使 $h(a)=0$. 那么对 $a\neq 0\in P_1$，存在常数项非零的多项式 $h(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_kx^k\neq 0\in(F[a_1,a_2,\dots,a_n])[x]$ 使 $h(a)=0$. 从而 $c_0\in P_1$. 设 $g_0(x_1,x_2,\dots,x_n)\in F[x_1,x_2,\dots,x_n]$ 使 $g_0(a_1,\dots,a_n)=c_0$，那么 $g_0(a_1+P_1, a_2+P_1,\dots,a_n+P_1)=0+P_1$，这与 $\{a_1+P_1,a_2+P_1,\dots,a_n+P_1\}$ 代数无关矛盾. 所以对 $\{a+P_1 \mid a\in S\}$ 的任意有限代数无关子集T有 $|T|\leq n-1$，断言得证.

Step 2: 对一般的情形，任取A的素理想链 $P_0\subsetneq P_1\subsetneq\cdots\subsetneq P_s$，可得 A/P_0 中相应的素理想链，进而由 $\sup\{|T| \mid T\subseteq\{a+P_0 \mid a\in S\}$ 为有限代数无关集$\}\leq n$ 知 $s\leq k\dim(A/P_0)\leq n$，所以 $k\dim A\leq n$. □

Thm (Noether 正规化定理) 设A为域F上仿射代数，则存在A的代数无关子集 $\{y_1,y_2,\dots,y_d\}$ 使A为 $F[y_1,\dots,y_d]$ 上的有限生成模. 特别地，$A\supseteq F[y_1,y_2,\dots,y_d]$ 为整扩张，故 $k\dim A = k\dim F[y_1,\dots,y_d]=d$.

Pf: 首先存在 $n\geq 0$ 及 $F[x_1,x_2,\dots,x_n]$ 的理想I使有F-代数同构 $A\cong F[x_1,x_2,\dots,x_n]/I$. 所以我们只需对 $F[x_1,x_2,\dots,x_n]/I$ 证明结论即可. 若 $n=0$，取 $d=0$，结论直接成立. 下设 $n\geq 1$，那么集合 $\{\{f_1,f_2,\dots,f_n\}\subseteq F[x_1,\dots,x_n] \mid F[x_1,\dots,x_n]$ 为 $F[f_1,f_2,\dots,f_n]$ 的整扩张$\}$ 非空，例如 $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ 在该集合中. 于是可取 $\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$ 使它包含I中元素个数最多（若记 $S=\{\{f_1,f_2,\dots,f_n\}\subseteq F[x_1,\dots,x_n] \mid F[x_1,\dots,x_n]\supseteq F[f_1,\dots,f_n]$ 为整扩张$\}$，则 $S_1=\{t\in\mathbb{N} \mid$ 存在 $\{f_1,\dots,f_n\}\in S$ 使 $t=|\{f_1,\dots,f_n\}\cap I|\}$ 有最大元，取该最大元即可）. 不妨设 $f_1,f_2,\dots,f_d\notin I$，$f_{d+1},\dots,f_n\in I$，于是 $F[x_1,\dots,x_n]/I$ 是 $F[f_1,\dots,f_n]/I$ 的整扩张.
取 $y_i=f_i+I$，$1\leq i\leq d$，则 $F[x_1,\dots,x_n]/I$ 是 $F[y_1,y_2,\dots,y_d]$ 上的有限生成模. 下证 $\{y_1,y_2,\dots,y_d\}$ 是代数无关集，用反证法. 假设 $\{y_1,y_2,\dots,y_d\}$ 在F上是代数相关的，那么存在 $0\neq g(x_1,x_2,\dots,x_d)\in F[x_1,x_2,\dots,x_d]$ 使得 $g(f_1,f_2,\dots,f_d)\in I$. 取 $N>\deg(g(x_1,x_2,\dots,x_d))$，记 $w_i=x_i-x_1^{N^{i-1}}$ ($2\leq i\leq d$)，那么 $x_i=w_i+x_1^{N^{i-1}}$，于是 $g(x_1,x_2,\dots,x_d)=\sum_{v_1,\dots,v_d}a_{v_1\cdots v_d}x_1^{v_1}x_2^{v_2}\cdots x_d^{v_d}=\sum_{v_1,\dots,v_d}a_{v_1\cdots v_d}x_1^{v_1}(w_2+x_1^{N})^{v_2}\cdots(w_d+x_1^{N^{d-1}})^{v_d}$，注意到对任何自然数组 $(v_1,\dots$

$v_d) \neq (v_1',\dots,v_d')$，有 $v_1+Nv_2+\dots+N^{d-1}v_d \neq v_1'+Nv_2'+\dots+N^{d-1}v_d'$，故 $g(x_1,x_2,\dots,x_d)$ 若视作关于 $x_1,x_2,\dots,x_d$ 的多项式，最高次项仅含 x_1，置 $g'(x_1,x_2,\dots,x_d)\in F[x_1,\dots,x_d]$ 使 $g'(x_1,x_2,\dots,x_d)=g(x_1,x_2,\dots,x_d)$，则 g' 最高次项仅包含 x_1，且 g' 最高次项形如 $a_{v_1\cdots v_d}x_1^{v_1+v_2N+\dots+v_dN^{d-1}}$，$a_{v_1\cdots v_d}\neq 0$。故 $T=F[g(f_1,f_2,\dots,f_d),f_2-f_1^{N},\dots,f_d-f_1^{N^{d-1}},f_{d+1},\dots,f_n]$ 作为 $F[x_1,x_2,\dots,x_n]$ 的子代数，可知 f_1 在 T 上是整的，因为它可被 T 上多项式 $g(x_1,f_2-f_1^{N},\dots,f_d-f_1^{N^{d-1}})-g(f_1,f_2,\dots,f_d)$ 零化，进而 $f_1,f_2,\dots,f_n$ 均在 T 上整，故 $F[f_1,f_2,\dots,f_n]$ 在 T 上整，由此可得 $F[x_1,x_2,\dots,x_n]$ 在 T 上整，但 T 可由某 n 个至少含 $n-d+1$ 个代数无关的多项式生成，这与 $\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$ 的选取矛盾。因此 $\{y_1,y_2,\dots,y_d\}$ 是代数无关的。□

Rmk 由于 k.dim A 由 A 决定，故 Noether 正规化定理中的 d 由 A 唯一确定，交换仿射代数的 Krull 维数有限。

∴ 利用 Noether 正规化定理，我们马上得到下述结果：

Thm 设 F 为域，A 为 F-仿射代数且 A 交换，则 GKdim A = k.dim A.

Pf 由 Noether 正规化定理，存在 $\{y_1,\dots,y_d\}\subseteq A$ 使 $\{y_1,\dots,y_d\}$ 代数无关且 $A\supseteq F[y_1,\dots,y_d]$ 是整扩张，所以 k.dim A = k.dim $F[y_1,\dots,y_d]=d$，而 A 为 $F[y_1,\dots,y_d]$ 上有限生成模意味着 GKdim A = GKdim $F[y_1,\dots,y_d]=d$，所以 k.dim A = GKdim A □

Rmk 因为交换仿射代数的 Krull 维数总是自然数，所以交换仿射代数的 GK 维数为自然数。特别地，任何域 F 上交换代数的 GK 维数不是 $+\infty$ 就是自然数。

对于含幺环 R,R' 以及双模 ${}_RM_{R'}$，${}_{R'}M'_R$，若双模同态 $\tau: M'\otimes_R M\to R'$ 及 $\mu: M\otimes_{R'}M'\to R$，记 $\tau(x'\otimes x)=(x',x)$，$\mu(x\otimes x')=[x,x']$，满足 (1) $[x,x']y=x(x',y)$，$\forall x,y\in M, x'\in M'$；(2) $y'[x,x']=(y',x)x'$，$\forall x',y'\in M', x\in M$，则称 $(R,R',{}_RM_{R'},{}_{R'}M'_R,\tau,\mu)$ 是一个 Morita Context. 回忆 Morita I 表明若 Morita Context $(R,R',{}_RM_{R'},{}_{R'}M'_R,\tau,\mu)$ 满足 τ,μ 是满射，则有 $M_{R'}$ 与 M'_R 都是相应模范畴中的有限生成投射生成子，且 $R'\cong \mathrm{End}(M'_R)$，$R\cong\mathrm{End}(M_{R'})$ 为环同构，当 R 与 R' 均为域 F 上代数时，易见上述环同构是 F-代数同构。Morita II 表明若有范畴等价 Mod-$R\cong$ Mod-R'，则存在双模 ${}_RP_{R'}$ 与 ${}_{R'}P'_R$，Morita Context $(R,R',{}_RP_{R'},{}_{R'}P'_R,\tau,\mu)$ 使 τ,μ 为满同态，从而可应用 Morita I，即 $P_{R'}$ 与 P'_R 为相应模范畴中有限生成投射生成子且 $R\cong\mathrm{End}(P_{R'})$，$R'\cong\mathrm{End}(P'_R)$。下面我们将证明 Morita 等价的代数有相同的 GK 维数（若含幺环 R，R' 满足 Mod-$R\cong$ Mod-R'（可以证明这等价于 R-Mod $\cong R'$-Mod），则称 R 与 R' 相似或 Morita 等价）.

∴ 在线性代数中，域 F 上 n 维线性空间 V 满足 $\mathrm{End}(V)\cong M_n(F)$（$F$-代数同构）；一般地，有：

Lem 设 R 为含幺环，M_R 为右 R-模，M_R 有限生成，可由 n ($n\in\mathbb{N}_{>0}$) 个元素生成，则存在 $M_n(R)$ 的子环 S ($I_n\in S$) 使得 S 到 $\mathrm{End}(M_R)$ 有满环同态。当 R 为含幺交换环 K 上的代数时，S 为 $M_n(R)$ 的子代数，存在 S 到 $\mathrm{End}(M_R)$ 的 K-代数满同态。

Pf 我们先说明有环同构 $\mathrm{End}(R^n_R)\cong M_n(R)$，将问题转化为 $\mathrm{End}(R^n)$ 有子环 S 使存在 S 到 $\mathrm{End}(M_R)$ 的满环同态。设 $e_1,e_2,\dots,e_n$ 为 R^n 的标准单位列向量，对任给 $\varphi\in\mathrm{End}(R^n)$，存在唯一的矩阵 $A\in M_n(R)$ 使 $(\varphi(e_1),\varphi(e_2),\dots,\varphi(e_n))=(e_1,e_2,\dots,e_n)A$，那么有环同构 $\Phi:\mathrm{End}(R^n)\to M_n(R)$，$\varphi\mapsto A$；当 R 是含幺交换环 K 上代数时，Φ 是 K-代数同构。所以只需证 $\mathrm{End}(R^n)$ 到 $\mathrm{End}(M_R)$ 有满环同态即可。设 $M=x_1R+x_2R+\dots+x_nR$，$\pi: R^n\to M$，$\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\mapsto x_1a_1+x_2a_2+\dots+x_na_n$，则 π 为满右 R-模同态。对任给右 R-模同态 $\alpha: R^n\to R^n$，若 $\alpha(\ker\pi)\subseteq\ker\pi$，则存在唯一的右 R-模同态 $\bar\alpha: M\to M$ 使下图交换：

易知也，置 $\tilde{\alpha}: M\to M$, $\pi(y)\mapsto \pi\alpha(y)$，这是因为满足 $\pi(y)=0$，那么 $\tilde{\alpha}$ 是定义合理的右R-模同态，且 $\tilde{\alpha}\pi=\pi\alpha$，易见 $\tilde{\alpha}$ 唯一.

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\alpha"'] & M \arrow[d, "\tilde{\alpha}"] \\ R^n \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd}$$

易见 $S=\{\alpha: R^n\to R^n \mid \alpha$ 为右模同态且 $\alpha(\ker\pi)\subseteq\ker\pi\}$ 为 $End(R^n)$ 的子环，当 R 是 k-代数时 S 为 $End(R^n)$ 的子代数.

现令 $\theta: S\longrightarrow End(M_R)$, $\alpha\mapsto\tilde{\alpha}$，易知 θ 为环同态. 下证 θ 是满射. 任取右R-模同态 $f: M\to M$，那么存在矩阵 $A\in M_n(R)$ 使 $(f(x_1), f(x_2),\dots,f(x_n))=(x_1,x_2,\dots,x_n)A$，从而 $\alpha: R^n\longrightarrow R^n$, $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\mapsto A\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ 是右R-模同态且 $\alpha(\ker\pi)\subseteq\ker\pi$, $\pi\alpha=f\pi$，于是 $f=\theta(\alpha)$，因此 θ 是满环同态，当 R 是 k-代数时易知 θ 是代数同态. □

Rmk 由该引理立即得到当 R 为域 F 上代数，$M_R\neq 0$ 有限生成时，有 $GKdim(End(M_R))\le GKdim(S)\le GKdim(M_n(R))=GKdim(R)$. 这里 $\alpha: R^n\to R^n$, $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\mapsto A\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ 满足 $\alpha(\ker\pi)\subseteq\ker\pi$ 的验证是直接的：任取 $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\in\ker\pi$，有 $x_1a_1+x_2a_2+\dots+x_na_n=0$，所以 $f(x_1)a_1+f(x_2)a_2+\dots+f(x_n)a_n=0$，于是 $(\sum_{i=1}^n x_ia_{i1})a_1+(\sum_{i=1}^n x_ia_{i2})a_2+\dots+(\sum_{i=1}^n x_ia_{in})a_n=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n x_ia_{ij}a_j=\sum_{i=1}^n x_i(\sum_{j=1}^n a_{ij}a_j)$，故 $A\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\in\ker\pi$.

Cor 设 F 是域，R 为 F 代数，则 (1) 若 $M_R\neq 0$ 有限生成，则 $GKdim(End(M_R))\le GKdim(R)$；(2) 若 R 是 R' 的子代数且 R' 作为右 R-模是有限生成的，那么 $GKdim(R')=GKdim(R)$；(3) 若 R 与 R' 是 Morita 等价的 F-代数，那么 $GKdim(R)=GKdim(R')$.

Pf 前面已证过(1)，现考虑(2)，通过 R' 元素的左乘变换易知 R' 可嵌入 $End(R'_R)$，所以 $GKdim(R')\le GKdim(End(R'_R))\le GKdim(R)$，结合 R 为 R' 子代数知 $GKdim(R)=GKdim(R')$. 最后验证(3)，因为 $R\sim R'$，故存在 Mod-R 中的有限生成投射生成子 P_R 与 Mod-R' 中有限生成投射生成子 $P'_{R'}$ 使 $R\cong End(P'_{R'})$, $R'\cong End(P_R)$，进而由(1)可得 $GKdim(R)=GKdim(R')$. □

下面介绍代数关于一个导子的 Ore 扩张，再引入 Weyl 代数，最后计算 Weyl 代数的 GK 维数.

设 k 为交换环，若 k-代数 A 上自同态 $\delta: A\to A$ 满足 $\delta(ab)=\delta(a)b+a\delta(b)$, $\forall a,b\in A$，则称 δ 为 A 的一个 k-导子 (derivation). 给定 k-代数 A 及 k-导子 δ，可在系数在 A 中的多项式集 $A[x;\delta]=\{a_0+a_1x+\dots+a_nx^n \mid a_i\in A, 0\le i\le n, n\in\mathbb{N}\}$ 上定义乘法运算 $(\sum_{i=0}^n a_ix^i)(\sum_{j=0}^m b_jx^j)=\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^m\sum_{k=0}^i C_i^k a_i\delta^k(b_j)x^{i+j-k}$ (这是由关系 $xa=ax+\delta(a)$ 导出的)，可以验证 $A[x;\delta]$ 关于上述乘法与通常加法构成环 (这里左右分配律是明显的；乘法结合律的验证并不容易，可如下处理：记 $A^{\mathbb{N}}$ 为 $\mathbb{N}$ 到 A 全体映射构成的加群，将其元素写作 $(a_i)_{i=0}^\infty$，那么对每个 $a\in A$，决定一左乘变换 $a_l: A^{\mathbb{N}}\to A^{\mathbb{N}}$, $(a_i)_{i=0}^\infty\mapsto(aa_i)_{i=0}^\infty$，置 $\varphi: A^{\mathbb{N}}\to A^{\mathbb{N}}$, $(a_i)_{i=0}^\infty\mapsto(\delta(a_i)+a_{i-1})_{i=0}^\infty$，这里 $a_{-1}=0$，则 $\Phi: A[x;\delta]\longrightarrow End(A^{\mathbb{N}})$, $a_0+a_1x+\dots+a_nx^n\mapsto(a_0)_l+(a_1)_l\varphi+\dots+(a_n)_l\varphi^n$ 为单射，且直接计算表明 $\varphi a_l=a_l\varphi+(\delta(a))_l$，这保证 Φ 保持乘法，故 $A[x;\delta]$ 中元素关于(自然的)加法与乘法构成环，且 $A[x;\delta]$ 为 k-代数). 我们称 $A[x;\delta]$ 为 A 关于 δ 的 Ore 扩张.

Lem 设 F 为域，A 为 F 代数，有 F-导子 $\delta: A\to A$，则 $GKdim(A[x;\delta])\geq GKdim A+1$.

Pf 记 $B=A[x;\delta]$，任取 A 的仿射子代数 A'，设 V 为 A' 的一个含 1 的生成子空间，那么 $W=Fx+V$ 为 B 的有限维子空间且 $1_B=1_A\in W$，注意到 $V^n+V^nx+\dots+V^nx^n\subseteq(V+Fx)^{2n}=W^{2n}$，所以 $(n+1)\dim_F V^n\le\dim_F W^{2n}$，故 $1+GKdim A'\le\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\dim_F W^{2n}}{\ln n}\le GKdim B$，这说明 $GKdim B\geq GKdim A+1$. □

Rmk 一般这里不等号未必成立，M. Lorenz 在 1982 年的工作中给出了反例.

即使对一般域 F 上代数 A 及 A 上导子 $\delta: A\to A$，仅能得到 $\mathrm{GKdim}\, A[x;\delta] \geq \mathrm{GKdim}\, A+1$. 下面我们说明如果代数 A 的导子 δ 满足 A 的任何有限维子空间 V 包含于 δ 不变子空间，即 δ 可限制在 V 上给出 V 上线性变换，那么上述不等式等号成立，即 $\mathrm{GKdim}\, A[x;\delta]=\mathrm{GKdim}\, A+1$. 先指出，若导子 $\delta: A\to A$ 满足 A 的任何有限维子空间都是 δ-不变的，则 δ 可限制在 A 的仿射子代数 A' 上成为 A' 上的导子；为此只需说明 $\delta(A')\subseteq A'$. 设 V 为 A' 的一个含 1 的生成子空间，那么任给 $a\in A'$，存在 $m\geq 1$ 使 $a\in V^m$，故利用 $\delta(V^m)\subseteq V^m$ 可知 $\delta(A')\subseteq A'$. 所以 $\delta|_{A'}$ 给出 A' 上的导子. 利用这一观察，我们有：

Prop 设 F 是域，A 为 F-代数，$\delta: A\to A$ 为 A 上导子，满足 A 的任何有限维子空间都含于 A 的某个 δ-不变(δ-stable)仿射子代数中，则 $\mathrm{GKdim}(A[x;\delta])=\mathrm{GKdim}\, A+1$.

Pf. 设 B' 为 $B=A[x;\delta]$ 的仿射子代数，那么可设 $f_1,f_2,\dots,f_k$ 为 B' 的一个生成元集，这些多项式所有系数生成的子空间含于 A 的某个 δ 不变仿射子代数 A' 中. 易见 $B'\subseteq A'[x;\delta]$，如果能证明 $\mathrm{GKdim}\, A'[x;\delta]\leq \mathrm{GKdim}\, A'+1$，那么结论直接成立. 设 V 为 A' 的含 1 生成子空间，那么存在 $m\geq 1$ 使 $\delta(V)\subseteq V^m$. 易见 $W=Fx+V$ 是 $A'[x;\delta]$ 的一个生成子空间.

Claim 对任意自然数 n 有 $W^n=(V+Fx)^n\subseteq V^{mn}+V^{mn}x+\dots+V^{mn}x^n$. 一旦证明该断言，立即可知 $\mathrm{GKdim}\, A'[x;\delta]\leq \mathrm{GKdim}\, A'+1$. 进而利用 $\mathrm{GKdim}\, B'\leq \mathrm{GKdim}\, A'[x;\delta]\leq \mathrm{GKdim}\, A'+1\leq \mathrm{GKdim}\, A+1$ 立即得到结论.

现在证明该断言，对 $n\geq 0$ 作归纳，当 $n=0$，结论直接成立. 假设对 $n\geq 0$ 有 $W^n=(V+Fx)^n\subseteq V^{mn}+V^{mn}x+\dots+V^{mn}x^n$ 成立，那么 $VW^n\subseteq V^{mn+1}+V^{mn+1}x+\dots+V^{mn+1}x^n\subseteq V^{m(n+1)}+V^{m(n+1)}x+\dots+V^{m(n+1)}x^{n+1}$. $xW^n\subseteq xV^{mn}+xV^{mn}x+\dots+xV^{mn}x^n\subseteq V^{mn}x+V^{mn}x^2+\dots+V^{mn}x^{n+1}+\delta(V^{mn})+\delta(V^{mn})x+\dots+\delta(V^{mn})x^n$. 而 $\delta(V^{mn})\subseteq \sum_{j=0}^{mn-1}V^j\delta(V)V^{mn-j-1}\subseteq \sum_{j=0}^{mn-1}V^{mn+m}=V^{m(n+1)}$，所以 $W^{n+1}\subseteq V^{m(n+1)}+V^{m(n+1)}x+\dots+V^{m(n+1)}x^{n+1}$. 断言得证. □

之前我们证明过对 F-代数 A，有 $\mathrm{GKdim}\, A[x]=\mathrm{GKdim}\, A+1$，利用上述性质，取 $\delta=0$，则 $A[x;\delta]=A[x]$，且明显 A 的任何有限维子空间都含于 A 的某个 δ 不变仿射子代数时，所以利用上述性质我们也可以得到 $\mathrm{GKdim}\, A[x]=\mathrm{GKdim}\, A+1$.

下面引入 Weyl 代数的概念，最早由 Hermann Weyl(德国数学家，1885-1955)为研究量子力学中 Heisenberg 不确定性原理引入.

Def (Weyl 代数) 设 F 是域，称 F-自由代数 $F\langle x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\rangle$ 的商代数 $\dfrac{F\langle x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\rangle}{(x_iy_j-y_jx_i-\delta_{ij},\ x_ix_j-x_jx_i,\ y_iy_j-y_jy_i)}$ 为 F 上 n 阶 Weyl 代数，记作 $A_n(F)$，这里 δ_{ij} 为 Kronecker 记号.

Rmk 记 $R=F[x_1,x_2,\dots,x_n]$ 为域 F 上 n 元多项式代数，那么 $\frac{\partial}{\partial x_1}$ 为 R 上导子，可定义 $R_1=R_0[y_1;\frac{\partial}{\partial x_1}]$，这里 $R_0=R$，通过归纳可以构造序列 $R_0,R_1,\dots,R_n$ 使对每个 $1\leq i\leq n-1$ 有 $R_{i+1}=R_i[y_{i+1};\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}]$. 易验证有 F-代数同构 $A_n(F)\cong R_n$，事实上可直接计算得 R_n 中 $y_jx_i-x_iy_j=\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=\delta_{ij}$，$x_ix_j-x_jx_i=0$，$y_iy_j-y_jy_i=0$，结合 R_n 中任何元素可唯一地表为有限和 $\sum_{k_1,\dots,k_n,j_1,\dots,j_n} c_{k_1\dots k_n j_1\dots j_n}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}y_1^{j_1}\cdots y_n^{j_n}$ 知 $R_n\cong A_n(F)$. 易知每个 R_i $(0\leq i\leq n)$ 均为 F-仿射代数且 R_{i-1} $(1\leq i\leq n)$ 为 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 不变的仿射代数，因此由前面的性质知 $\mathrm{GKdim}(R_{i+1})=\mathrm{GKdim}(R_i)+1$，$\forall\, 0\leq i\leq n-1$，于是 $\mathrm{GKdim}(A_n(F))=\mathrm{GKdim}(R)+n$，而 $\mathrm{GKdim}\, R=n$，所以有：

Prop 设 F 是域，则 $\mathrm{GKdim}(A_n(F))=2n$，$\forall n\geq 1$.

前面看到，对域 F 上代数 A，导子 $\delta: A\to A$，若 A 任何有限维子空间都含于某个 δ-不变的仿射代数中，则有

GKdim $A[x;\delta] = $ GKdim $A+1$. 下面给出一个一般 GKdim $A[x;\delta] >$ GKdim $A+1$ 的例子.

Eg. 考虑域F上自由代数 $F\langle x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\rangle$ 的商代数 $R = F\langle x_1,x_2,\dots\rangle/(x_ix_j)$, 那么它是F-交换代数, 作为F-线性空间是无限维的(明显 $\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n,\dots\}$ F-线性无关), 易见R的任何仿射子代数S仍为有限维, 都是局部有限维的, 故 GKdim $R=0$. 下面说明对满足 $\delta(\bar{x}_i)=\bar{x}_{i+1}$, $\forall i\geq 1$ 的导子 $\delta: R\to R$ (注意R有基 $\{\bar{1},\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,\dots\}$, 故定义 $\delta(\bar{1})=\bar{0}$, 那么对任给 $a,b\in R$, 设 $a=k\bar{1}+k_1\bar{x}_1+\dots+k_n\bar{x}_n$, $b=c\bar{1}+c_1\bar{x}_1+\dots+c_m\bar{x}_m$, 有 $\delta(ab)=\delta(a)b+a\delta(b)$, 即δ确实是导子) 设T是由有限维子空间 $W=F\bar{x}_1+Fx$ 在 $R[x;\delta]$ 中生成的仿射子代数. 一旦证明该断言则生成子空间W决定

Claim 对每个正整数n, W^n 有基 $\{x^n,\bar{x}_1x^{n-1},\bar{x}_2x^{n-2},\dots,\bar{x}_n\}$. 进而 GKdim $R[x;\delta]\geq 2$.

有估计维数公式 $\dim_F T_n = 1+2+\dots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. 注意到 $W^n = F\bar{x}_1x^{n-1}+\dots$, $\{x^n,\bar{x}_1x^{n-1},\dots,\bar{x}_n\}$ 线性无关是明显的. 只需验证 $W^n = Fx^n+F\bar{x}_1x^{n-1}+\dots+F\bar{x}_n$: 不证 $x^n,\bar{x}_1x^{n-1},\dots,\bar{x}_n$ 在 W^n … $Fx^n+F\bar{x}_1x^{n-1}+\dots+F\bar{x}_n$, 利用 $\delta(\bar{x}_i)=\bar{x}_{i+1}$ 易得 $W^n\subseteq Fx^n+F\bar{x}_1x^{n-1}+\dots+F\bar{x}_n$; … $Fx\bar{x}_1x^{n-2}+\dots+Fx^{n-1}\bar{x}_1$, 则由 $x^j\bar{x}_1x^{n-1-j}\in W^n$ 知 $\sum_{k=0}^{j}C_j^k\,\bar{x}_{k+1}x^{j-k}x^{n-1-j}=\dots$ 中, 明显 $x^n,\bar{x}_1x^{n-1}\in W^n$, 若对 $0\leq j\leq n-1$ 有 $\bar{x}_jx^{n-j}\in W^n$, 则由 $\sum_{k=0}^{j}C_j^k\,\bar{x}_{k+1}x^{n-k-1}\in W^n$, 所以 $\bar{x}_{j+1}x^{n-j-1}\in W^n$, 于是断言得证.

故 $\dim_F T_n = 1+2+\dots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, 于是 GKdim $R[x;\delta]\geq\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}}{\ln n}=2$. 故在这个例子中, 有严格不等式 GKdim $R[x;\delta]\geq 2 > 1+0 =$ GKdim $R+1$.

W^n基:	x^n $\bar{x}_1x^{n-1}$ $\bar{x}_2x^{n-2}$ … $\bar{x}_n$
W^{n-1}基:	x^{n-1} $\bar{x}_1x^{n-2}$ … $\bar{x}_{n-1}$
W^{n-2}基:	x^{n-2} $\bar{x}_1x^{n-3}$ … $\bar{x}_{n-2}$
⋮	
W基:	x $\bar{x}_1$
F基:	$\bar{1}$

之前对域F上代数A,B, 我们证明了 $\max\{\text{GKdim}(A),\text{GKdim}(B)\}\leq\text{GKdim}(A\otimes_F B)\leq\text{GKdim}(A)+\text{GKdim}(B)$. 下面给出两个代数(外)直和的GK维数.

Prop 设F是域, A,B为F-代数, 则 GKdim$(A\oplus B)=\max\{\text{GKdim}A,\text{GKdim}B\}$.

Pf. 由 $A\oplus B$ 到 A,B 有满代数同态可知 GKdim$(A\oplus B)\geq\max\{\text{GKdim}A,\text{GKdim}B\}$. 任取 $A\oplus B$ 含幺元的有限维子空间W, 记U,V分别为W在A,B上的投射, 则U,V也是有限维空间且 $1_A\in U$, $1_B\in V$. 那么 $W^n\subseteq(U\oplus V)^n=U^n\oplus V^n$. 记U在A生成的仿射子代数为A', V在B中生成的仿射子代数为B', 则 $W^n\subseteq U^n\oplus V^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. 表明 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\dim_F W^n}{\ln n}\leq\max\{\text{GKdim}A',\text{GKdim}B'\}\leq\max\{\text{GKdim}A,\text{GKdim}B\}$. 于是由W的任意性可知 $A\oplus B$ 的任何仿射子代数GK维数不超过 $\max\{\text{GKdim}A,\text{GKdim}B\}$. 所以 GKdim$(A\oplus B)=\max\{\text{GKdim}A,\text{GKdim}B\}$. □

Cor. 设F是域, $A_1,A_2,\dots,A_m$ 为F-代数, 则 GKdim$(A_1\oplus A_2\oplus\dots\oplus A_m)=\max\{\text{GKdim}(A_1),\dots,\text{GKdim}(A_m)\}$.

Cor. 设F是域, A为F-代数, $I_1,I_2,\dots,I_n$ 为A的真理想, 则 GKdim$(A/I_1\cap I_2\cap\dots\cap I_n)=\max_{1\leq j\leq n}\{\text{GKdim}A/I_j\}$.

Bergman Gap Theorem 下面这部分内容主要为了证明下述定理：

Thm：任给 $r\in\{0\}\cup\{1\}\cup[2,+\infty)$，存在域F上仿射代数A使 $\mathrm{GKdim}\,A=r$，不存在结合代数A使 $\mathrm{GKdim}\,A\in(0,1)\cup(1,2)$

历史上，由Bergman 1978年证明了不存在GK维数在开区间(1,2)中的代数，由Warfield 1984年证明了任何实数 $r\geq 2$，都有仿射代数A使 $\mathrm{GKdim}\,A=r$。之前在证明GK维数为0的代数的刻画时，我们已经看到若域F上代数A满足 $\mathrm{GKdim}\,A>0$，则 $\mathrm{GKdim}\,A\geq 1$，换言之，不存在GK维数在(0,1)中的代数。对任给[2,3)的实数r，我们也构造使GK维数为r的仿射代数：考虑自由代数 $F\langle x,y\rangle$ 的理想 $I=(y)$ 与由集合 $\{x^iyx^kyx^j \mid i+k+j+2=n,\ k<n-n^a\}$ 生成的F-子空间J，这里 $a\in(0,1)$ 为事先给定的实数，易见J为 $F\langle x,y\rangle$ 的理想，置 $A=F\langle x,y\rangle/(I^3+J)$，我们说明对任给 $a\in[\frac{1}{2},1)$，$\mathrm{GKdim}\,A=2a+1$。具体地，易见A为F-仿射代数，有生成子空间 $V=F\bar{x}+F\bar{y}$。对 $n\geq 2$ 易见 V^n 的基有形如以下三种形式的元素构成：$\bar{x}^n$，$\overline{x^iyx^j}\ (i+j=n-1)$，$\overline{x^iyx^kyx^j}\ (i+j+k+2=n,\ k\geq n-n^a)$。第一种元素仅一个，第二种形式的元素n个，第三种形式的元素对每个 $n-n^a\leq k\leq n-2$ 有 $n-k-1$ 个。所以对 $0<a<1$，V^n 的维数有估计 $\dim_F V^n\leq 1+n+n^a(n^a-1)$。对 $\frac{1}{2}\leq a<1$，当n充分大时，$\dim_F V^n\geq 1+n+(\frac{1}{2}n^a-1)(\frac{1}{2}n^a-1)$。于是存在正常数 C_1,C_2，使当n充分大时，$C_1n^{2a}\leq\dim_F V^n\leq C_2n^{2a}$，因此存在常数 C_3,C_4 使 $C_3+C_1\int_0^n x^{2a}dx\leq\dim_F(F1_A+V+\cdots+V^n)\leq C_4+C_2\int_0^{n+1}x^{2a}dx$，即 $C_3+C_1\frac{n^{2a+1}}{2a+1}\leq\dim_F(F1_A+V+\cdots+V^n)\leq C_4+C_2\frac{(n+1)^{2a+1}}{2a+1}$，故 $\ln(C_3+C_1\frac{n^{2a+1}}{2a+1})\leq\ln(\dim_F(\sum_{j=0}^n V^j))\leq\ln(C_4+C_2\frac{(n+1)^{2a+1}}{2a+1})$，于是 $\mathrm{GKdim}\,A=2a+1$。由 $a\in[\frac{1}{2},1)$ 的任意性知对每个 $r\in[2,3)$，存在F-仿射代数A使 $\mathrm{GKdim}\,A=r$。若A为仿射代数，那么 $A[x]$ 也为仿射代数，于是利用 $\mathrm{GKdim}(A[x])=\mathrm{GKdim}\,A+1$ 知每个 $r\geq 2$，都存在F-仿射代数A使 $\mathrm{GKdim}\,A=r$。明显F-仿射代数 $M_n(F)$ 的GK维数为0，$F\langle x,y\rangle$ 的GK维数是 $+\infty$，所以对每个 $r\in\{0\}\cup\{1\}\cup[2,+\infty)$，存在F仿射代数A使 $\mathrm{GKdim}\,A=r$。因此，要证明Bergman Gap定理，最后要证明的只剩下：不存在域F上代数A使 $\mathrm{GKdim}\,A\in(1,2)$。我们的策略是证明满足 $\mathrm{GKdim}\,A<2$ 的代数A，必有 $\mathrm{GKdim}\,A\leq 1$。如果F-代数A满足 $\mathrm{GKdim}\,A<2$，那么这意味着A的任何仿射子代数 A' 有 $\mathrm{GKdim}\,A'<2$，如果我们证明此时A的任何仿射子代数 A' 满足 $\mathrm{GKdim}\,A'\leq 1$，那么也就得到 $\mathrm{GKdim}\,A\leq 1$。因此首先要处理仿射代数的情形。

现设F-代数A仿射，V为A的生成子空间，有基 $\{1_A=a_1,a_2,\ldots,a_m\}$。设X是由集合 $\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ 张成的自由半群，在X上如下定义二元关系 $<$：(1) $x_1<x_2<\cdots<x_m$，(2) 任给 $x,y\in X$，若x长度严格小于y或x与y长度相同但字典序意义下x在y前（即 $x=x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r}$，$y=x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_r}$，存在 $1\leq j\leq r$ 使 $i_1=k_1,i_2=k_2,\ldots,i_{j-1}=k_{j-1}$ 但 $i_j<k_j$），则定义 $x<y$。那么我们在X上定义的二元关系 $<$ 具备传递性，且对任给 $x\neq y\in X$，$x<y$ 与 $y<x$ 有且仅有一个成立，故 $<$ 给出X上的一个序。我们有唯一的半群同态 $\psi: X\to A$ 使 $\psi(x_k)=a_k,\ \forall 1\leq k\leq m$（即 $\psi(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_t})=a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_t}$），那么现在归纳地定义X的一个子集W：(1) $W_1=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$，(2) 若已定义好 $W_n\ (n\geq 1)$ 且 W_n 是由一些长度不超过n的字构成的，如下定义 W_{n+1}：以上述定义的字典序将所有长度为n+1的字排成一行，从左到右去掉满足下述性质的字w：若 $\psi(w)\in A$ 可由某些 $\psi(y)$，$y<w$ 来F-线性表出则把w去掉。定义 W_{n+1} 为 W_n 与上述剩下的长度为n+1的字构成集合之并。(3) 命 $W=\bigcup_{n\geq 1}W_n$。对于这样构造的集合W，有：

Lem (1) $\psi(W)$ 为A作为F-线性空间的一个基；(2) W中任何一个字的子字仍在W中。

Pf: (1) 先证明 $\psi(W)$ 可线性生成 A，这只需证明单项式 $a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_m^{i_m}$ $(i_1,i_2,\dots,i_m\in\mathbb{N})$ 可被 $\psi(W)$ 中有限个元素线性表出，注意到 A 中任意关于生成元集 $\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$ 的字在 $\psi(X)$ 中，故只需证明对每个 $x\in X$，$\psi(x)$ 可被 $\psi(W)$ 中的元素线性表出。下面良序集 $(X,\le)$（这里 $\le$ 表示 $x\le y \Leftrightarrow x=y$ 或 $x<y$，$x,y\in X$，根据前面对 $<$ 的定义，不难看出 $(X,\le)$ 为良序集）作超限归纳法（见注记）证明每个 $x\in X$，$\psi(x)$ 均可被 $\psi(W)$ 中元素线性表出。$(X,\le)$ 中最小元为 x_1，$x_1\in W$，故 $\psi(x_1)$ 可被 $\psi(W)$ 中元素表出。假设对 $x\in X$，任何 $y<x\in X$ 均有 $\psi(y)$ 可被 $\psi(W)$ 中元素线性表出，那么对 $\psi(x)$，不妨设 $x\notin W$，那么存在 $y_1,y_2,\dots,y_t<x$ 使 $\psi(x)$ 可被 $\psi(y_1),\psi(y_2),\dots,\psi(y_t)$ 线性表出，由归纳假设，$\psi(y_1),\psi(y_2),\dots,\psi(y_t)$ 可被 $\psi(W)$ 中元素线性表出，故 $\psi(x)$ 也可被 $\psi(W)$ 中元素线性表出。依超限归纳法原理，结论成立。再证明 $\psi(W)$ 线性无关。任取 $w_1,w_2,\dots,w_n\in W$，$w_1<w_2<\cdots<w_n$，设 $c_1,c_2,\dots,c_n\in F$ 使 $c_1\psi(w_1)+c_2\psi(w_2)+\cdots+c_n\psi(w_n)=0$，假设 $c_n\neq 0$，则由 $\psi(w_n)$ 可被 $\psi(w_1),\dots,\psi(w_{n-1})$ 线性表出得到矛盾，故 $c_n=0$，依此类推可得 $c_{n-1}=\cdots=c_2=0$，得 $c_1\psi(w_1)=0$。而对每个 $w\in W$ 有 $\psi(w)\neq 0$，否则，$\psi(w)=0\Rightarrow w\neq w_1$，由 $\psi(w)=0\psi(x_1)$ 得到矛盾，所以 $c_1=0$，于是 $\psi(W)$ 线性无关，故 $\psi(W)$ 为 A 的一个基。□

(2) 假设 W 有字 $w'ww''\in W$ 的子字 w 不在 W 中，那么存在 X 中字 $y_1,y_2,\dots,y_n$，$y_i<w$ 使得 $\psi(w)$ 可被 $\psi(y_1),\psi(y_2),\dots,\psi(y_n)$ 线性表出，即存在 $c_i\in F$ 使 $\psi(w)=\sum_{i=1}^{n}c_i\psi(y_i)$，进而 $\psi(w'ww'')=\sum_{i=1}^{n}c_i\psi(w'y_iw'')$，这里 $w'y_iw''<w'ww''$，因此 $w'ww''\notin W$，矛盾。□

Rmk 设 $(X,\le)$ 为良序集，$P(x)$ 是关于 $x\in X$ 的命题，若 $P(x)$ 对 $x=\min X$ 成立，只要对于 $y\in X$ 有 $P(y)$ 成立，$\forall y<x$，则有 $P(x)$ 成立，那么对任给 $x\in X$，$P(x)$ 成立。用该原理证明关于一良序集中元素的命题的方法被称为超限归纳法。超限归纳法原理的证明：置 $S=\{a\in X \mid P(a)\text{不成立}\}$，只需证 $S=\emptyset$。若 $S\neq\emptyset$，设 S 有最小元 b，则 $b\neq\min X$，于是对任何 $y<b\in X$ 有 $P(y)$ 成立，由条件得 $P(b)$ 成立，这与 $b\in S$ 矛盾。

考虑由集合 $\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$ 生成的自由半群 X。若 X 中长度至少为 2 的字 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ $(n\ge 2)$ 满足存在正整数 $1\le p\le n-1$ 使 $x_{i_k}=x_{i_{k+p}}$，$\forall\, 1\le k\le n-p$，则称该字以 p 为周期，称该字为有周期性的字（periodic word），最小的周期称为最小周期（minimal period）。注意周期性的字的最小周期未必整除任一周期，例如字 $xxyxxyxx$.

Lem 设自由半群 $X=\langle x_1,x_2,\dots,x_m\rangle$，$x\in X$ 是长度为 $n\ge 2$ 的字，有最小周期 p。如果 x 有两个子字 $x_{k_{i+1}}x_{k_{i+2}}\cdots x_{k_{i+r}}=x_{k_{j+1}}x_{k_{j+2}}\cdots x_{k_{j+r}}$，长度均为 $r\ge p+1$，$0\le i<j$，则 p 整除 $j-i$（这里 $x=x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_n}$）。

Pf 首先可将 x 在保持周期 p 的前提下向左/向右加长，使下面讨论的下标全部有意义（并且任何一个以 p 为最小周期的字加长后最小周期也为 p）。对于 $x_{k_{i+1}}x_{k_{i+2}}\cdots x_{k_{i+(p+1)}}=x_{k_{j+1}}\cdots x_{k_{j+(p+1)}}$，由 $x_{k_i}x_{k_{i+1}}\cdots x_{k_{i+(p-1)}}$ 与 $x_{k_j}x_{k_{j+1}}\cdots x_{k_{j+(p-1)}}$ 均为 x 加长后的一个最小周期完整片段，所以 $x_{k_{i+s}}=x_{k_{j+s}}$，$\forall\, 0\le s\le p-1$（这里是平凡的），存在 $0\le s,t\le p$ 使 $x_{k_i}x_{k_{i+1}}\cdots x_{k_{i+(p-1)}}=x_{k_{s+1}}\cdots x_{k_p}x_{k_1}\cdots x_{k_s}$，$x_{k_j}x_{k_{j+1}}\cdots x_{k_{j+(p-1)}}=x_{k_{t+1}}\cdots x_{k_p}x_{k_1}\cdots x_{k_t}$，我们断言 $x_{k_{s+1}}=x_{k_{t+1}}$，下面证明该断言结论成立。首先这时 $x_{k_{s+1}}=x_{k_{t+1}},\dots,x_{k_s}=x_{k_t}$，元素组 $x_{k_{s+1}},\dots,x_{k_p},x_{k_1},\dots,x_{k_s}$ 与 $x_{k_{t+1}},\dots,x_{k_p},x_{k_1},\dots,x_{k_t}$ 相同，后 $p-1$ 位对应相同。假设 $x_{k_{s+1}}\neq x_{k_{t+1}}$，对两个元素组都删去与 $x_{k_{s+1}}$ 相同的元，那么第一个元素组剩下的项数比第二个元素组剩下的项数多，这与两个元素组相同（即元素个数相同且经过重排后对应元素相同）由此得到矛盾），于是由前面的讨论可

知 $i\equiv j \pmod p$. 这是因为 $x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_p}$, $x_{k_2}x_{k_3}\cdots x_{k_p}x_{k_1}$, $\cdots$, $x_{k_p}x_{k_1}\cdots x_{k_{p-1}}$ 两两不同(若不然，设 $0\le s<t\le p-1$ 使 $x_{k_{s+1}}\cdots x_{k_p}x_{k_1}\cdots x_{k_s}$ 与 $x_{k_{t+1}}\cdots x_{k_p}x_{k_1}\cdots x_{k_t}$ 相同,这将导致 $x_{k_u}=x_{k_{u+(t-s)}}$, $\forall 1\le u\le p$, 这与 x 自身的最小周期为 p 矛盾)，于是前面证明 j 对 $0\le s<t\le p-1$, 若 $x_{k_{s+1}}\cdots x_{k_p}x_{k_1}\cdots x_{k_s}$ 与 $x_{k_{t+1}}\cdots x_{k_p}x_{k_1}\cdots x_{k_t}$ 在 $p-1$ 项后也相同蕴含 $x_{k_{s+1}}=x_{k_{t+1}}$, 这迫使 $s=t$, 所以由 $i\equiv s+1 \pmod p$ 及 $j\equiv t+1 \pmod p$ 可知 $j-i\equiv 0 \pmod p$, 因此 p 整除 $j-i$. □

Rmk x 版失最小周期为 p, 那么在 x 后面按 p 为周期的前缀加长成新的字 x', x' 的最小周期仍为 p.

Lem 设 $X=\langle x_1,x_2,\cdots,x_m\rangle$ 是自由半群，$W\subseteq\langle x_1,x_2,\cdots,x_m\rangle$ 满足 W 中任何字的子字也在 W 中. 若存在正整数 d 使 W 中长度为 d 的字不超过 d 个，那么对任给 $h\ge d$, W 中长为 h 的字不超过 d^2 个.

Pf. 如果 $h\le 2d$, 那么 W 中长为 h 的字被它前端长为 d 的子字与末端长为 d 的子字决定，于是 W 中长为 h 的字不超过 d^2 个，结论成立. 对于 $h\ge 2d$ 的情形，我们证明下述断言：

Claim 对每个 $h\ge 2d$, 若 $w\in W$ 是长度为 h 的字，那么存在 w 的子字 w_1,w_2,w_3 使 $w=w_1w_2w_3$, w_2 是最小周期为 $p\le d$ 的周期字, w_1 与 w_3 的字长不超过 $d-p$, 这里 w_1 与 w_3 的字长可为0, 即 $w=w_1w_2$ 或 w_2w_3 或 w_2. 一旦证明该断言，因 w 的 w_2 长度 $\ge 3d+p$ 选取可能数不超过 d (w_1 与 w_3 至多 d 种选取方式，否则 W 中长度为 d 的字不止 d 个, w_2 的选取方式不超过 d).

我们对 $h\ge 2d$ 作归纳. 如果 $h=2d$, 则 $w=x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_{2d}}$ 有 $d+1$ 个长为 d 的子字，抽屉原理，w 有两个长为 d 的子字相同. 设为 $x_{k_{j+1}}\cdots x_{k_{j+d}}=x_{k_{j+p+1}}\cdots x_{k_{j+p+d}}$, $j\ge 0$, $p>0$, $j+p+d\le 2d$, 选 p 为使这样两个字存在的最小正整数 ($p=\min\{p>0 \mid$ 存在 $j\ge 0$ 使 $x_{k_{j+1}}\cdots x_{k_{j+d}}=x_{k_{j+p+1}}\cdots x_{k_{j+p+d}}$, $j+p+d\le 2d\}$), 那么 $x_{k_{j+1}}x_{k_{j+2}}\cdots x_{k_{j+p+d}}$ 是最小周期为 p 的字(易见有周期 p, 最小周期为 p 使用反证法可得与 p 选取矛盾), 长度为 $p+d$. 取 $w_1=x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_j}$, $w_2=x_{k_{j+1}}\cdots x_{k_{j+p+d}}$, $w_3=x_{k_{j+p+d+1}}\cdots x_{k_{2d}}$, 那么 w_1 与 w_3 长度不超过 $d-p$, 故当 $h=2d$ 时结论成立. 假设结论对 $h\ge 2d$ 的情形成立，欲考虑 W 中长为 $h+1$ 的字 $x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_{h+1}}$, 由归纳假设，可设 $w=x_{k_1}(x_{k_2}\cdots x_{k_j})(x_{k_{j+1}}\cdots x_{k_{j+r}})(x_{k_{j+r+1}}\cdots x_{k_{h+1}})$, 这里 $j-1\le d-p$, $(h+1)-(j+r)\le d-p$, $x_{k_{j+1}}\cdots x_{k_{j+r}}$ 是最小周期为 $p\le d$ 的周期字, $r\ge p+d$, $j\ge 1$. 如果 $j-1<d-p$, 注意 $w=(x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_j})(x_{k_{j+1}}\cdots x_{k_{j+r}})(x_{k_{j+r+1}}\cdots x_{k_h}x_{k_{h+1}})$ 知结论成立. 因此只需处理 $j-1=d-p$ 的情形. 这时，因为 $j=d-p+1$ 且 $r\ge p+d$, 所以 $j+r\ge 2d$, 那么 $x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_{2d}}$ 为 $x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_{j+r}}$ 的子字，那么 $x_1x_2\cdots x_{2d}$ 有两个长度为 d 相等的子字，设为 $x_{k_{i+1}}\cdots x_{k_{i+d}}=x_{k_{i+n+1}}\cdots x_{k_{i+n+d}}$, $i\ge 0$, $n>0$ 且 $i+n\le d$. 可直接计算验证这两个字的后 $p-1$ 位的子字都为 $x_{k_{j+1}}\cdots x_{k_{j+r}}$ 的子字 $(i+d-p+2=(i+1)+(d-p+1)\ge j+1)$. 故利用前面的引理，得 $p\mid n$, 于是 $j=d-p+1\ge d-n+1\ge i+1$, 这说明 x_{k_j} 是 $x_{k_{i+1}}\cdots x_{k_{i+d}}$ 中的一项. 于是 $x_{k_{i+n+1}}\cdots x_{k_{i+n+d}}$ 有一项 $x_{k_{j+n}}=x_{k_j}$. 因为 $j+n\le j+d\le j+r$ 所以 $x_{k_{j+n}}$ 在 $x_{k_{j+1}}\cdots x_{k_{j+r}}$ 中，那么利用 n 为 p 的倍数可知 $x_{k_{j+p}}=x_{k_{j+n}}=x_{k_j}$, 这说明 $x_{k_j}x_{k_{j+1}}\cdots x_{k_{j+r}}$ 是最小周期为 p 的周期字，于是 $w=(x_{k_1}\cdots x_{k_{j-1}})(x_{k_j}\cdots x_{k_{j+r}})(x_{k_{j+r+1}}\cdots x_{k_{h+1}})$ 为满足条件的分解，断言得证. □

现在我们可以证明Bergman的下述定理来完成Bergman Gap定理的证明.

Thm (Bergman) 不存在域上代数使其GK维数严格介于1与2之间.

Pf. 只需证明任给仿射代数 A, 若 $\mathrm{GKdim}\,A<2$, 则 $\mathrm{GKdim}\,A\le 1$ 即可. 现设 F-仿射代数 A 使 $\mathrm{GKdim}\,A<2$, 下证 $\mathrm{GKdim}\,A\le 1$. 设 $1_A\in V$ 为 A 的生成子空间，有基 $\{1_A=a_1,a_2,\cdots,a_m\}$, 我们断言存在正整数 d 使 $\dim((V^0+V+\cdots+V^d)/(V^0+\cdots+V^{d-1}))<d$, 否则易得 $\dim_F(V^0+V+\cdots+V^n)\ge 1+2+\cdots+n=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, 故 $\mathrm{GKdim}\,A\ge 2$, 矛盾. 之前我们已基于生成子空间构造了自由

生成元 $\langle x_1,x_2,\dots,x_m\rangle$ 的子集 W，使 $\psi(W)$ 为 A 作为线性空间的一个基，且 W 的任何字的子字还在 W 中。因为 $\dim(V^0+V^1+\cdots+V^d)-\dim(V^0+\cdots+V^{d-1})<d$，所以 W 中长为 d 的字少于 d 个（根据前面 $W=\bigcup_{n} W_n$ 的定义，$W_{n+1}-W_n$ 中的字如果存在，长度为 $n+1$，对每个正整数 n，$\psi(W_n)$ 生成的子空间为 V^n）于是对每个 $n\geq d$，有 $\dim_F(V^0+V^1+\cdots+V^n)\leq \dim_F(V^0+V^1+\cdots+V^d)+(n-d)d^2$，由此立即得到 $\mathrm{GKdim}\,A\leq 1$，得证。□

之前证明了交换的仿射代数它的GK维数与Krull维数一致。下面说明对一般的交换代数，其GK维数与Krull维数未必一致。先回顾一下非交换环局部化的基本概念。设 R 为含幺环，乘闭子集 S 若满足对任意 $r\in R$，$s\in S$ 有 $sR\cap rS\neq\emptyset$，则称 S 满足右Ore条件，也称 S 为右Ore集。当 S 为右Ore集时，易证 $\mathrm{ass}(S)=\{a\in R\mid$ 存在 $s\in S$ 使 $as=0\}$ 为 R 的理想，于是可定义商环 $\bar{R}=R/\mathrm{ass}(S)$，记 $\bar{S}=\{s+\mathrm{ass}(S)\mid s\in S\}$，我们有：

<u>Thm</u> 设 R 为含幺环，S 为乘闭子集，则右商环 R_S 存在 $\Longleftrightarrow$ S 为右Ore集且 $\bar{S}$ 中元素均为正则元。

当 S 是由正则元构成的右Ore集时，易证 $\bar{S}$ 中元素也均为正则元，于是知此时 R_S 存在，并且 $\mathrm{ass}(S)=\{0\}$ 表明 $R\to R_S$ 为单环同态，由此可将 R 嵌入 R_S，那么 R_S 中每个元素可表为 $\lambda(a)\lambda(s)^{-1}$ 也可替换为 as^{-1}。如果 R 的乘闭子集 S 中元素均为中心正则元，则 R_S 存在，并且有上述结果。

<u>Prop</u> 设 R 为域 F 上代数，S 为乘闭子集且 S 中元素均为中心正则元，则 $\mathrm{GKdim}(R_S)=\mathrm{GKdim}\,R$。

<u>Pf</u> 由前面的讨论知当 S 中元素均为正则元时，R 可视作 R_S 的子代数，所以 $\mathrm{GKdim}\,R\leq\mathrm{GKdim}(R_S)$。任取 R_S 的仿射子代数 T，并设 $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 T 的标准有限维滤，则由 T_1 为有限维空间知存在 $s\in S$ 使 $T_1s\subseteq R$，于是对 R 的有限维子空间 $V_1=T_1s+F1_R$，它决定 R 一子代数的标准有限维滤 $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$，有 $s^nT_n\subseteq V_n$，故由 F-线性同构 $T_n\cong s^nT_n$ 可知 $\dim_F T_n\leq\dim_F V_n$，从而 $\mathrm{GKdim}\,T\leq\mathrm{GKdim}\,R$，于是 $\mathrm{GKdim}(R_S)\leq\mathrm{GKdim}\,R$。□

<u>Rmk</u> 特别地，若 F-代数 R 为交换整环，则 $\mathrm{GKdim}(Q(R))=\mathrm{GKdim}\,R$。

<u>Eg.</u> 对域 F 上多项式环 $F[x]$，我们知道 $\mathrm{GKdim}(F[x])=1$，所以 $\mathrm{GKdim}(F(x))=1$，但 $F(x)$ 作为域，$\mathrm{Kdim}(F(x))=$

证明Bergman Gap定理会用到的引理：设 $X=\langle x_1,x_2,\dots,x_m\rangle$ 是自由半群，$W\subseteq X$ 满足 W 的子字也在 W 中。那么若 $\exists d\geq 0$ 使 W 中长度为 d 的字不超过 d 个，则对任给 $n\geq d$，W 中长为 n 的字不超过 d 个。利用这一点我们可以给出另一个代数张量积GK维数的性质。

<u>Prop</u> 设 F 是域，A,B 是 F 代数，若 $\mathrm{GKdim}(A)\leq 2$，则 $\mathrm{GKdim}(A\otimes B)=\mathrm{GKdim}\,A+\mathrm{GKdim}\,B$。

<u>Pf</u> 由于一个 F 代数它的GK维数一旦不超过2，则它可能的GK维数仅 $0,1,2$，所以存在 A 的仿射子代数 A' 使 $\mathrm{GKdim}(A')=\mathrm{GKdim}(A)$，并设 A' 有生成子空间 V 使 $1_A\in V$。当 $\mathrm{GKdim}\,A=0$ 时，$\mathrm{GKdim}\,A'=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(\dim_F V^n)}{\ln n}$，注意到当 $n\geq 2$ 时，$\frac{\ln(\dim_F V^n)}{\ln n}\geq 0$，所以 $\mathrm{GKdim}\,A'=\mathrm{GKdim}\,A=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(\dim_F V^n)}{\ln n}$，于是 $\mathrm{GKdim}(A\otimes B)=\mathrm{GKdim}\,A+\mathrm{GKdi}$

当 $\mathrm{GKdim}\,A=1$ 时. $\mathrm{GKdim}\,A'=1$，所以 $V^0 \subsetneq V^1 \subsetneq V^2 \subsetneq \cdots$，进而 $\dim_F V^n \geq n$，由此得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(\dim_F V^n)}{\ln n}=1=\mathrm{GKdim}\,A'=\mathrm{GKdim}\,A$，所以 $\mathrm{GKdim}(A\otimes_F B)=\mathrm{GKdim}\,A+\mathrm{GKdim}\,B$. 最后证明 $\mathrm{GKdim}\,A=2$ 的情形，此时 $\mathrm{GKdim}\,A'=2$.

<u>Claim</u> 任给 $n\geq 1$ 有 $\dim_F V^n-\dim_F V^{n-1}\geq n$. 若不然，$\exists\, d\geq 1$ 使 $\dim_F V^d-\dim_F V^{d-1}<d$. 于是对任何 $n\geq d$，有 $\dim_F V^n-\dim_F V^{n-1}\leq d^3$，由此可得 $\dim_F V^n\leq(n-d+1)d^3+\dim_F V^{d-1}$，$\forall n\geq d$，进而 $\mathrm{GKdim}\,A'\leq 1$，矛盾. 断言得证.

由 $\dim_F V^n-\dim_F V^{n-1}\geq n$，$\forall n\geq 1$ 知 $\dim_F V^n\geq 1+\frac{n(n+1)}{2}$，$\forall n\geq 1$. 这表明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(\dim_F V^n)}{\ln n}=2=\mathrm{GKdim}\,A'=\mathrm{GKdim}\,A$，因此 $\mathrm{GKdim}(A\otimes_F B)=\mathrm{GKdim}\,A+\mathrm{GKdim}\,B$. $\square$