无限可数维线性空间的线性变换环

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 11 月 25 日

这份笔记的目的是记录除环 Δ 上可数无限维线性空间 V 的线性变换环 $R = \mathrm{End}({}_\Delta V)$ 的环论性质.

Lemma 1. 设 $f, g \in R$ 满足 $\dim_\Delta \mathrm{Im} g \le \dim_\Delta \mathrm{Im} f$, 那么存在 $h_1, h_2 \in R$ 使得 $g = h_2 f h_1$.

Proof. 设 $\mathrm{Ker} f, \mathrm{Ker} g$ 在 V 中的补空间分别为 V_1, V_2, 则有 $V = \mathrm{Ker} f \oplus V_1 = \mathrm{Ker} g \oplus V_2$. 那么由第一同构定理知 $V_1 \cong V/\mathrm{Ker} f \cong \mathrm{Im} f, V_2 \cong V/\mathrm{Ker} g \cong \mathrm{Im} g$. 所以 $\dim_\Delta \mathrm{Im} g = \dim_\Delta V_2, \dim_\Delta \mathrm{Im} f = \dim_\Delta V_1$. 如果 f, g 中至少有一个是零映射, 结论直接成立, 故不妨设 $f, g \neq 0$, 于是 V_1, V_2 均是非零线性空间. 设 V_1 有基 $\{\alpha_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, V_2 有基 $\{\beta_\lambda | \lambda \in \Lambda_1\}$, 这里 Λ_1 是 Λ 的非空子集. 定义线性变换 $h_1 : V \to V$ 满足 $h_1(\mathrm{Ker} g) = 0$ 且 $h_1(\beta_\lambda) = \alpha_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda_1$, 易见 $\mathrm{Im} f h_1$ 是以 $\{f(\alpha_\lambda) | \lambda \in \Lambda_1\}$ 为基的子空间. 定义线性变换 $h_2 : V \to V$ 满足 $h_2(f(\alpha_\lambda)) = g(\beta_\lambda), \forall \lambda \in \Lambda_1$, 那么对任何 $\lambda \in \Lambda_1$, 有 $g(\beta_\lambda) = h_2 f h_1(\beta_\lambda)$, 结合 g 与 $h_2 f h_1$ 在 $\mathrm{Ker} g$ 上取值都为零知 $g(v) = (h_2 f h_1)(v), \forall v \in V$. 所以 $g = h_2 f h_1$. □

Proposition 1. 设 $f \neq 0 \in R$ 满足 $\dim_\Delta \mathrm{Im} f < +\infty$, 那么 f 可以写成有限个像空间维数为 1 的线性变换之和. 特别地, $I = \{f \in \mathrm{End}({}_\Delta V) | \dim_\Delta \mathrm{Im} f < +\infty\}$ 是 R 唯一的非零真理想.

Proof. 设 $\mathrm{Im} f$ 有基 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$. 对每个 $\alpha \in V$, 设 $f(\alpha) = f_1(\alpha)\beta_1 + \cdots + f_m(\alpha)\beta_m$, 这里

$$f_1(\alpha), f_2(\alpha), ..., f_m(\alpha) \in \Delta.$$

那么每个 $f_k : V \to \Delta$ 都是 Δ-线性函数. 对每个正整数 $1 \le k \le m$, 定义 $g_k : V \to V, \alpha \to f_k(\alpha)\beta_k$, 则 $g_k \in \mathrm{End}({}_\Delta V)$ 且像空间维数是 1. 直接验证可知 $f = g_1 + g_2 + \cdots + g_m$, 为有限个像空间维数为 1 的线性变换之和. 下证 I 是 R 唯一的非平凡理想. 设 J 是 R 的非零真理想, 则 $J \subseteq I = \{f \in \mathrm{End}({}_\Delta V) | \dim_\Delta \mathrm{Im} f < +\infty\}$ 且由 J 中含非零线性变换知 J 包含所有像空间维数是 1 的线性变换, 故由 I 中任一非零线性变换可写成有限个像空间维数为 1 的线性变换之和知 $I \subseteq J$, 故 $I = J$, 由此得到唯一性. □

Corollary 1. 环 R 的理想集为 $\{0, I, R\}$, 其中 $I = \{f \in \mathrm{End}({}_\Delta V) | \dim_\Delta \mathrm{Im} f < +\infty\}$.

Corollary 2. 环 R 满足只有唯一的极大理想但不是局部环.

Proof. 根据前面的讨论知 $R = \mathrm{End}({}_\Delta V)$ 只有唯一的极大理想 $I = \{f \in \mathrm{End}({}_\Delta V) | \dim_\Delta \mathrm{Im} f < +\infty\}$. 但 R 的不可逆元全体并不构成理想. 不难构造 R 中两个不可逆元 f, g 满足 $f + g = 1$ 可逆. □

Corollary 3. 环 R 是本原环, 但不是单环.

Proof. 设 V 有 Δ-基 $\{\alpha_n|n \geq 1\}$. 直接验证可知 $I_k = \{f \in \mathrm{End}(_\Delta V)|f(\alpha_k) = 0\}, \forall k \geq 1$ 都是 R 的极大左理想. 且每个 I_k 都不包含非零理想. 特别地, R 存在一个极大左理想不含任何非零理想, 所以 R 是本原环. □

Corollary 4. 记 $I = \{f \in \mathrm{End}(_\Delta V)|\dim_\Delta \mathrm{Im} f < +\infty\}$, 那么 $\mathrm{Jac}(R/I) = 0$.

Proposition 2. 记 $I = \{f \in \mathrm{End}(_\Delta V)|\dim_\Delta \mathrm{Im} f < +\infty\}$, 那么 R/I 不是左、右 Artin 环.

Proof. 根据 R/I 是半本原环, Wedderburn-Artin 定理表明只需验证 R/I 不是左 Artin 环. 设 V 有 Δ-基 $\{\alpha_n|n \geq 1\}$. 可构造 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 的非空子集严格升链 $\Lambda_1 \subsetneq \Lambda_2 \subsetneq \cdots$ 使得每个 $\lambda_{n+1} - \Lambda_n$ 是无限可数集 (例如取 $\Lambda_n = \mathbb{Z}_{\geq 1} - 2^n\mathbb{Z}_{\geq 1}$). 记 I_n 是 R 中所有零化 $\{\alpha_k|k \in \Lambda_n\}$ 的线性变换构成的左理想. 则有左理想降链 $I_1 + I \supseteq I_2 + I \supseteq \cdots$. 下证该左理想降链是严格的. 首先可构造 $h \in R$ 使得对任何 $t \in \Lambda_{n+1} - \Lambda_n$, 有 $h(\alpha_t) = \alpha_t$ 并且 $h \in I_n$. 如果有 $I_n + I = I_{n+1} + I$, 则存在 $f \in I_{n+1}$ 与 $g \in I$ 使得 $h = f + g$. 那么 $g(\alpha_t) = h(\alpha_t) = \alpha_t, \forall t \in \Lambda_{n+1} - \Lambda_n$. 这和 $\mathrm{Im} g$ 是有限维空间矛盾. 因此有左理想严格降链 $I_1 + I \supsetneq I_2 + I \supsetneq \cdots$. □

回忆含幺环 T 被称为 **Dedekind 有限的**, 如果任何 $a, b \in T$ 满足 $ab = 1$ 蕴含 $ba = 1$.

Proposition 3. 记 $I = \{f \in \mathrm{End}(_\Delta V)|\dim_\Delta \mathrm{Im} f < +\infty\}$, 那么 R 与 R/I 都不是 Dedekind 有限环.

Proof. 设 V 有 Δ-基 $\{\alpha_n|n \geq 1\}$. 构造线性变换 $f \in R$ 满足 $f(\alpha_{2n}) = \alpha_n, f(\alpha_{2n-1}) = 0, \forall n \geq 1$. 再构造 $g \in R$ 满足 $g(\alpha_n) = \alpha_{2n}, \forall n \geq 1$. 那么 $fg = \mathrm{id}_V$ 且 $\mathrm{id}_V - gf \notin I$. 故 R 与 R/I 都不是 Dedekind 有限的. □

因为单边 Noether 环总是 Dedekind 有限环, 因此我们得到:

Corollary 5. 记 $I = \{f \in \mathrm{End}(_\Delta V)|\dim_\Delta \mathrm{Im} f < +\infty\}$, 那么 R 与 R/I 均不是左、右 Noether 环.