二面体群

戚天成 ✉

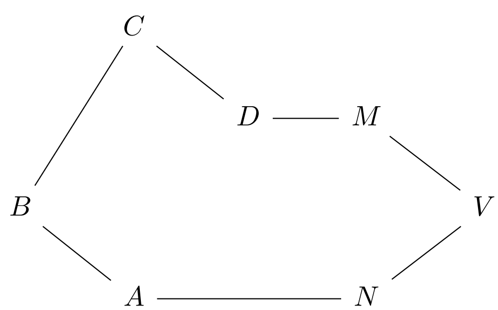
复旦大学 数学科学学院

2023 年 9 月 24 日

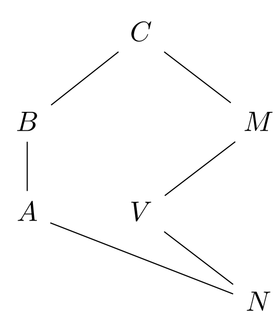
设 $F \neq \varnothing \subseteq \mathbb{R}^2$ 是平面上一图形, 记平面上全体保持 F 的正交变换为 G_F, 即 $G_F = \{\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 | \sigma(F) = F \text{且} \sigma \text{是正交变换}\}$, 易见它关于映射复合构成群, 称为图形 F 的**对称群** (symmetry group).

Lemma 1. 设 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个多边形, 那么对任何正交变换 $\sigma \in G_P$, σ 将多边形的顶点映到顶点.

Proof. 先证 P 的任一顶点 V 在 σ 作用下必定在 P 的边界上. 再说明 $\sigma(V)$ 不可能落在多边形某条边的内部.



假设 $V' = \sigma(V)$ 在多边形 P 的内部, 那么存在闭圆盘 D 满足 D 以 V' 为圆心且 $D \subseteq P$. 于是对介于 $0°$ 到 $360°$ 的任意角 α, 存在 D 中点 $J', K'(J' = \sigma(J), K' = \sigma(K), J, K \in P)$ 使得 $\angle J'V'K' = \alpha$, 因为正交变换保持角度, 所以 $\angle JVK = \angle J'V'K' = \alpha$. 但 P 中任何以 V 为顶点的角都不超过 $\angle MVN < 360°$, 所以选取 $\alpha > \angle MVN$ 即可得到矛盾, 于是知 V' 在 P 的边界上. 下面说明 V' 不可能在 P 的某条边的内部. 假设 V' 在某条边内部. 当 $\angle MVN < 180°$ 时, 存在 $J', K' \in P$ 使得 $\angle J'V'K' = 180°$, 因此 $\angle JVK = 180°$. 但 $\angle JVK \leq \angle MVN < 180°$, 这就得到了矛盾.



当 $\angle MVN > 180^\circ$ 时, 对 $M' = \sigma(M), N' = \sigma(N)$, 有

$$\angle M'V'N' = \angle MVN > 180^\circ,$$

但 $\angle M'V'N' \leq 180^\circ$, 矛盾. $\square$

根据上面的引理, 若记多边形 P 的顶点集为 $\mathrm{Ver}(P)$, 则每个 $\sigma \in G_P$ 在 $\mathrm{Ver}(P)$ 上的限制给出了 $\mathrm{Ver}(P)$ 上的置换. 事实上, 每个 σ 被它在顶点上的作用唯一确定, 具体地, 对 $\sigma, \tau \in G_P$, 如果 $\sigma|_{\mathrm{Ver}(P)} = \tau|_{\mathrm{Ver}(P)}$, 那么 $\sigma = \tau$. 这是因为如果 $\sigma|_{\mathrm{Ver}(P)} = \tau|_{\mathrm{Ver}(P)}$, 那么 $\sigma\tau^{-1}$ 作为 $\mathbb{R}^2$ 上线性变换固定两个线性无关的向量, 于是 $\sigma = \tau$. 下面我们来看正 n 边形的对称群具有何种性质.

将正 $n(n \geq 3)$ 边形的中心置于 $\mathbb{R}^2$ 原点, 第 $k(1 \leq k \leq n)$ 个顶点置于 $v_k = (\cos 2k\pi/n, \sin 2k\pi/n)$, 记该正 n 边形的对称群是 D_n, 称为**正 n 边形的二面体群** (dihedral group). 由前面的讨论知, D_n 中的元素将多边形顶点映至顶点, 我们知道正 n 边形任意两个顶点间的距离最短当且仅当这两个顶点是相邻的, 所以由正交变换保持长度可知 D_n 中元素作用每个顶点只可能把该顶点变为相邻顶点. 我们已经看到 D_n 中任何置换 σ 被它在两个顶点上的作用唯一确定, 所以只要确定 D_n 中两个顶点被 σ 作用后的像就可以确定 σ. $\sigma(v_1)$ 有 n 种选取方式, 当 $\sigma(v_1)$ 确定后 $\sigma(v_2)$ 只有两种选取方式, 所以 $|D_n| \leq 2n$. 记 $r \in D_n$ 是绕原点逆时针旋转 $2\pi/n$ 的旋转变换, 即满足 $r(v_1) = v_2, r(v_2) = v_3, ..., r(v_n) = v_1$ 的正交变换. 记 $s \in D_n$ 是关于 x 轴的镜像反射, 即 $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, -y)$, 从而 $s(v_1) = v_1, s(v_2) = v_n, s(v_3) = v_{n-1}, ..., s(v_n) = v_2$. 那么 $r^n = 1, r^k \neq 1, \forall 1 \leq k \leq n-1, s^2 = 1, rs = sr^{-1}$. 因为 s 固定 v_1, 所以 $s \neq r^k, \forall 1 \leq k \leq n-1$. 由此可知 D_n 中包含下述 $2n$ 个元素：$1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, ..., sr^{n-1}$, 故 $D_n = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, ..., sr^{n-1}\}$ 恰好有 $2n$ 个元素. 设正整数 $n \geq 3$, 现在我们来看 D_n 与对称群 S_n 的关系.

Proposition 2. 设 n 是正整数且 $\sigma = (123 \cdots n)$,

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & i & \cdots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & n+2-i & \cdots & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_n,$$

那么 $\sigma\tau = \tau\sigma^{-1}, \tau^2 = (1), \sigma^n = (1)$. 记 $D = \langle \sigma, \tau \rangle$ 是 $\{\sigma, \tau\}$ 在 S_n 中生成的子群, 那么 $D_n \cong D$. 特别地, 当 $n = 3$ 时, $D_3 \cong S_3$.

Proof. 每个 D_n 中元素都可以唯一地表示为 $s^i r^j, 0 \leq s \leq 1, 0 \leq j \leq n-1$ 的形式, 命

$$\psi : D_n \to D, s^i r^j \mapsto \tau^i \sigma^j,$$

易验证这是满群同态. 如果对 $0 \leq i, k \leq 1, 0, l, j \leq n-1$ 有 $\psi(s^i r^j) = \psi(s^k r^l)$, 那么 $\tau^i \sigma^j = \tau^k \sigma^l$, 于是 $\tau^{i-k} = \sigma^{l-j}$. 因为 $\tau = \tau^{-1} \neq \sigma^m, \forall 0 \leq m \leq n-1$, 所以必有 $i - k = 0$, 从而由 $1 - n \leq l - j \leq n - 1$ 可得 $l - j = 0$, 这就得到了 ψ 是单射. 我们得到群同构 $D_n \cong D$. 当 $n = 3$ 时, $|D| = |D_3| = 6 = |S_3|$, 这迫使 $D = S_3$, 因此 $D_3 \cong S_3$. $\square$