


Deligne 张量积

戚天成 

复旦大学 数学科学学院

2026 年 5 月 15 日

这份笔记主要用于记录本质小的局部有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴 Deligne 张量积的存在性和一些基本性质, 证明方法遵循曹宇航的处理 [Cao26]. 由于水平有限, 难以避免笔记中存在不足与错误, 欢迎提出宝贵建议.

目录

1 基本性质	1
1.1 约定与记号	1
1.2 Deligne 张量积的定义	2
1.3 Deligne 张量积的存在性	2
1.4 双正合函子诱导正合函子	8

1 基本性质

1.1 约定与记号

以下固定域 \mathbb{k} . 所有的线性空间, 代数和线性 Abel 范畴均默认定义在基域 \mathbb{k} 上. 将 $\otimes_{\mathbb{k}}$ 简写为 \otimes . 代数 A 上左模 X, Y 之间的左 A -模同态全体构成的集合记作 $\text{Hom}_A(X, Y)$, 左 A -模范畴和有限维左 A -模范畴分别被写作 $A\text{-Mod}$ 和 $A\text{-mod}$. 余代数 C 上右余模 V, W 间的右 C -余模同态全体构成的集合记作 $\text{Hom}^C(V, W)$. 余代数 C 上的有限维右 C -余模范畴被记作 $\text{comod-}C$. 之后会自由地使用 Sweedler 记号.

如无特别说明, 默认考虑的范畴如无特别说明都默认是本质小范畴. \mathbb{k} -线性 Abel 范畴间谈论的函子默认是 \mathbb{k} -线性函子. 有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴都等价于某个有限维 \mathbb{k} -代数的有限维模范畴. 根据 Freyd-Mitchell 嵌入定理 [Fre64, Mit64], 对域 \mathbb{k} 上任何 (本质小的) \mathbb{k} -线性 Abel 范畴 \mathcal{A} , 总存在 \mathbb{k} -代数 B 和正合忠实满的 \mathbb{k} -线性函子 $\mathcal{A} \rightarrow B\text{-Mod}$ (也见 [EGNO15, Remark 1.3.9]). Takeuchi 在 [Tak77, Theorem 5.1] 得到域 \mathbb{k} 上任何 (本质小的) 局部有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴都等价于某个 \mathbb{k} 上余代数 C 的有限维右余模范畴 $\text{comod-}C$.

如果 \mathcal{A}, \mathcal{B} 都是 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴, 记 $\text{Rex}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是 \mathcal{A} 到 \mathcal{B} 所有 \mathbb{k} -线性右正合函子构成的范畴 (态射为函子间的自然变换). 如果 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 都是 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴, 将 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ 到 \mathcal{C} 的所有 \mathbb{k} -线性双右正合函子 (在每

个变量上右正合) 构成的范畴记作 $\text{BiRex}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{C})$. 易见若有 \mathbb{k} -线性等价的 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴 $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}'$, 那么对 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴 \mathcal{C} 有等价 $\text{BiRex}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{C}) \cong \text{BiRex}(\mathcal{A}' \times \mathcal{B}', \mathcal{C})$.

1.2 Deligne 张量积的定义

Definition 1.1 ([Del90, EGNO15]). 设 \mathcal{A}, \mathcal{B} 是 (本质小的) \mathbb{k} -线性 Abel 范畴. 称 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴 $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ 和双右正合函子 $\boxtimes : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ (即 $\boxtimes \in \text{ob BiRex}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B})$) 构成的二元组 $(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}, \boxtimes)$ 为 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 的 **Deligne 张量积**, 如果对任何 (本质小的) \mathbb{k} -线性 Abel 范畴 \mathcal{C} , 函子

$$\boxtimes^* : \text{Rex}(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}, \mathcal{C}) \rightarrow \text{BiRex}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{C}), T \mapsto T \boxtimes$$

是范畴等价. 特别地, $(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}, \boxtimes)$ 一旦存在, 便在 \mathbb{k} -线性等价下唯一. 常将 $(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}, \boxtimes)$ 简写为 $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$.

Remark 1.2. 一般 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴的 Deligne 张量积可能不存在 [LF13, §4.1]. 我们将在 [定理1.3] 看到局部有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴的 Deligne 张量积总存在 (并且也是局部有限的).

设 \mathcal{A}, \mathcal{B} 是 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴. 因为 Deligne 张量积的定义中要求 \boxtimes^* 是等价, 所以若 \mathcal{C} 是 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴且 $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ 是双右正合函子, 那么存在自然同构下唯一的右正合函子 $\tilde{F} : \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ 使得 $F \cong \tilde{F} \boxtimes$. 即有右正合函子 $\tilde{F} : \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ 使得下面的函子图在相差某个自然同构意义下交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{B} & \xrightarrow{\boxtimes} & \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \\ & \searrow F & \swarrow \tilde{F} \\ & & \mathcal{C} \end{array}$$

Deligne 张量积定义中 \boxtimes^* 是忠实函子说明: 如果右正合函子 $F, G : \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ 之间有自然变换 $\eta, \zeta : F \rightarrow G$ 满足 $\eta_{X \boxtimes Y} = \zeta_{X \boxtimes Y}$ 对所有 \mathcal{A} 中对象 X 和 \mathcal{B} 中对象 Y 成立, 那么 $\eta = \zeta$.

Deligne 张量积定义中 \boxtimes^* 是满函子说明: 如果右正合函子 $F, G : \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ 满足有 $F \boxtimes$ 到 $G \boxtimes$ 的自然变换 η , 那么可唯一地诱导自然变换 $\tilde{\eta} : F \rightarrow G$ 使得 $\tilde{\eta}_{X \boxtimes Y} = \eta_{X \boxtimes Y}$ 对所有 \mathcal{A} 中对象 X 和 \mathcal{B} 中对象 Y 成立.

设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}$ 满足 Deligne 张量积 $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}, \tilde{\mathcal{A}} \boxtimes \tilde{\mathcal{B}}$ 存在. 那么对任何右正合函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ 和右正合函子 $G : \mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$, 我们有双右正合函子 $\boxtimes(F, G) : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}} \boxtimes \tilde{\mathcal{B}}, (X, Y) \mapsto F(X) \boxtimes G(Y)$. 由 Deligne 张量积的定义, 存在在自然同构意义下唯一的右正合函子 $F \boxtimes G : \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}} \boxtimes \tilde{\mathcal{B}}$ 使得 $(F \boxtimes G) \boxtimes \cong \boxtimes(F, G)$.

1.3 Deligne 张量积的存在性

从 Deligne 张量积的定义出发不难看到两个 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴的 Deligne 张量积一旦存在, 便在 \mathbb{k} -线性等价下唯一. 下面我们处理局部有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴的 Deligne 张量积的存在性, 证明方法来自 [Cao26].

Theorem 1.3 ([Del90, Cao26, LF13]). 设 \mathbb{k} 是域, \mathcal{A}, \mathcal{B} 是 \mathbb{k} 上局部有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴. 那么 \mathcal{A}, \mathcal{B} 的 Deligne 张量积 $(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}, \boxtimes)$ 存在, 并且 $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ 是 (本质小的) 局部有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴. 这时, 如果 X_1, X_2 是范畴 \mathcal{A} 中对象, Y_1, Y_2 是范畴 \mathcal{B} 中的对象, 那么典范线性映射

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_1, X_2) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{B}}(Y_1, Y_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}}(X_1 \boxtimes Y_1, X_2 \boxtimes Y_2), f \otimes g \mapsto f \boxtimes g \quad (1.1)$$

是线性同构. 若进一步要求 \mathcal{A}, \mathcal{B} 都是有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴, 那么 $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ 也是有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴.

在正式给出证明前, 先简要概述 [定理1.3] 的证明思想, 证明分为两步:

首先我们将证明当 \mathcal{A}, \mathcal{B} 都是有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴时, \mathcal{A}, \mathcal{B} 的 Deligne 张量积 $(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}, \boxtimes)$ 存在. 这时 \mathcal{A}, \mathcal{B} 都 \mathbb{k} -线性等价于某有限维 \mathbb{k} -代数的有限维模范畴. 因此可不妨设 $\mathcal{A} = A\text{-mod}, \mathcal{B} = B\text{-mod}$, 其中 A, B 都是有限维代数. 我们会通过说明 $A \otimes B\text{-mod}$ 带上张量积函子 $\otimes : (A\text{-mod}) \times (B\text{-mod}) \rightarrow (A \otimes B)\text{-mod}$ 构成 $(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}, \boxtimes)$ 来得到 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴情形下 Deligne 张量积的存在性. 特别地, 如果 C, D 都是域 \mathbb{k} 上的有限维余代数. 记 $T_C : \text{comod-}C \rightarrow C^*\text{-mod}$ 是典范 \mathbb{k} -线性等价 (每个右 C -余模 V 对应到对偶余代数 C^* 上的左模 $T_C(V) = V$, 左 C^* -模结构来自 $f \cdot v = \sum_{(v)} f(v_{(1)})v_{(0)}$, 其中 $f \in C^*$ 且 $v \in V$). 则有函子交换图:

$$\begin{array}{ccc} (\text{comod-}C) \times (\text{comod-}D) & \xrightarrow{(T_C, T_D)} & (C^*\text{-mod}) \times (D^*\text{-mod}) \\ \otimes \downarrow & & \downarrow \otimes \\ \text{comod-}(C \otimes D) & \xrightarrow{T_{C \otimes D}} & (C^* \otimes D^*)\text{-mod} \end{array} \quad (1.2)$$

这里将典范代数同构 $(C \otimes D)^* \cong C^* \otimes D^*$ 视作等同. 于是我们看到: 一旦证明 $(A \otimes B\text{-mod}, \otimes)$ 是有限维代数 A, B 上有限维模范畴的 Deligne 张量积, (1.2) 蕴含任何有限维余代数 C, D 的有限维右余模范畴的 Deligne 张量积由 $(\text{comod-}(C \otimes D), \otimes)$ 给出, 其中 $\otimes : (\text{comod-}C) \times (\text{comod-}D) \rightarrow \text{comod-}(C \otimes D)$ 是张量函子.

随后我们会处理 \mathcal{A}, \mathcal{B} 是任意两个 (本质小的) 局部有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴时, $(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}, \boxtimes)$ 的存在性证明. 根据 [Tak77, Theorem 5.1], \mathcal{A}, \mathcal{B} 作为本质小的局部有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴, 都 \mathbb{k} -线性等价于某余代数上有限维右余模范畴. 设有 \mathbb{k} 上的余代数 C, D 使得有 \mathbb{k} -线性等价 $\mathcal{A} \cong \text{comod-}C$ 以及 $\mathcal{B} \cong \text{comod-}D$. 因此要验证 $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ 的存在性, 可不妨设 $\mathcal{A} = \text{comod-}C$ 以及 $\mathcal{B} = \text{comod-}D$. 根据余代数基本定理, 任何有限维右 C -余模 (V, δ_V) 满足存在 C 的有限维子余代数 $C(V)$ 使得 $\delta_V : V \rightarrow V \otimes C(V)$. 反之, 任何 C 的有限维子余代数 \tilde{C} 上的右余模可自然视作 C 上右余模. 因此如果记 $I = \{C \text{ 的有限维子余代数}\}$ 并对 $\alpha \in I$ 记 α 为 C_α , 那么

$$\text{ob}(\text{comod-}C) = \bigcup_{\alpha \in I} \text{ob}(\text{comod-}C_\alpha). \quad (1.3)$$

将 I 通过子余代数的包含关系赋予偏序: $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow C_\alpha \subseteq C_\beta$. 由余代数基本定理可知对任何 $\alpha, \beta \in I$, 总有 $\gamma \in I$ 使得 $C_\alpha + C_\beta \subseteq C_\gamma$. 因为子余代数之交还是子余代数, 所以 $C_\alpha \cap C_\beta \in I$. 任取有限维右 C -余模 V, W , 那么存在 C 的有限维子余代数 C_α 和 C_β 使得 V 是右 C_α -余模, W 是右 C_β -余模. 任取包含 C 的 C_α, C_β 的有限维子余代数 C_γ , 那么 V, W 都可视作右 C_γ -余模. 对任何右 C -余模同态 $f : V \rightarrow W$, 我们有交换图:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{f} & W & & \\ \delta_V \downarrow & \delta_V | & & \delta_W | & \downarrow \delta_W \\ & V \otimes C_\gamma & \xrightarrow{f \otimes \text{id}} & W \otimes C_\gamma & \\ & \delta_V \swarrow & & \delta_W \searrow & \\ V \otimes C & \xrightarrow{f \otimes \text{id}} & W \otimes C & & \end{array}$$

因此我们得到 \mathbb{k} -线性同构 $\text{Hom}^C(V, W) \rightarrow \text{Hom}^{C_\gamma}(V, W), f \mapsto f$. 结合 (1.3), 范畴 $\text{comod-}C$ 的所有信息都被承载于有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴族 $\{\text{comod-}C_\alpha\}_{\alpha \in I}$. 这使得我们能够借助有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴 Deligne 张量积的存在性来导出 $\text{comod-}C$ 和 $\text{comod-}D$ 的 Deligne 张量积的存在性 (与有限情形一样, 这时 Deligne 张量积就是 $(\text{comod-}(C \otimes D), \otimes)$, 其中 $\otimes : (\text{comod-}C) \times (\text{comod-}D) \rightarrow \text{comod-}(C \otimes D)$ 是张量函子).

Proof of Theorem 1.3. 先处理 \mathcal{A}, \mathcal{B} 都是有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴时, $(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}, \boxtimes)$ 的存在性. 根据前面的讨论, 这时可不妨设 $\mathcal{A} = A\text{-mod}, \mathcal{B} = B\text{-mod}$, 其中 A, B 都是有限维代数. 下证 $A \otimes B\text{-mod}$ 带上张量积函子 $\otimes : (A\text{-mod}) \times (B\text{-mod}) \rightarrow (A \otimes B)\text{-mod}$ 构成 $(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}, \boxtimes)$ 是 Deligne 张量积. 任取本质小的局部有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴 \mathcal{C} . 根据 Freyd-Mitchell 嵌入定理, 存在域 \mathbb{k} 上代数 C (未必是有限维代数) 和忠实满正合 \mathbb{k} -线性函子 $\iota : \mathcal{C} \rightarrow C\text{-Mod}$. 我们断言对任何双右正合函子 $F : (A\text{-mod}) \times (B\text{-mod}) \rightarrow \mathcal{C}$, 存在右正合函子 $\tilde{F} : (A \otimes B)\text{-mod} \rightarrow C\text{-Mod}$ 使得下面的函子图在相差某自然同构意义下交换:

$$\begin{array}{ccc} (A\text{-mod}) \times (B\text{-mod}) & \xrightarrow{\otimes} & (A \otimes B)\text{-mod} \\ F \downarrow & & \downarrow \tilde{F} \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\iota} & C\text{-Mod} \end{array} \quad (1.4)$$

一旦证明该断言, 便能够直接得到 $\otimes^* : \text{Rex}((A \otimes B)\text{-mod}, \mathcal{C}) \rightarrow \text{BiRex}((A\text{-mod}) \times (B\text{-mod}), \mathcal{C})$ 是本质满函子: 设有自然同构 $\varphi : \iota F \rightarrow \tilde{F} \otimes$. 对任何有限维左 $(A \otimes B)$ -模 M , 取定 M 作为 $(A \otimes B)$ -模的一个有限表现:

$$(A \otimes B)^m \longrightarrow (A \otimes B)^n \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

对上述正合列作用函子 \tilde{F} 得到交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{F}((A \otimes B)^m) \cong \tilde{F}(A \otimes B)^m & \longrightarrow & \tilde{F}((A \otimes B)^n) \cong \tilde{F}(A \otimes B)^n & \longrightarrow & \tilde{F}(M) & \longrightarrow & 0 \\ \varphi_{(A, B)}^m \uparrow & & \downarrow \varphi_{(A, B)}^n & & & & \\ \iota F(A, B)^m & \longrightarrow & \iota F(A, B)^n & & & & \end{array}$$

这说明 $\text{Coker}(\iota F(A, B)^m \rightarrow \iota F(A, B)^n) \cong \tilde{F}(M)$. 考虑 $C\text{-Mod}$ 的全子范畴:

$$\iota(\mathcal{C}) := \{N \in \text{ob } C\text{-Mod} \mid \text{存在 } C \text{ 中对象 } Y \text{ 使得 } N \cong \iota(Y)\}.$$

那么前面的讨论说明 $\tilde{F} : (A \otimes B)\text{-mod} \rightarrow C\text{-Mod}$ 可视作函子 $\tilde{F} : (A \otimes B)\text{-mod} \rightarrow \iota(\mathcal{C})$. 于是对自然同构 $\iota F \cong \tilde{F} \otimes$ 两边复合上 $\iota : \mathcal{C} \rightarrow \iota(\mathcal{C})$ 的拟逆函子 (记作 ι^{-1}) 得到自然同构 $F \cong (\iota^{-1} \tilde{F}) \otimes$, 其中 $\iota^{-1} \tilde{F} : (A \otimes B)\text{-mod} \rightarrow \mathcal{C}$ 是右正合函子. 故 $\otimes^* : \text{Rex}((A \otimes B)\text{-mod}, \mathcal{C}) \rightarrow \text{BiRex}((A\text{-mod}) \times (B\text{-mod}), \mathcal{C})$ 本质满.

现在证明前面的断言. 为此只需说明对任何双右正合函子 $\Gamma : (A\text{-mod}) \times (B\text{-mod}) \rightarrow C\text{-Mod}$, 都存在右正合函子 $\check{\Gamma} : (A \otimes B)\text{-mod} \rightarrow C\text{-Mod}$ 满足有自然同构 $\Gamma \cong \check{\Gamma} \otimes$. 注意到 $\Gamma(A, B)$ 有典范的 C - $(A \otimes B)$ 双模结构: 任何 $a \in A$ 对应的 A 上右乘变换记作 $r_a : A \rightarrow A$. 那么 $r_a : A \rightarrow A$ 是左 A -模同态. 任何 $b \in B$ 的右乘变换给出左 B -模同态 $r_b : B \rightarrow B$. 任何二元组 $(a, b) \in A \times B$ 给出左 C -模同态 $\Gamma(r_a, r_b) : \Gamma(A, B) \rightarrow \Gamma(A, B)$. 于是 Γ 的双线性性诱导 \mathbb{k} -线性映射 $A \otimes B \rightarrow \text{End}_C \Gamma(A, B), a \otimes b \mapsto \Gamma(r_a, r_b)$. 易见这诱导 $\Gamma(A, B)$ 上的 C - $(A \otimes B)$ 双模结构. 下面验证 $\check{\Gamma} := \Gamma(A, B) \otimes_{A \otimes B} -$ 是所需函子. 任取有限维左 A -模 X 和有限维左 B -模 Y 的有限表现 $A^p \xrightarrow{f} A^q \xrightarrow{f'} X \rightarrow 0$ 以及 $B^s \xrightarrow{g} B^t \xrightarrow{g'} Y \rightarrow 0$. 那么由 Γ 的双右正合性得到正合列

$$\Gamma(A^q, B^s) \xrightarrow{\Gamma(1, g)} \Gamma(A^q, B^t) \xrightarrow{\Gamma(1, g')} \Gamma(A^q, Y) \longrightarrow 0, \quad (1.5)$$

$$\Gamma(A^p, Y) \xrightarrow{\Gamma(f, 1)} \Gamma(A^q, Y) \xrightarrow{\Gamma(f', 1)} \Gamma(X, Y) \longrightarrow 0. \quad (1.6)$$

于是 $\Gamma(A^p, B^t) \oplus \Gamma(A^q, B^s) \xrightarrow{(\Gamma(f, 1), \Gamma(1, g))} \Gamma(A^q, B^t)$ 的余核对象

$$\frac{\Gamma(A^q, B^t)}{\text{Im} \Gamma(f, 1) + \text{Im} \Gamma(1, g)} \cong \Gamma(A^q, Y) / \text{Im}(f, 1) \cong \Gamma(X, Y). \quad (1.7)$$

这里第一个同构来自正合列(1.5), 第二个同构来自正合列(1.6). 同构序列(1.7)的合成由同态 $\Gamma(f', g')$ 诱导. 因此我们有左 C -模正合列 $\Gamma(A^p, B^t) \oplus \Gamma(A^q, B^s) \xrightarrow{(\Gamma(f, 1), \Gamma(1, g))} \Gamma(A^q, B^t) \xrightarrow{\Gamma(f', g')} \Gamma(X, Y) \rightarrow 0$. 另一方面, 前面取定的左 A -模 X 和左 B -模 Y 的有限表现视作复形, 取张量积可得正合列

$$(A^p \otimes B^t) \oplus (A^q \otimes B^s) \xrightarrow{f \otimes \text{id} + \text{id} \otimes g} A^q \otimes B^t \xrightarrow{f' \otimes g'} X \otimes Y \longrightarrow 0. \quad (1.8)$$

注意到(1.8)也是左 $A \otimes B$ -模正合列. 因此我们有左 C -模正合列

$$(\Gamma(A, B) \otimes_{A \otimes B} (A^p \otimes B^t)) \oplus (\Gamma(A, B) \otimes_{A \otimes B} (A^q \otimes B^s)) \rightarrow \Gamma(A, B) \otimes_{A \otimes B} (A^q \otimes B^t) \rightarrow \Gamma(A, B) \otimes_{A \otimes B} (X \otimes Y) \rightarrow 0.$$

因为我们有典范左 C -模同构 $\Gamma(A, B) \otimes_{A \otimes B} (A \otimes B) \cong \Gamma(A, B)$, 所以对任何正整数 m, n 都有典范同构

$$\varphi_{m,n} : \Gamma(A^m, B^n) \xrightarrow{\cong} \Gamma(A, B) \otimes_{A \otimes B} (A^m \otimes B^n)$$

使得对任何正整数对 $(m, n), (k, \ell)$ 以及左 A -模同态 $\eta : A^m \rightarrow A^k$ 和左 B -模同态 $\xi : B^n \rightarrow B^\ell$ 有交换图:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(A^m, B^n) & \xrightarrow{\varphi_{m,n}} & \Gamma(A, B) \otimes_{A \otimes B} (A^m \otimes B^n) \\ \Gamma(\eta, \xi) \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes_{A \otimes B} (\eta \otimes \xi) \\ \Gamma(A^k, B^\ell) & \xrightarrow{\varphi_{k,\ell}} & \Gamma(A, B) \otimes_{A \otimes B} (A^k \otimes B^\ell) \end{array} \quad (1.9)$$

现在对有限维左 A -模 X 和有限维左 B -模 Y , 由前面取定的有限表现, 得到交换图:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(A^p, B^t) \oplus \Gamma(A^q, B^s) & \longrightarrow & \Gamma(A^q, B^t) \\ (\varphi_{p,t}, \varphi_{q,s}) \downarrow & & \downarrow \varphi_{q,t} \\ (\Gamma(A, B) \otimes_{A \otimes B} (A^p \otimes B^t)) \oplus (\Gamma(A, B) \otimes_{A \otimes B} (A^q \otimes B^s)) & \longrightarrow & \Gamma(A, B) \otimes_{A \otimes B} (A^q \otimes B^t) \end{array} \quad (1.10)$$

下行同态的余核是 $\Gamma(A, B) \otimes_{A \otimes B} (X \otimes Y)$, 上行同态的余核是 $\Gamma(X, Y)$, 所以我们得到唯一的左 C -模同态 $\varphi_{X,Y} : \Gamma(X, Y) \rightarrow \Gamma(A, B) \otimes_{A \otimes B} (X \otimes Y)$ (根据五引理, 这是 C -模同构!) 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(A^q, B^t) & \xrightarrow{\Gamma(f', g')} & \Gamma(X, Y) \\ \downarrow \varphi_{q,t} & & \downarrow \varphi_{X,Y} \\ \Gamma(A, B) \otimes_{A \otimes B} (A^q \otimes B^t) & \xrightarrow{\text{id} \otimes (f' \otimes g')} & \Gamma(A, B) \otimes_{A \otimes B} (X \otimes Y) \end{array}$$

由图(1.9)的交换性易知 $\varphi_{X,Y} : \Gamma(X, Y) \xrightarrow{\cong} \Gamma(A, B) \otimes_{A \otimes B} (X \otimes Y) = \check{\Gamma}(X \otimes Y)$ 关于每个变量自然, 断言得证.

因此前面的讨论证明了 $\otimes^* : \text{Rex}((A \otimes B)\text{-mod}, \mathcal{C}) \rightarrow \text{BiRex}((A\text{-mod}) \times (B\text{-mod}), \mathcal{C})$ 是本质满函子. 再说明 \otimes^* 还是忠实满函子: 如果右正合函子 $F, G : (A \otimes B)\text{-mod} \rightarrow \mathcal{C}$ 之间的自然变换 $\eta, \xi : F \rightarrow G$ 满足 $\eta_{X \otimes Y} = \xi_{X \otimes Y}$ 对所有有限维左 A -模 X 和有限维左 B -模 Y 成立, 那么 $\eta_{(A \otimes B)^\ell} = \xi_{(A \otimes B)^\ell}$ 对任何正整数 ℓ 成立. 现在对任何有限维左 $A \otimes B$ -模的有限表现作用函子 F, G , 利用 $\eta_{(A \otimes B)^\ell} = \xi_{(A \otimes B)^\ell}$ 便知 \otimes^* 是忠实函子. 类似地, 通过考虑每个有限维 $A \otimes B$ -模取定有限表现容易验证 \otimes^* 是满函子. 于是我们证明了:

有限维代数的有限维模范畴 $A\text{-mod}$ 和 $B\text{-mod}$ 的 Deligne 张量积存在且由 $((A \otimes B)\text{-mod}, \otimes)$ 给出.

此外, 对任何有限维左 A -模 X_1, X_2 和有限维左 B -模 Y_1, Y_2 , 我们说明下述映射是同构:

$$\theta : \text{Hom}_A(X_1, X_2) \otimes \text{Hom}_B(Y_1, Y_2) \rightarrow \text{Hom}_{A \otimes B}(X_1 \otimes Y_1, X_2 \otimes Y_2), f \otimes g \mapsto f \otimes g. \quad (1.11)$$

映射 θ 是单射是明显的: 如果 $\theta(\sum_k f_k \otimes g_k) = 0$, 不妨设 $\{f_k\}$ 是 \mathbb{k} -线性无关的, 那么对任给 $y \in Y_1$ 和 $\chi_k \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(Y_2, \mathbb{k})$ 有 $\sum_k f_k \chi_k(g_k(y)) = 0$. 于是 $\chi_k(g_k(y)) = 0$ 迫使 $g_k(y) = 0, \forall y \in Y_2$. 因此 $\sum_k f_k \otimes g_k = 0$.

现在说明映射 θ 是同构. 先处理 $X_1 = A$ 的情形. 任取左 $(A \otimes B)$ -模同态 $\varphi : A \otimes Y_1 \rightarrow X_2 \otimes Y_2$. 设 X_2 的 \mathbb{k} -基 $\{x_{21}, \dots, x_{2t}\}$. 对任何 $y \in Y_1$, 对每个指标 $1 \leq k \leq t$ 有唯一的元素 $g_k(y) \in X_2$ 使得 $\varphi(1 \otimes y) = \sum_k x_{2k} \otimes g_k(y)$. 易见 $g_k : Y_1 \rightarrow X_2$ 是左 B -模同态. 于是命左 A -模同态 $f_k : A \rightarrow X_2, 1 \mapsto x_{2k}$ 得到 $\varphi(1 \otimes y) = (\sum_k f_k \otimes g_k)(1 \otimes y)$ 对任何 $y \in Y_1$ 成立. 因此 $\theta(\sum_k f_k \otimes g_k) = \varphi$. 于是不难看到当 X_1 是有限生成自由左 A -模时, θ 是同构. 现在记 θ 为 θ_{X_1} 来强调 X_1 的选取. 对 X_1 可取定有限表现

$$A^t \longrightarrow A^s \longrightarrow X_1 \longrightarrow 0.$$

分别对上述正合列作用 $\text{Hom}_A(-, X_2) \otimes \text{Hom}_B(Y_1, Y_2)$ 和 $\text{Hom}_{A \otimes B}(- \otimes Y_1, X_2 \otimes Y_2)$ 得到交换图:

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow \text{Hom}_A(X_1, X_2) \otimes \text{Hom}_B(Y_1, Y_2) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(A^s, X_2) \otimes \text{Hom}_B(Y_1, Y_2) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(A^t, X_2) \otimes \text{Hom}_B(Y_1, Y_2) \\ & & \downarrow \theta_{X_1} & & \downarrow \theta_{A^s} & & \downarrow \theta_{A^t} \\ 0 \longrightarrow \text{Hom}_{A \otimes B}(X_1 \otimes Y_1, X_2 \otimes Y_2) & \longrightarrow & \text{Hom}_{A \otimes B}(A^s \otimes Y_1, X_2 \otimes Y_2) & \longrightarrow & \text{Hom}_{A \otimes B}(A^t \otimes Y_1, X_2 \otimes Y_2) \end{array}$$

因此由五引理可知 θ_{X_1} 是同构. 我们证明了(1.11)定义的映射是 \mathbb{k} -线性同构. 这也说明典范线性映射(1.1)在 \mathcal{A}, \mathcal{B} 都是有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴时成立. 因此定理结论对有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴成立.

再进一步处理更一般情形 Deligne 张量积的存在性证明前指出: 函子交换图(1.2)说明如果 C, D 均是有限维余代数, 那么 $(\text{comod-}(C \otimes D), \otimes)$ 是有限维右余模范畴 $\text{comod-}C$ 和 $\text{comod-}D$ 的 Deligne 张量积.

下面我们证明 \mathcal{A}, \mathcal{B} 是任意本质小的局部有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴时, 它们的 Deligne 张量积存在. 根据之前的讨论, 由 Takeuchi 定理可不妨设 $\mathcal{A} = \text{comod-}C$ 以及 $\mathcal{B} = \text{comod-}D$, 其中 C, D 是域 \mathbb{k} 上的余代数.

作指标集 $\Lambda = I \times J$, 其中 I, J 分别是 C 和 D 的有限维子余代数集. 对每个 $\alpha \in \Lambda$ 记 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. 根据(1.3), 范畴 $(\text{comod-}C) \times (\text{comod-}D)$ 的对象类是每个 $\alpha \in \Lambda$ 对应的范畴 $(\text{comod-}C_{\alpha_1}) \times (\text{comod-}D_{\alpha_2})$ 的对象类关于指标 $\alpha \in \Lambda$ 的并. 此外, 对任何有限维右 C -余模 V_1, V_2 和有限维右 D -余模 W_1, W_2 , 总存在指标 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Lambda$ 使得 $\text{Hom}^{C_{\alpha_1}}(V_1, V_2) = \text{Hom}^C(V_1, V_2), \text{Hom}^{D_{\alpha_2}}(W_1, W_2) = \text{Hom}^D(W_1, W_2)$ 以及

$$\text{Hom}^{C_{\alpha_1} \otimes D_{\alpha_2}}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2) = \text{Hom}^{C \otimes D}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2).$$

根据典范线性映射(1.1)是同构对有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴的 Deligne 张量积成立可知

$$\text{Hom}^{C_{\alpha_1}}(V_1, V_2) \otimes \text{Hom}^{D_{\alpha_2}}(W_1, W_2) \rightarrow \text{Hom}^{C_{\alpha_1} \otimes D_{\alpha_2}}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2), f \otimes g \mapsto f \otimes g$$

是线性同构. 于是典范线性映射 $\text{Hom}^C(V_1, V_2) \otimes \text{Hom}^D(W_1, W_2) \rightarrow \text{Hom}^{C \otimes D}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$ 是线性同构. 所以如果我们能够证明 $(\text{comod-}(C \otimes D), \otimes)$ 是 $\text{comod-}C$ 和 $\text{comod-}D$ 的 Deligne 张量积, 那么(1.1)是线性同构对任意 (本质小的) 局部有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴的 Deligne 张量积都成立.

我们需要验证对任何 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴 \mathcal{C} , 函子 $\otimes^* : \text{Rex}(\text{comod-}(C \otimes D), \mathcal{C}) \rightarrow \text{BiRex}((\text{comod-}C) \times (\text{comod-}D), \mathcal{C}), F \mapsto F \otimes$ 是范畴等价. 先说明 \otimes^* 是忠实满函子. 注意到 $C \otimes D$ 的任何有限维子余代数都含于

某个形如 $C_{\beta_1} \otimes D_{\beta_2}$ 的有限维子余代数中, 所以任何有限维右 C -余模 V 和有限维右 D -余模 W 满足存在指标 $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \Lambda$ 使得 $V \otimes W$ 是 $C_{\beta_1} \otimes D_{\beta_2}$ 上的有限维右余模. 于是由任何右正合函子 $F : \text{comod}-(C \otimes D) \rightarrow \mathcal{C}$ 可限制为右正合函子 $F_\beta : \text{comod}-(C_{\beta_1} \otimes D_{\beta_2}) \rightarrow \mathcal{C}$ 可知任意两个右正合函子 $F, G : \text{comod}-(C \otimes D) \rightarrow \mathcal{C}$ 之间的自然变换 $\eta, \xi : F \rightarrow G$ 如果满足 $\eta_{X \otimes Y} = \xi_{X \otimes Y}$ 对任何有限维右 C -余模 X 和有限维右 D -余模 Y 成立, 那么 $\eta_Z = \xi_Z$ 对任何 $\text{comod}-(C_{\beta_1} \otimes D_{\beta_2})$ 成立. 特别地, (1.3) 蕴含 $\eta = \xi$. 这说明 \otimes^* 是忠实函子. 固定右正合函子 $F, G : \text{comod}-(C \otimes D) \rightarrow \mathcal{C}$. 如果对任何右 C -余模 V 和右 D -余模 W , 对应态射 $\eta_{V \otimes W} : F(V \otimes W) \rightarrow G(V \otimes W)$ 满足 $\eta_{V, W}$ 关于变量 V, W 均自然, 那么对每个指标 $\beta \in \Lambda$, 存在唯一的自然变换 $\widetilde{\eta}_\beta : F_\beta \rightarrow G_\beta$ (这里 F_β 和 G_β 表示函子在 $\text{comod}-(C_{\beta_1} \otimes D_{\beta_2})$ 上的限制) 使得 $\widetilde{\eta}_\beta|_{X \otimes Y} = \eta_{X \otimes Y}$ 对所有有限维右 C_{β_1} -余模 X 和有限维右 D_{β_2} -余模成立. 而任意指标 $\alpha, \beta \in \Lambda$ 满足存在 $\gamma \in \Lambda$ 使得 $C_{\alpha_1} \otimes D_{\alpha_2}, C_{\beta_1} \otimes D_{\beta_2} \subseteq C_{\gamma_1} \otimes D_{\gamma_2}$, 所以 $\{\widetilde{\eta}_\beta\}_{\beta \in \Lambda}$ 可合理地定义自然变换 $\widetilde{\eta} : F \rightarrow G$ 使得 $\widetilde{\eta}$ 在每个 $\text{comod}-(C_{\beta_1} \otimes D_{\beta_2})$ 上的限制为 $\widetilde{\eta}_\beta$. 特别地, $\widetilde{\eta}_{X \otimes Y} = \eta_{X \otimes Y}$ 对任何有限维右 C -余模 X 和有限维右 D -余模 Y 成立. 所以 \otimes^* 是忠实满函子.

最后需要验证 \otimes^* 是本质满函子. 任取双右正合函子 $\Gamma : (\text{comod} C) \times (\text{comod} D) \rightarrow \mathcal{C}$. 对每个指标 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Lambda$, 记 Γ_α 是 Γ 在 $(\text{comod} C_{\alpha_1}) \times (\text{comod} D_{\alpha_2})$ 上的限制函子, 那么 Γ_α 也是双右正合函子. 那么由 $(\text{comod}-(C_{\alpha_1} \otimes D_{\alpha_2}), \otimes)$ 是 $\text{comod} C_{\alpha_1}$ 和 $\text{comod} D_{\alpha_2}$ 的 Deligne 张量积可知存在右正合函子 $\widetilde{\Gamma}_\alpha : \text{comod}-(C_{\alpha_1} \otimes D_{\alpha_2}) \rightarrow \mathcal{C}$ 和自然同构 $\varphi_\alpha : \widetilde{\Gamma}_\alpha \otimes \rightarrow \Gamma_\alpha$. 对任何指标 $\alpha \leq \beta \in \Lambda$ (即 $\alpha_1 \leq \beta_1$ 且 $\alpha_2 \leq \beta_2$), Γ_β 同样诱导右正合函子 $\widetilde{\Gamma}_\beta$ 和自然同构 $\varphi_\beta : \widetilde{\Gamma}_\beta \otimes \rightarrow \Gamma_\beta$. 于是由前面证明的 \otimes^* 是忠实满函子表明 $\widetilde{\Gamma}_\beta$ 在 $\text{comod}-(C_{\alpha_1} \otimes D_{\alpha_2})$ 上的限制函子 $\widetilde{\Gamma}_\beta|_\alpha$ 作为右正合函子, 和 $\widetilde{\Gamma}_\alpha$ 之间存在唯一的自然同构 $\theta_{\alpha\beta} : \widetilde{\Gamma}_\beta|_\alpha \xrightarrow{\cong} \widetilde{\Gamma}_\alpha$ 使得 $\varphi_\alpha^{-1} \varphi_\beta = \theta_{\alpha\beta} \otimes$. 即对任何有限维右 C_{α_1} -余模 X 和有限维右 D_{α_2} -余模 Y 有交换图

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\Gamma}_\beta(X \otimes Y) & \xrightarrow{(\theta_{\alpha\beta})_{X \otimes Y}} & \widetilde{\Gamma}_\alpha(X \otimes Y) \\ & \searrow (\varphi_\beta)_{X, Y} & \nearrow (\varphi_\alpha^{-1})_{X, Y} \\ & \Gamma(X, Y) & \end{array} \quad (1.12)$$

特别地, 如果还有指标 $\gamma \in \Lambda$ 满足 $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, 我们便得到交换图

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\Gamma}_\gamma(X \otimes Y) & \xrightarrow{(\theta_{\beta\gamma})_{X \otimes Y}} & \widetilde{\Gamma}_\beta(X \otimes Y) & \xrightarrow{(\theta_{\alpha\beta})_{X \otimes Y}} & \widetilde{\Gamma}_\alpha(X \otimes Y) \\ & \searrow (\varphi_\gamma)_{X, Y} & \nearrow (\varphi_\beta^{-1})_{X, Y} & \searrow (\varphi_\beta)_{X, Y} & \nearrow (\varphi_\alpha^{-1})_{X, Y} \\ & \Gamma(X, Y) & \xrightarrow{\text{id}} & \Gamma(X, Y) & \end{array}$$

上述交换图和 \otimes^* 是忠实函子得到对任何指标 $\alpha \leq \beta \leq \gamma \in \Lambda$ 有下面的等式成立:

$$\theta_{\alpha\gamma} = \theta_{\alpha\beta} \theta_{\beta\gamma}. \quad (1.13)$$

下面我们来定义右正合函子 $\widetilde{\Gamma} : \text{comod}-(C \otimes D) \rightarrow \mathcal{C}$ 使得有自然同构 $\widetilde{\Gamma} \otimes \cong \Gamma$ 来完成 \otimes^* 是范畴等价的证明. 对任何有限维右 $(C \otimes D)$ -余模 Z , 总有指标 $\alpha \in \Lambda$ 使得 Z 是右 $C_{\alpha_1} \otimes D_{\alpha_2}$ -余模. 我们对每个 Z 取定满足这一要求的一个指标 α , 再定义 $\widetilde{\Gamma}(Z) = \widetilde{\Gamma}_\alpha(Z)$, 得到映射 $\Gamma : \text{ob comod}-(C \otimes D) \rightarrow \text{ob } \mathcal{C}$. 对任何两个有限维右 $(C \otimes D)$ -余模 X, Y , 设指标 $\beta, \gamma \in \Lambda$ 满足 $\widetilde{\Gamma}(X) = \widetilde{\Gamma}_\beta(X)$ 以及 $\widetilde{\Gamma}(Y) = \widetilde{\Gamma}_\gamma(Y)$. 利用(1.13)易知对任何右 $C \otimes D$ -余模同态 $f : X \rightarrow Y$, 下面态射序列的合成不依赖于 Λ 中满足 $\delta \geq \beta, \gamma$ 的指标 δ 的选取:

$$\widetilde{\Gamma}(X) = \widetilde{\Gamma}_\beta(X) \xrightarrow{\theta_{\beta\delta}^{-1}} \widetilde{\Gamma}_\delta(X) \xrightarrow{\widetilde{\Gamma}_\delta(f)} \widetilde{\Gamma}_\delta(Y) \xrightarrow{\theta_{\gamma\delta}} \widetilde{\Gamma}_\gamma(Y) = \widetilde{\Gamma}(Y) \quad (1.14)$$

将态射序列的合成(1.14)记作 $\tilde{\Gamma}(f) : \tilde{\Gamma}(X) \rightarrow \tilde{\Gamma}(Y)$. 那么得到定义合理的 \mathbb{k} -线性函子 $\tilde{\Gamma} : \text{comod-}(C \otimes D) \rightarrow \mathcal{C}$. 对任何有限维右 $C \otimes D$ -余模的短正合列 $0 \rightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \rightarrow 0$. 设指标 $\alpha, \alpha', \alpha'' \in \Lambda$ 满足 $\tilde{\Gamma}(X') = \tilde{\Gamma}_{\alpha'}(X')$, $\tilde{\Gamma}(X) = \tilde{\Gamma}_{\alpha}(X)$, $\tilde{\Gamma}(X'') = \tilde{\Gamma}_{\alpha''}(X'')$. 那么由函子 $\tilde{\Gamma}$ 的定义得到对任何指标 $\delta \geq \alpha, \alpha', \alpha''$ 下图交换:

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{\Gamma}(X') & \xrightarrow{\tilde{\Gamma}(f)} & \tilde{\Gamma}(X) & \xrightarrow{\tilde{\Gamma}(g)} & \tilde{\Gamma}(X'') \\
\theta_{\alpha'\delta}^{-1} \downarrow & & \downarrow \theta_{\alpha\delta}^{-1} & & \downarrow \theta_{\alpha''\delta}^{-1} \\
\tilde{\Gamma}_{\delta}(X') & \xrightarrow{\tilde{\Gamma}_{\delta}(f)} & \tilde{\Gamma}_{\delta}(X) & \xrightarrow{\tilde{\Gamma}_{\delta}(g)} & \tilde{\Gamma}_{\delta}(X'') \longrightarrow 0
\end{array} \tag{1.15}$$

因为 $\tilde{\Gamma}_{\delta}$ 是右正合函子, 所以 $\tilde{\Gamma}$ 是右正合的 \mathbb{k} -线性函子. 最后再说明有自然同构 $\tilde{\Gamma} \otimes \cong \Gamma$ 完成证明. 任取有限维右 C -余模 X 和有限维右 D -余模 Y , 设 $\tilde{\Gamma}(X \otimes Y) = \tilde{\Gamma}_{\alpha}(X \otimes Y)$. 定义 $\zeta_{X,Y} = \varphi_{\alpha} : \tilde{\Gamma}(X \otimes Y) \rightarrow \Gamma(X, Y)$. 那么 $\zeta_{X,Y}$ 是同构. 如果还有有限维右 C -余模 X' 和有限维右 D -余模 Y' , 并设 $\tilde{\Gamma}(X \otimes Y) = \tilde{\Gamma}_{\beta}(X \otimes Y)$. 那么对任何指标 $\delta \geq \alpha, \beta$ 以及右 C -余模同态 $f : X \rightarrow X'$ 和右 D -余模同态 $g : Y \rightarrow Y'$ 有交换图:

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{\Gamma}(X \otimes Y) & \xrightarrow{\zeta_{X,Y}=(\varphi_{\alpha})_{X,Y}} & \Gamma(X, Y) \\
\downarrow \tilde{\Gamma}(f \otimes g) & \begin{array}{c} \searrow (\theta_{\alpha\delta}^{-1})_{X \otimes Y} \\ \downarrow \tilde{\Gamma}_{\delta}(f \otimes g) \\ \searrow (\theta_{\beta\delta})_{X' \otimes Y'} \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow (\varphi_{\delta})_{X,Y} \\ \downarrow \tilde{\Gamma}_{\delta}(f \otimes g) \\ \nearrow (\varphi_{\delta})_{X',Y'} \end{array} \\
\tilde{\Gamma}(X' \otimes Y') & \xrightarrow{\zeta_{X',Y'}=(\varphi_{\beta})_{X',Y'}} & \Gamma(X', Y')
\end{array}$$

这里上下表面三角形的交换性来自(1.12). 因此 $\zeta : \tilde{\Gamma} \otimes \xrightarrow{\cong} \Gamma$ 是自然同构. □

根据 [定理1.3] 的证明过程, 我们得到:

Corollary 1.4 ([EGNO15]). 设 A, B 是域 \mathbb{k} 上有限维代数, C, D 是域 \mathbb{k} 上余代数. 那么:

- (1) 二元组 $((A \otimes B)\text{-mod}, \otimes)$ 是有限维模范畴 $A\text{-mod}$ 和 $B\text{-mod}$ 的 Deligne 张量积.
- (2) 二元组 $(\text{comod-}(C \otimes D), \otimes)$ 是有限维余模范畴 $\text{comod-}C$ 和 $\text{comod-}D$ 的 Deligne 张量积.

Example 1.5. 设 \mathcal{A}, \mathcal{B} 是域 \mathbb{k} 上的局部有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴. 那么有交换分量次序的典范函子 (12) : $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{A}$, $(X, Y) \rightarrow (Y, X)$ 是双正合函子. 所以诱导 (自然同构下唯一) 右正合函子 (依然记作 (12)) $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \boxtimes \mathcal{A}$ 将每个形如 $X \boxtimes Y$ 的对象对应到 $Y \boxtimes X$, 态射也有明显的对应.

1.4 双正合函子诱导正合函子

设 \mathcal{A}, \mathcal{B} 是域 \mathbb{k} 上的 (本质小的) 局部有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴. 那么 [定理1.3] 说明 Deligne 张量积 $(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}, \boxtimes)$ 存在并且也是局部有限的 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴. 特别地, 对任何 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴 \mathcal{C} 和双右正合函子 $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ 有自然同构意义下唯一的右正合函子 $\tilde{F} : \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ 使得 $\tilde{F} \otimes \cong F$. 下面我们说明当基域是代数闭域且 F 是双正合函子时, 诱导的函子 $\tilde{F} : \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ 是正合函子.

Proposition 1.6 ([Cao26, Del90]). 设 \mathbb{k} 是代数闭域, \mathcal{A}, \mathcal{B} 是局部有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴. 如果 $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ 是双正合函子, 那么满足 $\tilde{F} \otimes \cong F$ 的右正合函子 $\tilde{F} : \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ 是正合函子.

Proof. 易见只需处理 \mathcal{A}, \mathcal{B} 都是有限 \mathbb{k} -线性 Abel 范畴的情形: 一旦证明有限情形诱导的函子 \tilde{F} 是正合的, 利用 [定理1.3] 证明过程中的交换图(1.15)可将局部有限情形约化到有限情形来得到诱导的右正合函子 \tilde{F} 是正合的. 所以我们可不妨设 $\mathcal{A} = A\text{-mod}, \mathcal{B} = B\text{-mod}$, 其中 A, B 都是有限维代数. 并且由 [定理1.3] 证明过程中的图(1.4)可知可不妨设 $\mathcal{C} = C\text{-Mod}$, 这里 C 是某个 (未必有限维的) \mathbb{k} -代数.

设 F 是双正合函子, 这时诱导的右正合函子 $\tilde{F} : (A \otimes B)\text{-mod} \rightarrow C\text{-Mod}$ 自然同构于某个 $C\text{-}(A \otimes B)$ 双模 N 决定的张量函子 $N \otimes_{A \otimes B} -$. 因此我们只需要证明 N 是平坦右 $(A \otimes B)$ -模.

因为 F 是双正合函子, 所以由自然同构 $F(X, Y) \cong N \otimes_{A \otimes B} (X \otimes Y) \cong (N \otimes_A X) \otimes_B Y \cong (N \otimes_B Y) \otimes_A X$ (这里 X 是有限维左 A -模, Y 是有限维左 B -模, 这里自然同构指关于变量 X 和变量 Y 都自然) 可知 $N \otimes_B Y$ 作为右 A -模以及 $N \otimes_A X$ 作为右 B -模都平坦 (首先 $(N \otimes_A X) \otimes_B -$ 和 $(N \otimes_B Y) \otimes_A -$ 作为有限维模范畴上的函子正合, 再利用平坦性的基本判别法, 例如张量积保持代数的有限生成左理想的嵌入是单射便知). 利用前面的自然同构 $N \otimes_{A \otimes B} (X \otimes Y) \cong (N \otimes_A X) \otimes_B Y$ 可知对任何有限维左 A -模 M 和有限维左 B -模 U , 有群同构 $\text{Tor}_1^{A \otimes B}(N, M \otimes U) = H^1(N \otimes_{A \otimes B}^L (M \otimes U)) \cong H^1(N \otimes_{A \otimes B}^L (P^\bullet \otimes Q^\bullet)) \cong H^1((N \otimes_A P^\bullet) \otimes_B Q^\bullet) = H^1((N \otimes_A M) \otimes_B Q^\bullet) = H^1((N \otimes_A M) \otimes_B^L U) = \text{Tor}_B^1(N \otimes_A M, U) = 0$, 其中 $P^\bullet \rightarrow M \rightarrow 0$ 和 $Q^\bullet \rightarrow U \rightarrow 0$ 分别是 M 和 U 的有限生成投射分解. 特别地, 由于 $A \otimes B$ 上的不可约模都同构于某个不可约 A -模和不可约 B -模的张量积 (这里需要基域是代数闭域), 所以 $\text{Tor}_1^{A \otimes B}(N, S) = 0$ 对任何不可约左 $A \otimes B$ -模 S 成立. 由此立即得到 $\text{Tor}_1^{A \otimes B}(N, Y) = 0$ 对任何有限生成左 $A \otimes B$ -模 Y 成立. 因为 Tor 函子与正向极限可交换, 所以 $\text{Tor}_1^{A \otimes B}(N, Y) = 0$ 对所有左 $A \otimes B$ -模 Y 成立. 由此得到 N 是平坦右 $(A \otimes B)$ -模. \square

参考文献

- [Cao26] Yuhang Cao. Private communication. 2026.
- [Del90] P. Deligne. Catégories tannakiennes. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 111–195. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [EGNO15] Pavel Etingof, Shlomo Gelaki, Dmitri Nikshych, and Victor Ostrik. *Tensor categories*, volume 205 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [Fre64] Peter Freyd. *Abelian categories. An introduction to the theory of functors*. Harper’s Series in Modern Mathematics. Harper & Row, Publishers, New York, 1964.
- [LF13] Ignacio López Franco. Tensor products of finitely cocomplete and abelian categories. *J. Algebra*, 396:207–219, 2013.
- [Mit64] Barry Mitchell. The full imbedding theorem. *Amer. J. Math.*, 86:619–637, 1964.
- [Tak77] Mitsuhiro Takeuchi. Morita theorems for categories of comodules. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 24(3):629–644, 1977.