微分分次 Lie 代数

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 11 月 4 日

这份笔记的目的是记录微分分次 Lie 代数的概念与经典例子.

Definition 1 (分次 Lie 代数)**.** 设 $L = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} L^i$ 是含幺交换环 K 上分次 K-模, 若 L 上有 K-双线性映射

$$[-,-] : L \times L \to L$$

满足 $[L^i, L^j] \subseteq L^{i+j}, \forall i,j \in \mathbb{Z}$ 以及:
•(分次反对称性) 对任何齐次元 x,y 有 $[x,y] = (-1)^{|x||y|+1}[y,x]$;
•(分次 Jacobi 恒等式) 对任何齐次元 z,y,z 有 $(-1)^{|x||z|}[[x,y],z] + (-1)^{|y||x|}[[y,z],x] + (-1)^{|z||y|}[[z,x],y] = 0$,
则称 $(L,[-,-])$ 是 **$\mathbb{Z}$-分次 Lie 代数**. 如果分次 Lie 代数 $(L,[-,-])$ 进一步满足存在微分 $d_\bullet = \{d^i : L^i \to L^{i+1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 使得 $(L^\bullet, d^\bullet)$ 构成复形并且满足
•(分次 Leibniz 公式) 对任给齐次元 x,y 有 $d[x,y] = [dx,y] + (-1)^{|x|}[x,dy]$,
那么称 $(L,[-,-],d^\bullet)$ 是**微分分次 Lie 代数** (differential graded Lie algebra) 或简称为 **DGLA**.

Remark 1. 微分分次 Lie 代数中微分 $d^\bullet$ 所满足的分次 Leibniz 公式保证了分次 Lie 括号可诱导复形 $(L^\bullet, d^\bullet)$ 与自身张量积到 $(L^\bullet, d^\bullet)$ 的链映射.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \bigoplus_{i+j=n} L^i \otimes_K L^j \arrow[r] \arrow[d, "{[-,-]}"'] & \bigoplus_{i+j=n+1} L^i \otimes_K L^j \arrow[r] \arrow[d, "{[-,-]}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & L^{n+1} \arrow[r] & L^n \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

若 $(L = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} L^i, [-,-])$ 是 K 上分次 Lie 代数, $z \in L^1$ 是 1 次齐次元, 那么 $D_z = [z,-] : L \to L$ 是次数为 1 的 K-模同态, 可直接计算验证对任何 $x \in L^n, y \in L^m$ 有 $D_z[x,y] = [D_z(x),y] + (-1)^n[x,D_z(y)]$. 如果进一步 z 满足 $[z,z] = 0$, 那么 $D_z^2 = 0$. 即固定分次 Lie 代数 L 的一个次数为 1 且满足 $[z,z] = 0$ 的齐次元 z, 那么 $D_z = [z,-]$ 可诱导 L 上微分分次 Lie 代数结构 $(L,[-,-],D_z)$.

Definition 2. 设 $(L = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} L^i, [-,-])$ 是 K 上分次 Lie 代数, $z \in L^1$ 是 1 次齐次元且满足 $[z,z] = 0$. 设 $D_z = [z,-]$, 则称微分分次 Lie 代数 $(L,[-,-],D_z)$ 是 **pointed 微分分次 Lie 代数**, 也记作 $(L,[-,-],z)$.

Example 1. 含幺交换环 K 上任何 Lie 代数 L 都可以天然视作集中在 0 次部分的微分分次 Lie 代数.

Example 2 (Hochschild 上链复形)**.** 设 A 是含幺交换环 K 上代数, 对任何 A-A 双模 M, 若记

$$C^0(A,M)=M, C^1(A,M)=\mathrm{Hom}_K(A,M), C^n(A,M)$$

表示 A^n 到 M 的多重 K-线性映射全体. 对每个自然数 n, 记 $\delta^n: C^n(A,M)\to C^{n+1}(A,M)$ 为

$$\delta^n(f)(x_1,...,x_{n+1})=x_1f(x_2,...,x_{n+1})+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(x_1,...,x_ix_{i+1},...,x_n)+(-1)^{n+1}f(x_1,...,x_n)x_{n+1},$$

其中 $\delta^0: M\to C^1(A,M), u\mapsto \delta^0(u), \delta^0(u)(x)=xu-ux$, 那么便有下述 **Hochschild 上链复形**

$$0\longrightarrow C^0(A,M)\xrightarrow{\delta^0}C^1(A,M)\xrightarrow{\delta^1}C^2(A,M)\xrightarrow{\delta^2}\cdots\longrightarrow C^n(A,M)\xrightarrow{\delta^n}\cdots,$$

如无特别说明, 以下讨论中出现的记号 δ 均表示 Hochschild 上链复形的微分.

现取 $M=A$, 那么对任给 $f\in C^p(A,A)$ 以及 $g\in C^q(A,A)$, 定义

$$\cup: C^p(A,A)\times C^q(A,A)\to C^{p+q}(A,A), (f,g)\mapsto f\cup g$$

为 $(f\cup g)(a_1,...,a_{p+q})=f(a_1,...,a_p)g(a_{p+1},...,a_{p+q}), \forall a_1,...,a_{p+q}\in A$. 称 $f\cup g$ 为 f 与 g 的**杯积** (cup product). 若记

$$C^*(A,A)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}C^n(A,A),$$

那么可将 $\cup$ 天然地 K-线性扩充为 $C^*(A,A)$ 上二元运算, 仍记作 $\cup$. 根据杯积的定义我们立即看到 $(C^*(A,A),\cup)$ 是 $\mathbb{N}$-分次代数. 对任给 $f\in C^p(A,A), g\in C^q(A,A)$, 定义

$$[-,-]_G: C^p(A,A)\times C^q(A,A)\to C^{p+q-1}(A,A), (f,g)\mapsto [f,g]_G,$$

其中

$$\begin{aligned}
[f,g]_G: A^{p+q-1}&\to A\\
(a_1,...,a_{p+q-1})&\mapsto \sum_{i=1}^{p}(-1)^{(q-1)(i-1)}f(a_1,...,a_{i-1},g(a_i,...,a_{i+q-1}),a_{i+q},...,a_{p+q-1})\\
&-(-1)^{(p-1)(q-1)}\sum_{i=1}^{q}(-1)^{(p-1)(i-1)}g(a_1,...,a_{i-1},f(a_i,...,a_{i+p-1}),a_{i+q},...,a_{p+q-1})
\end{aligned}$$

称 $[f,g]_G$ 为 f 和 g 的 **Gerstenhaber 括号**. 一般也简记

$$f\bullet g: A^{p+q-1}\to A, (a_1,...,a_{p+q-1})\mapsto \sum_{i=1}^{p}(-1)^{(q-1)(i-1)}f(a_1,...,a_{i-1},g(a_i,...,a_{i+q-1}),a_{i+q},...,a_{p+q-1}),$$

以下称 $f\bullet g$ 为 f 与 g 的**圈积** (circle product), 进而 $[f,g]_G=f\bullet g-(-1)^{(p-1)(q-1)}g\bullet f$. 通过直接地计算可知 Hochschild 上链复形的 n 次微分 $\delta^n=-[-,\mu]_G$ 并且 $\mathbb{Z}$-分次模 $C^*(A,A)$ 的 1 次平移 $C^*(A,A)[1]$ 关于 Gerstenhaber 括号构成分次 Lie 代数. 对每个整数 n, 定义 $d^n=(-1)^n\delta^{n+1}$, 那么可直接验证 $(C^*(A,A),[-,-]_G,d^\bullet)$ 是微分分次 Lie 代数. 事实上, 乘法映射 $\mu: A\times A\to A$ 作为分次 Lie 代数 $(C^*(A,A)[1],[-,-]_G)$ 所诱导其上的 pointed 微分分次 Lie 代数结构即

$$D_\mu(f)=[\mu,f]_G=(-1)^{n+1}[f,\mu]=d^{n-1}(f), \forall f\in C^n(A,A),$$

注意这里 f 是 $C^*(A,A)$ 的 $n-1$ 次齐次元. 所以通过更改 Hochschild 上链复形中微分的符号所诱导的微分分次 Lie 代数就是由 $\mu\in C^2(A,A)$ 诱导 $(C^*(A,A)[1],[-,-]_G)$ 上的 pointed 微分分次 Lie 代数.

Example 3 (Poisson 上链复形)**.** 对 K-交换代数 A, 记 $\mathfrak{X}^p(A)$ 是 A 上 p-多重线性导子全体构成的 K-模, 对任何 $P\in\mathfrak{X}^p(A), Q\in\mathfrak{X}^q(A)$, 记 $P\circ Q:\wedge^{p+q-1}A\to A$ 为

$$(P\circ Q)(a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_{p+q-1})=\sum_{\sigma\in S_{q,p-1}}\mathrm{sgn}(\sigma)P(Q(a_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(q)})\wedge a_{\sigma(q+1)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(q+p-1)}),$$

置 $[P,Q]_{SN}=P\circ Q-(-1)^{(p-1)(q-1)}Q\circ P$, 那么可直接计算验证 $[P,Q]_{SN}\in\mathfrak{X}^{p+q-1}(A)$, 称之为 P 与 Q 的 **Schouten-Nijenhuis 括号**或 **Schouten 括号**. 如果 $P,Q\in\mathfrak{X}^2(A)$ 是交错双线性导子, 那么

$$\begin{aligned}[P,Q]_{SN}(a_1,a_2,a_3)=&P(Q(a_1,a_2),a_3)+P(Q(a_2,a_3),a_1)+P(Q(a_3,a_1),a_2)\\&+Q(P(a_1,a_2),a_3)+Q(P(a_2,a_3),a_1)+Q(P(a_3,a_1),a_2).\end{aligned}$$

所以当交换代数 A 上有 Poisson 结构 $\pi\in\mathfrak{X}^2(A)$ 时, 就有 $[\pi,\pi]_{SN}=0$(即 π 满足 Jacobi 恒等式). 进而知当 $2\in K^\times$ 时, $\pi\in\mathfrak{X}^2(A)$ 给出 A 上 Poisson 结构的充要条件是 $[\pi,\pi]_{SN}=0$. 前面指出对含幺交换环 K 上代数 A, 其系数在自身内的 Hochschild 上链复形 $C^\bullet(A,A)$ 的微分 δ 由 $-[-,\mu]_G$ 给出, 这里 $\mu\in C^2(A,A)$ 表示 A 上乘法运算, $[-,-]_G$ 表示 Gerstenhaber 括号), 我们也可以使用 Schouten 括号来表示 Poisson 上链复形的微分. 对 K 上 Poisson 代数 $(A,\{-,-\})$, 置 $\pi=\{-,-\}\in\mathfrak{X}^2(A)$, 其 Poisson 上链复形为

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{\delta^0}\mathfrak{X}^1(A)\xrightarrow{\delta^1}\cdots\longrightarrow\mathfrak{X}^r(A)\xrightarrow{\delta^r}\mathfrak{X}^{r+1}(A)\longrightarrow\cdots$$

其中 $\delta^r:\mathfrak{X}^r(A)\to\mathfrak{X}^{r+1}(A)$ 定义为 $F\mapsto\delta^r(F)$, 这里

$$\begin{aligned}\delta^r(F)(a_1\wedge\cdots\wedge a_r\wedge a_{r+1})=&\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^i\{F(a_1\wedge\cdots\widehat{a_i}\cdots\wedge a_{r+1}),a_i\}\\&+\sum_{1\le i<j\le r+1}(-1)^{i+j}F(\{a_i,a_j\}\wedge a_1\wedge\cdots\widehat{a_i}\cdots\widehat{a_j}\cdots\wedge a_{r+1})\end{aligned}$$

下面我们计算验证 $\delta=-[-,\pi]_{SN}$. 任给 $a_1,a_2,...,a_{r+1}\in A$ 以及 $F\in\mathfrak{X}^r(A)$, 有

$$\begin{aligned}(F\circ\pi)(a_1\wedge\cdots\wedge a_{r+1})&=\sum_{\sigma\in S_{2,r-1}}\mathrm{sgn}(\sigma)F(\{a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)}\}\wedge a_{\sigma(3)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(r+1)})\\&=\sum_{1\le i<j\le r+1}(-1)^{i+j-1}F(\{a_i,a_j\}\wedge a_1\wedge\cdots\widehat{a_i}\cdots\widehat{a_j}\cdots\wedge a_{p+1}).\end{aligned}$$

另一方面, 根据 Schouten 括号的定义可算得

$$(\pi\circ F)(a_1\wedge\cdots\wedge a_{r+1})=\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{r+1-i}\{F(a_1\wedge\cdots\widehat{a_i}\cdots\wedge a_{r+1}),a_i\}.$$

进而 $-[F,\pi]_{SN}=\sum_{1\le i<j\le r+1}(-1)^{i+j}F(\{a_i,a_j\}\wedge a_1\wedge\cdots\widehat{a_i}\cdots\widehat{a_j}\cdots\wedge a_{p+1})+\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^i\{F(a_1\wedge\cdots\widehat{a_i}\cdots\wedge a_{r+1}),a_i\}$. 对 K-代数的 Hochschild 上链复形

$$0\longrightarrow C^0(A,M)\xrightarrow{\delta^0}C^1(A,M)\xrightarrow{\delta^1}C^2(A,M)\xrightarrow{\delta^2}\cdots\longrightarrow C^n(A,M)\xrightarrow{\delta^n}\cdots,$$

作 1 次平移可得 $\mathbb{Z}$-分次模 $C^*(A,A)[1]$, 其上 Gerstenhaber 括号 $[-,-]_G$ 使得 $(C^*(A,A)[1],[-,-]_G)$ 构成分次 Lie 代数. 类似地, 对 K 上 Poisson 代数 $(A,\pi=\{-,-\})$, 其 Poisson 上链复形

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\delta^0} \mathfrak{X}^1(A) \xrightarrow{\delta^1} \cdots \longrightarrow \mathfrak{X}^r(A) \xrightarrow{\delta^r} \mathfrak{X}^{r+1}(A) \longrightarrow \cdots$$

上的 Schouten 括号 $[-,-]_{SN}$ 也可赋予 $\mathbb{Z}$-分次模 $\mathfrak{X}^*(A)$ 上分次 Lie 代数结构. 类似于 Hochschild 上链复形的情形, 对 K-Poisson 代数 $(A,\pi=\{-,-\})$ 的 Poisson 上链复形 $(\mathfrak{X}^\bullet,\delta^\bullet)$, Poisson 结构 $\pi\in\mathfrak{X}^2(A)$ 作为分次 Lie 代数 $(\mathfrak{X}^*(A)[1],[-,-]_{SN})$ 的 1 次齐次元同样给出其上 pointed 微分分次 Lie 代数结构：对每个交错 n-线性导子 $F\in\mathfrak{X}^n(A)$, $D_\pi(F)=[\pi,F]_{SN}=(-1)^{n+1}[F,\pi]_{SN}=(-1)^n\delta^n(F)$. 同样地, 若将 Poisson 上链复形中的微分 $\delta^\bullet$ 调整为 $d^{n-1}=(-1)^n\delta^n$ 便可赋予分次 Lie 代数 $(\mathfrak{X}^*(A)[1],[-,-]_{SN})$ 上微分分次 Lie 代数结构.