

Clifford 代数初步

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2026 年 7 月 29 日

这份笔记简要记录 Clifford 代数 (在 [Cli78] 中被引入) 的基本性质和初步的结构理论, 主要参考文献是 [Jac09]. Clifford 代数广泛地出现在数学与物理的各个分支. 这里我关心 Clifford 代数的原因是其结构理论能够在某些代数闭域上有限维代数的不可约表示分类上规避许多繁琐的具体计算. 由于水平有限, 虽然我全力以赴, 但还是无法避免笔记中存在不足与错误, 欢迎给我提出宝贵建议, 谢谢.

1 基本性质

1.1 Clifford 代数

本节固定域 $\mathbb{k}$. 我们先介绍域 $\mathbb{k}$ 上有限维线性空间 V 带上一个二次型 Q 都能对应一 $\mathbb{k}$ -代数 $\text{Cl}(V, Q)$, [定义1.1], 这是我们主要关心的 Clifford 代数. 随后记录一些 Clifford 代数的基本性质和低维情况 (当 $\dim_{\mathbb{k}} V = 1, 2$ 并且 Q 非退化场景的 Clifford 代数的结构. 例如我们将看到 $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ 时, 带有非退化二次型 Q 的 2 维线性空间的 Clifford 代数是广义四元数代数). 在本节的最后, 我们记录一些技术性引理, 它们将在之后被应用于证明 Clifford 代数的结构定理, [定理1.15].

回忆域 $\mathbb{k}$ 上有限维线性空间 V 上的**二次型**是指满足下面两个条件的映射 $Q : V \rightarrow \mathbb{k}$:

(QF1) 对任何 $\alpha \in \mathbb{k}, x \in V$ 有 $Q(\alpha x) = \alpha^2 Q(x)$;

(QF2) 若定义 $B(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y), x, y \in V$, 那么 $B : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ 是双线性函数.

不难看到二次型 $Q : V \rightarrow \mathbb{k}$ 产生的双线性函数 $B : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ 自动是对称的: $B(x, y) = B(y, x)$ 对所有 $x, y \in V$ 成立. 并且 $B(x, x) = 2Q(x)$ 对所有 $x \in V$ 成立. 因此当 $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ 时,

$$Q(x) = \frac{1}{2}B(x, x)$$

可从对称双线性函数 B 出发重塑二次型 Q . 并且 (保持 $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ 的假设) 如果 V 有 $\mathbb{k}$ -基 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 时, $A = (\frac{1}{2}B(e_i, e_j))_{n \times n}$ 是对称矩阵, 满足对任何 $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in V$, 有

$$Q(x) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)A(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T.$$

我们再指出有限维线性空间 V 上的二次型在 V 的子空间 U 上的限制定义了 U 上二次型. 如果 Q 诱导的对称双线性函数 B 是非退化的, 我们常称 Q 也是**非退化的**.

Definition 1.1 ([Jac09]). 设 V 是域 $\mathbb{k}$ 上的有限维空间, 带有二次型 $Q : V \rightarrow \mathbb{k}$, 定义 K_Q 是张量代数 $T(V)$ 的子集 $v \otimes v - Q(v)1, v \in V$ 生成的理想. 称 $\text{Cl}(V, Q) := T(V)/K_Q$ 是 (V, Q) 决定的 **Clifford 代数**.

Remark 1.2. 如果有限维空间 V 带有的二次型 $Q = 0$, 那么 Clifford 代数的定义恰是 V 的外代数的定义. 这时有代数同构 $\text{Cl}(V, Q) \cong E(V)$. 因此一般的 Clifford 代数 $\text{Cl}(V, Q)$ 可以理解为外代数 $E(V)$ 的某种“形变”.

设 Q 是有限维空间 V 上的二次型. 对每个 $v \in V$, 记 $\bar{v} = v + K_Q \in \text{Cl}(V, Q)$. 我们也会考虑典范线性映射 $i : V \rightarrow \text{Cl}(V, Q), v \mapsto \bar{v}$. 那么 $i(V)$ 是 Clifford 代数 $\text{Cl}(V, Q)$ 的一个生成元集 (之后我们会在 [定理1.15] 看到典范映射 $i : V \rightarrow \text{Cl}(V, Q)$ 是单射). 关于 Clifford 代数有如下泛性质:

Proposition 1.3 (Clifford 代数的泛性质, [Jac09]). 设 V 是域 $\mathbb{k}$ 上的有限维空间, 带有二次型 $Q : V \rightarrow \mathbb{k}$. 那么对任何 $\mathbb{k}$ -代数 A 和 $\mathbb{k}$ -线性映射 $f : V \rightarrow A$, 只要 $f(v)^2 = Q(v)1$ 对所有 $v \in V$ 成立, 就存在唯一的 $\mathbb{k}$ -代数同态 $\bar{f} : \text{Cl}(V, Q) \rightarrow A$ 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & \text{Cl}(V, Q) \\ & \searrow f & \swarrow \bar{f} \\ & A & \end{array}$$

Proof. 因为 $i(V)$ 是 $\text{Cl}(V, Q)$ 作为 $\mathbb{k}$ -代数的生成元集, 所以只需处理满足条件的代数同态 $\bar{f} : \text{Cl}(V, Q) \rightarrow A$ 的存在性. 首先 $f : V \rightarrow A$ 诱导代数同态 $g : T(V) \rightarrow A$ 使得 $g(v) = f(v), \forall v \in V$. 因此 $g(v \otimes v) = f(v)^2 = Q(v)1 = g(Q(v)1), \forall v \in V$. 这说明代数同态 g 可诱导代数同态 $\bar{f} : \text{Cl}(V, Q) \rightarrow A$ 使得 $\bar{f}i = f$. $\square$

在 Clifford 代数 $\text{Cl}(V, Q)$ 的定义理想 K_Q 中, 包含所有形如

$$(v + w) \otimes (v + w) - Q(v + w)1 = v \otimes w + w \otimes v + v \otimes v + w \otimes w - Q(v + w)1,$$

其中 $v, w \in V$, 的元素. 而 $v \otimes v - Q(v)1, w \otimes w - Q(w)1 \in K_Q$, 所以

$$v \otimes w + w \otimes v + (Q(v) + Q(w) - Q(v + w))1 = v \otimes w + w \otimes v - B(v, w)1 \in K_Q, \quad (1.1)$$

对所有 $v, w \in V$ 成立. 根据(1.1), 在 Clifford 代数 $\text{Cl}(V, Q)$ 中总有 $\bar{v}\bar{w} + \bar{w}\bar{v} = B(v, w)\bar{1}$. 结合 $\bar{v}^2 = Q(v)\bar{1}$ 知

Lemma 1.4 ([Jac09]). 设 V 是有限维 $\mathbb{k}$ -线性空间. 若 V 有生成元集 $\{u_1, \dots, u_n\}$, 那么集合

$$\{\bar{1}, \bar{u}_{i_1} \bar{u}_{i_2} \cdots \bar{u}_{i_r} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_r, 1 \leq r \leq n\}$$

是 Clifford 代数 $\text{Cl}(V, Q)$ 作为 $\mathbb{k}$ -线性空间的一个生成元集. 特别地, 若 $\dim_{\mathbb{k}} V = n$, 则 $\dim_{\mathbb{k}} \text{Cl}(V, Q) \leq 2^n$.

下面我们主要谈论基域特征不是 2 的场景下 Clifford 代数的基本性质. 首先我们确定 1 维空间 V 带上满足诱导对称双线性函数 B 非退化的二次型 $Q : V \rightarrow \mathbb{k}$ 的 Clifford 代数的结构.

Example 1.5 ([Jac09]). 设基域 $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$, $V = \mathbb{k}u$ 是 1 维线性空间. 假设 $B : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ 是非退化双线性型, 那么对基元 $u \in V$ 有 $Q(u) \neq 0$. 命 $A = \mathbb{k}[t]/(t^2 - Q(u))$, 是多项式代数 $\mathbb{k}[t]$ 的商代数, 那么 $\dim_{\mathbb{k}} A = 2$ 并且标准线性映射 $f : V \rightarrow A, u \mapsto \bar{t}$ 根据 [命题1.3] 诱导代数同态 $\bar{f} : \text{Cl}(V, Q) \rightarrow A$. 这明显是满代数同态. 所以由 [引理1.4] 得到的 $\dim_{\mathbb{k}} \text{Cl}(V, Q) \leq 2$ 迫使 $\bar{f} : \text{Cl}(V, Q) \rightarrow A$ 是代数同构. 如果 $Q(u)$ 不是 $\mathbb{k}$ 中的平方元素 (这时 $\mathbb{k}$ 不可能是代数闭域!), 那么 $t^2 - Q(u)$ 便是 $\mathbb{k}$ 上的不可约多项式. 于是 $\text{Cl}(V, Q)$ 是域. 如果 $Q(u)$ 是 $\mathbb{k}$ 中的平方元素, 那么 $t^2 - Q(u)$ 作为无重根的多项式 (因为 $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$) 自然可分解为两个不同的首一一次多项式的乘积, 这蕴含 $\mathbb{k}$ -代数同构 $\text{Cl}(V, Q) \cong \mathbb{k} \oplus \mathbb{k}$.

设基域 $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ 且 V 是 $\mathbb{k}$ 上 n 维线性空间. 这时基域条件使得 $\mathbb{k}$ 上任何 n 阶对称阵都合同于某个对角阵. 这说明对任何非退化双线性型 $Q: V \rightarrow \mathbb{k}$, 我们总能够选取适当的 V 的基 $\{u_1, \dots, u_n\}$ 使得 $(B(u_i, u_j))_{n \times n}$ 是主对角线元素均非零的对角阵 (例如当 $n = 2$ 时, 我们能够适当选取 V 的 $\mathbb{k}$ -基 $\{u, v\}$ 使得 $B(u, v) = 0$ 且 $Q(u)Q(v) \neq 0$). 下面我们用前面的观察来确定带上非退化二次型的 2 维线性空间的 Clifford 代数的结构.

Example 1.6 ([Jac09]). 设基域 $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ 且 V 是 $\mathbb{k}$ 上 2 维线性空间, 带有非退化的二次型 Q . 这时可选取 V 的基 $\{u, v\}$ 使得 $B(u, v) = 0$ 且 $Q(u)Q(v) \neq 0$. 记 Q 在子空间 $\mathbb{k}u$ 上的限制二次型是 Q' , 并设 C' 是 $\mathbb{k}u$ 带上 Q' 的 Clifford 代数. 根据 [例1.5], C' 有 $\mathbb{k}$ -基 $\{1, \bar{u}\}$ 满足 $\bar{u}^2 = Q(u)1$. 考虑 $M_2(C')$ 中的矩阵

$$u' = \begin{pmatrix} \bar{u} & 0 \\ 0 & -\bar{u} \end{pmatrix}, \quad v' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q(v)1 & 0 \end{pmatrix}.$$

直接计算表明 $u'v' + v'u' = 0$, $(u')^2 = Q(u)1$ 以及 $(v')^2 = Q(v)1$. 所以 u', v' 所生成的 $M_2(C')$ 的子代数 A 满足 $A = \mathbb{k}1 + \mathbb{k}u' + \mathbb{k}v' + \mathbb{k}u'v'$. 由 $\{1, \bar{u}\}$ 是 C' 的 $\mathbb{k}$ -基不难验证 $\{1, u', v', u'v'\}$ 是 A 的 $\mathbb{k}$ -基. 因此 $\dim_{\mathbb{k}} A = 4$.

考虑线性映射 $f: V \rightarrow A$ 满足 $f(u) = u', f(v) = v'$, 那么直接计算表明 $f(x)^2 = Q(x)1, \forall x \in V$. 因此 [命题1.3] 蕴含有唯一的代数同态 $\bar{f}: \text{Cl}(V, Q) \rightarrow A$ 使得 $\bar{f}(\bar{u}) = u', \bar{f}(\bar{v}) = v'$. 于是 $\bar{f}: \text{Cl}(V, Q) \rightarrow A$ 是满代数同态. 结合 $\dim_{\mathbb{k}} \text{Cl}(V, Q) \leq 4$, [引理1.4], 可知 $\bar{f}: \text{Cl}(V, Q) \rightarrow A$ 是代数同构.

Remark 1.7. 设基域 $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$, V 是 $\mathbb{k}$ 上有限维线性空间, 带有 (可以退化的) 二次型 Q . 如果 V 有 $\mathbb{k}$ -基 $\{u_1, \dots, u_n\}$, 那么借助 $\text{Cl}(V, Q)$ 中 $\bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}_j \bar{u}_i = B(u_i, u_j)1$ 不难验证 $\text{Cl}(V, Q)$ 作为 $\mathbb{k}$ -代数可等价地描述为由 $u_1, \dots, u_n$ 生成, 并由下面的生成关系确定的代数: $u_i^2 = Q(u_i), u_i u_j + u_j u_i = B(u_i, u_j)1$, 其中 $1 \leq i, j \leq n$. 例如, 取 $\alpha, \beta \in \mathbb{k}^\times$, 域 $\mathbb{k}$ 上由 u, v 生成, 并有关系 $u^2 = \alpha, v^2 = \beta$ 以及 $uv + vu = 0$ 给出非退化的 Clifford 代数.

Definition 1.8 (广义四元数代数, [Jac09]). 设 $\mathbb{k}$ 是特征不为 2 的域, 称 $\mathbb{k}$ -代数 A 是广义四元数代数, 如果满足有 $\alpha, \beta \in \mathbb{k}^\times$ 使得 A 作为 $\mathbb{k}$ -代数可由 i, j 生成, 并满足下面的关系:

$$i^2 = \alpha 1 \neq 0, j^2 = \beta 1 \neq 0, ij = -ji. \quad (1.2)$$

我们说明带有非退化二次型的 2 维线性空间的 Clifford 代数都是广义四元数代数.

Lemma 1.9 ([Jac09]). 设 $\mathbb{k}$ 是特征不为 2 的域, V 是 $\mathbb{k}$ 上 2 维线性空间, 带有二次型 Q 满足诱导的对称双线性函数 B 非退化. 那么 Clifford 代数 $\text{Cl}(V, Q)$ 是域 $\mathbb{k}$ 上的广义四元数代数.

Proof. 这是 [例1.6] 的讨论的直接推论. □

Lemma 1.10 ([Jac09]). 特征不是 2 的域 $\mathbb{k}$ 上的广义四元数代数是 $\mathbb{k}$ 上的 4 维中心单代数.

Proof. 由生成关系(1.2)可知 $\mathbb{k}$ 上广义四元数代数 A 作为 $\mathbb{k}$ -空间可由 $\{1, i, j, ij\}$ 生成. 下面我们验证 $\{1, i, j, ij\}$ 是 $\mathbb{k}$ -线性无关的. 如果有 $\mathbb{k}$ 中元素 a, b, c, d 使得 $a + bi + cj + dij = 0$. 在等式两边右乘 $i^{-1} = \alpha^{-1}i$ 得到

$$a\alpha^{-1}i + b\alpha^{-1}1 - c\alpha^{-1}ij + d\alpha^{-1}iji = 0.$$

对上式两边左乘 i 得到 $a1 + bi - cj - dij = 0$. 结合 $a + bi + cj + dij = 0$ 得到 $a1 + bi = 0$ 以及 $cj + dij = 0$. 对 $a1 + bi = 0$ 左乘 j 并右乘 $j^{-1} = \beta^{-1}j$ 可得 $a1 - bi = 0$, 进而 $a1 = bi = 0$. 类似可证 $cj = dij = 0$. 由此得到 $a = b = c = 0$. 对 $dij = 0$ 左乘 i 可得 $d = 0$. 这就证明了 $\{1, i, j, ij\}$ 是 A 的 $\mathbb{k}$ -基. 如果 A 有真理想 I , 那么

A/I 也满足广义四元数代数的定义, 进而有 $\dim_{\mathbb{k}}(A/I) = 4$. 因此 $I = 0$, 这迫使 A 是单代数. 最后验证 A 的中心是 $\mathbb{k}1$: 如果 $a1 + bi + cj + dij$ 是 A 的中心元, 那么该元素和 i 可交换蕴含 $c = d = 0$. 而 $a1 + bi$ 和 j 可交换蕴含 $b = 0$. 所以 A 的中心就是 $\mathbb{k}1$. 至此证明了 A 是 $\mathbb{k}$ 上 4 维中心单代数. $\square$

我们将 [引理1.10] 应用于带有非退化二次型的 2 维线性空间的 Clifford 代数立即得到:

Corollary 1.11 ([Jac09]). 设 $\mathbb{k}$ 是特征不为 2 的域, V 是 $\mathbb{k}$ 上 2 维线性空间, 带有二次型 Q 满足诱导的对称双线性函数 B 非退化. 则 $\text{Cl}(V, Q)$ 是域 $\mathbb{k}$ 上 4 维中心单代数. 特别地, 当 $\mathbb{k}$ 是代数闭域时, $\text{Cl}(V, Q) \cong M_2(\mathbb{k})$.

下面依然设 $\mathbb{k}$ 是特征不为 2 的域, V 是 $\mathbb{k}$ 上 n 维线性空间带有二次型 Q . 这时 $B : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ 作为对称双线性函数, 我们可以考虑判别式

$$\Delta_B := \det(B(u_i, u_j))_{n \times n} \in \mathbb{k},$$

其中 $\{u_1, \dots, u_n\}$ 是 V 的一个 $\mathbb{k}$ -基. 易验证 Δ_B 关于 V 不同基的选取相差某个非零常数的平方. 并且 B 非退化当且仅当 $\Delta_B \neq 0$. 对 V 的任何子空间 U , 我们可以定义 U 关于对称双线性函数 B 的正交补

$$U^\perp := \{v \in V \mid B(v, U) = 0\}.$$

不难看出 $U^\perp$ 是 V 的子空间并且 $U \cap U^\perp = \{x \in U \mid B(x, U) = 0\}$ 说明 $B|_U$ 非退化蕴含 $U \cap U^\perp = 0$.

Lemma 1.12 ([Jac09]). 设 $\mathbb{k}$ 是域, V 是 $\mathbb{k}$ 上有限维线性空间, 有子空间 U 以及 V 上对称双线性函数 $B : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ 在 U 上的限制非退化. 那么 $V = U \oplus U^\perp$.

Proof. 命 $\varphi : V \rightarrow U^*, v \mapsto B(v, -)$, 那么 φ 是线性映射且 $\text{Ker} \varphi = U^\perp$. 因为 B 在 U 上的限制是非退化的, 所以 φ 是满射. 进而 $\dim_{\mathbb{k}} U^\perp + \dim_{\mathbb{k}} U = \dim_{\mathbb{k}} V$. 现在结合 $U \cap U^\perp = 0$ 得到结果. $\square$

Remark 1.13. 我们说明在 [引理1.12] 的假设与记号下, B 在 $U^\perp$ 上的限制也非退化: 如果 $y \in U^\perp$ 满足 $B(U^\perp, y) = 0$, 那么 $V = U \oplus U^\perp$ 蕴含 $B(V, y) = 0$, 这迫使 $y = 0$.

Lemma 1.14 ([Jac09]). 设 $\mathbb{k}$ 是特征不是 2 的域, V 是 $\mathbb{k}$ 上有限维线性空间, $\dim_{\mathbb{k}} V \geq 3$, 且带有非退化二次型 Q (即相应的对称双线性函数 B 是非退化的). 设 U 是 V 的 2 维线性子空间满足 B 在 U 上的限制是非退化的, 那么根据 [引理1.12], 有 $V = U \oplus U^\perp$. 记 Q' 和 Q'' 分别是 Q 在 U 和 $U^\perp$ 上的限制. 则有代数同构

$$\text{Cl}(V, Q) \cong \text{Cl}(U, Q') \otimes \text{Cl}(U, -\Delta'_B Q''), \quad (1.3)$$

其中 $\Delta'_B \in \mathbb{k}^\times$ 是 B 限制在 U 上对称双线性函数的判别式.

Proof. 记典范映射 $i' : U \rightarrow \text{Cl}(U, Q'), y \mapsto y'$ 以及 $i'' : U^\perp \rightarrow \text{Cl}(U^\perp, -\Delta'_B Q''), z \mapsto z''$. 因为 U 是 2 维线性空间且带上 B 的限制是非退化的, 可应用 [例1.6] 的讨论, 存在 U 的 $\mathbb{k}$ -基 $\{u, v\}$ 满足 $B(uv) = 0$ 且 $Q(u)Q(v) \neq 0$. 记 $\bar{d} = 2\bar{u}\bar{v} \in \text{Cl}(V, Q)$. 由于总有 $\bar{u}^2 = Q(u)\bar{1}, \bar{v}^2 = Q(v)\bar{1}, \bar{u}\bar{v} + \bar{v}\bar{u} = 0$, 所以

$$\bar{d}^2 = 4\bar{u}\bar{v}\bar{u}\bar{v} = -4Q(u)Q(v)\bar{1} = -B(u, u)B(v, v)1 = -\Delta'_B 1.$$

由于 U 中元素都可以表示为 u, v 的 $\mathbb{k}$ -线性组合, 所以可直接验证对任何 $y \in U$, 有 $\bar{y}\bar{d} + \bar{d}\bar{y} = 0$. 对任何 $y \in U$ 和 $z \in U^\perp$, $B(y, z) = 0$ 说明 $\bar{y}\bar{z} + \bar{z}\bar{y} = 0$. 进而 $\bar{z}\bar{d} = \bar{d}\bar{z}$. 特别地, 在 $\text{Cl}(V, Q)$ 中我们有

$$\bar{y}(\bar{d}z) = (\bar{d}z)\bar{y} \text{ 以及 } (\bar{d}z)^2 = -\Delta'_B Q(z)1. \quad (1.4)$$

因此由 [命题1.3], 我们得到代数同态 $\varphi : \text{Cl}(U, Q') \rightarrow \text{Cl}(V, Q), y' \mapsto \bar{y}$ 以及代数同态 $\psi : \text{Cl}(U, -\Delta'_B Q'') \rightarrow \text{Cl}(V, Q), z'' \mapsto \overline{dz}$. 进而得到线性映射 $\theta : \text{Cl}(U, Q') \otimes \text{Cl}(U, -\Delta'_B Q'') \rightarrow \text{Cl}(V, Q), y' \otimes z'' \mapsto \varphi(y')\psi(z'') = \overline{ydz}$, 从(1.4)可知 θ 是代数同态. 下面我们通过构造 θ 的逆映射来证明 θ 是代数同态 (注意这里 $\theta(y' \otimes 1) = \bar{y}$), 来导出代数同构(1.3). 现在考虑 $\text{Cl}(U, Q')$ 中的元素 $d' = u'v'$, 那么可直接计算得到对任何 $y \in U$ 有 $d'y' + y'd' = 0$ 以及 $(d')^2 = -\Delta'_B 1$. 特别地, $\Delta'_B \neq 0$ 蕴含 d' 是 $\text{Cl}(U, Q')$ 中的可逆元. 对元素 $y' \otimes 1 + (d')^{-1} \otimes z'' \in \text{Cl}(U, Q') \otimes \text{Cl}(U, -\Delta'_B Q'')$, 我们计算 $(y' \otimes 1 + (d')^{-1} \otimes z'')^2 = (y')^2 \otimes 1 + 1 \otimes ((\Delta'_B)^{-1} z'')^2 = (Q(y) + Q(z))1 = Q(y+z)1$. 因此 [命题1.3] 诱导代数同态 $\tau : \text{Cl}(V, Q) \rightarrow \text{Cl}(U, Q') \otimes \text{Cl}(U, -\Delta'_B Q''), \overline{y+z} \mapsto y' \otimes 1 + (d')^{-1} \otimes z''$.

最后, 在代数生成元层面验证不难得到 θ 与 τ 互为逆映射. $\square$

1.2 Clifford 代数的结构定理

本节我们证明 Clifford 代数的结构定理:

Theorem 1.15 ([Jac09]). 设 $\mathbb{k}$ 是特征不是 2 的域, V 是 $\mathbb{k}$ 上 n 维线性空间并带有二次型 Q . 则

- (1) 有 $\dim_{\mathbb{k}} \text{Cl}(V, Q) = 2^n$, 且如果 V 有 $\mathbb{k}$ -基 $\{u_1, \dots, u_n\}$, 那么集合

$$\{\bar{1}, \overline{u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_r}} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_r, 1 \leq r \leq n\}$$

是 Clifford 代数 $\text{Cl}(V, Q)$ 作为 $\mathbb{k}$ -线性空间的 $\mathbb{k}$ -基. 特别地, 典范映射 $V \rightarrow \text{Cl}(V, Q), v \mapsto \bar{v}$ 是单射.

- (2) 如果二次型 Q 诱导的对称双线性函数 B 是非退化的, 那么: 当 n 是偶数时, $\text{Cl}(V, Q)$ 是中心单代数. 当 $n = 2k + 1$ 是奇数时, 若 $(-1)^k 2\Delta_B$ 不是 $\mathbb{k}$ 中的平方元素, 则 $\text{Cl}(V, Q)$ 是中心为 2 维域的单代数; 若 $(-1)^k 2\Delta_B$ 是 $\mathbb{k}$ 中的平方元素, 则 $\text{Cl}(V, Q)$ 是两个同构的中心单代数的直和. 故 $\text{Cl}(V, Q)$ 总是半单的.

Proof. 要证明 (1), 只需说明 $\dim_{\mathbb{k}} \text{Cl}(V, Q) = 2^n$, 原因是 [引理1.4] 我们已经看到如果 V 有 $\mathbb{k}$ -基 $\{u_1, \dots, u_n\}$, 那么集合 $\{\bar{1}, \overline{u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_r}} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_r, 1 \leq r \leq n\}$ 可 $\mathbb{k}$ -线性张成 Clifford 代数 $\text{Cl}(V, Q)$.

先处理 Q 诱导的对称双线性函数 B 非退化的情形. 我们对正整数 n 作归纳证明结论. 当 $n = 1$ 时, 结论来自 [例1.5]. 当 $n = 2$ 时, 结论来自 [例1.6]. 假设结论对维数不超过 $n - 1 (n \geq 3)$ 的情形结论都成立. 取定 V 的 2 维子空间 U , 则 $V = U \oplus U^\perp$ 且 B 在 $U, U^\perp$ 上的限制都非退化, [引理1.12] 和 [注记1.13]. 现在应用 [引理1.14] 得到 $\dim_{\mathbb{k}} \text{Cl}(V, Q) = (\dim_{\mathbb{k}} \text{Cl}(U, Q'))(\dim_{\mathbb{k}} \text{Cl}(U, -\Delta'_B Q''))$, 由归纳假设得到 $\dim_{\mathbb{k}} \text{Cl}(V, Q) = 2^n$. 由此证明了 B 非退化时, $\dim_{\mathbb{k}} \text{Cl}(V, Q) = 2^n$. 下面我们依然设 B 是非退化的, 来处理 (2).

设 B 是非退化的对称双线性函数. 当 n 是偶数时, 对 n 作归纳证明 $\text{Cl}(V, Q)$ 是中心单代数. 如果 $n = 2$, 那么结论来自 [推论1.11]. 假设结论对不超过 $n - 2 (n \geq 4)$ 的偶数成立, 那么由代数同构 $\text{Cl}(V, Q) \cong \text{Cl}(U, Q') \otimes \text{Cl}(U, -\Delta'_B Q'')$, 归纳假设, 以及域上两个有限维中心单代数在基域上的张量代数依然中心单, 得到结论. 现在设 $n = 2k + 1$ 是奇数. 我们对奇数 n 作归纳证明 (2) 的结论成立: 当 $n = 1$ 时, 结论来自 [例1.5] 的讨论. 这时 $\text{Cl}(V, Q) \cong \text{Cl}(U, Q') \otimes \text{Cl}(U, -\Delta'_B Q'')$ 是 4 维中心单代数 $\text{Cl}(U, Q')$ 和 $2k - 1 = 2(k - 1) + 1$ 维空间带上非退化二次型给出的 Clifford 代数 $\text{Cl}(U, -\Delta'_B Q'')$ 的张量积. 记 Δ''_B 是 B 在 $U^\perp$ 上限制的对称双线性函数的判别式. 那么二次型 $-\Delta'_B Q''$ 对应的判别式是 $(-\Delta'_B)^{n-2} \Delta''_B$. 根据归纳假设, $\text{Cl}(U, -\Delta'_B Q'')$ 的代数结构分两种情况, 来自 $(-1)^{k-1} 2(-\Delta'_B)^{n-2} \Delta''_B$ 是否是 $\mathbb{k}$ 中平方元素. 由 $U \oplus U^\perp$ 是正交的直和分解, $\Delta_B = \Delta'_B \Delta''_B$. 于是可化简 $(-1)^{k-1} 2(-\Delta'_B)^{n-2} \Delta''_B = (-1)^{n-3} (\Delta'_B)^{n-3} (-1)^k \Delta_B$. 因为 $n - 3$ 这时是偶数, 所以

$$(-1)^k 2\Delta_B \text{ 是 } \mathbb{k} \text{ 中的平方元素当且仅当 } (-1)^{k-1} 2(-\Delta'_B)^{n-2} \Delta''_B \text{ 是平方元素.}$$

因为中心单代数和单代数的张量积代数是单代数, 所以归纳假设保证了当 $(-1)^k 2\Delta_B$ 不是平方元素时, $\text{Cl}(V, Q)$ 是单代数, 并且中心维数是 2. 当 $(-1)^k 2\Delta_B$ 是平方元素时, 4 维中心单代数与两个同构的中心单代数的直和作张量得到的张量代数依然是两个同构的中心单代数的直和, 因此我们证明了 (2) 成立.

最后需要处理 B 退化场景下 $\dim_{\mathbb{k}} \text{Cl}(V, Q) = 2^n$ 成立. 考虑 $R = \{x \in V \mid B(x, V) = 0\}$. 设 V 有子空间 U 满足 $V = R \oplus U$. 那么 B 在 U 上的限制非退化 (如果 $u \in U$ 满足 $B(u, U) = 0$, 那么 $B(u, V) = 0$ 蕴含 $u \in R$. 这迫使 $u = 0$). 现在定义 $W = R \oplus U \oplus R^*$ 并置

$$\tilde{Q}(z + y + f) = Q(z) + Q(y) + f(z),$$

其中 $z \in R, y \in U, f \in R^*$. 则 $\tilde{Q} : W \rightarrow \mathbb{k}$ 是二次型, 并且对应的对称双线性函数

$$\tilde{B}(z + y + f, z' + y' + f') = B(z, z') + B(y, y') + f(z') + f'(z),$$

不难验证这是非退化的并且是 Q 的延拓. 因此我们可以对 $\text{Cl}(W, \tilde{Q})$ 应用非退化情形的已经证明的结果, 得到它的典范 $\mathbb{k}$ -基 (由 W 的基诱导). 现在设 V 有 $\mathbb{k}$ -基 $\{u_1, \dots, u_n\}$, 那么这可扩充为 W 的 $\mathbb{k}$ -基, 于是知典范映射 $\text{Cl}(V, Q) \rightarrow \text{Cl}(W, \tilde{Q})$ 将集合 $X = \{\overline{1}, \overline{u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_r}} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_r, 1 \leq r \leq n\}$ 映至 $\text{Cl}(W, \tilde{Q})$ 的某个 $\mathbb{k}$ -基的子集. 这说明 X 是 $\text{Cl}(V, Q)$ 的 $\mathbb{k}$ -线性无关子集. 结合 [引理1.4] 便完成 (1) 的证明. $\square$

Remark 1.16. 根据 [定理1.15(1)], 特征不是 2 的域 $\mathbb{k}$ 上的有限维线性空间 V 带上任何二次型 Q 对应的 Clifford 代数 $\text{Cl}(V, Q)$ 满足典范映射 $i : V \rightarrow \text{Cl}(V, Q)$ 是线性嵌入, 因此我们总可默认 $V \subseteq \text{Cl}(V, Q)$.

注意到 [定理1.15(2)] 为我们提供了 Q 非退化时, Clifford 代数 $\text{Cl}(V, Q)$ 充分多的结构信息.

Corollary 1.17 (代数闭域上非退化二次型场景的 Clifford 代数结构定理). 设 $\mathbb{k}$ 是特征不是 2 的代数闭域, n 是正整数, 并设 V 是 n 维线性空间带有非退化二次型 Q . 当 $n = 2m$ 是偶数时, 有 $\mathbb{k}$ -代数同构 $\text{Cl}(V, Q) \cong M_{2m}(\mathbb{k})$; 当 $n = 2m + 1$ 是奇数时, 有代数同构 $\text{Cl}(V, Q) \cong M_{2m}(\mathbb{k}) \oplus M_{2m}(\mathbb{k})$.

Proof. 当 n 是偶数时, [定理1.15(2)] 说明 $\text{Cl}(V, Q)$ 是 2^n 维中心单代数. 而 $\mathbb{k}$ 是代数闭域逼迫 $\text{Cl}(V, Q) \cong M_{2^m}(\mathbb{k})$. 当 $n = 2m + 1$ 是奇数时, $\mathbb{k}$ 是代数闭域保证了 $(-1)^k 2\Delta_B$ 是 $\mathbb{k}$ 中的平方元素. 所以 [定理1.15(2)] 说明 $\text{Cl}(V, Q)$ 是两个同构的中心单代数的直和. 这迫使 $\text{Cl}(V, Q) \cong M_{2^m}(\mathbb{k}) \oplus M_{2^m}(\mathbb{k})$. $\square$

1.3 Clifford 代数作为外代数的滤形变

回忆域 $\mathbb{k}$ 上带有升滤 $F_0 A \subseteq F_1 A \subseteq \cdots$ 的代数 A 如果有分次代数 B 满足有分次代数同构 $B \cong \text{gr } A$, 那么称 A 是 B 的滤形变, 这里 $\text{gr } A$ 是关于升滤 $F_\bullet A$ 作的相伴分次环. 我们说明

Proposition 1.18. 设 $\mathbb{k}$ 是特征不是 2 的域, V 是 n 维线性空间, 带有二次型 Q , 并设 $C = \text{Cl}(V, Q)$ 是相应的 Clifford 代数. 对每个自然数 k , 记 $F_k C$ 是 C 中所有长度不超过 k 的关于 V 的单项式张成的 $\mathbb{k}$ -子空间, 记 $\text{gr } C$ 是 C 关于代数升滤 $F_\bullet C$ 的相伴分次代数. 则有分次代数同构 $\text{gr } C \cong E(V)$, 其中 $E(V)$ 是 V 的外代数.

Proof. 对任何 $x \in V$, 在 C 中有 $x^2 = Q(x)1$, 这来自 Clifford 代数的定义. 于是 $\bar{x}^2 = 0 \in F_2 C / F_1 C$. 这说明有唯一的代数同态 $\varphi : E(V) \rightarrow \text{gr } C$ 满足 $\varphi(x) = \bar{x}, \forall x \in V$. 于是 [推论1.15(1)] 蕴含 φ 将 $E(V)$ 的某个 $\mathbb{k}$ -基映为 C 的某个 $\mathbb{k}$ -基, 这说明 φ 是单射. 而 φ 明显是满射, 所以 φ 给出分次代数同构 $\text{gr } C \cong E(V)$. $\square$

根据 [命题1.18], Clifford 代数 $\text{Cl}(V, Q)$ 可视为滤形变意义下外代数 $E(V)$ 的“量子化”.

1.4 应用 Clifford 代数的一个算例

设 $\mathbb{k}$ 是特征不是 2, 3 的代数闭域, 设 A 是 $\mathbb{k}$ 上由 g, x_1, x_2 生成, 由下面的生成关系定义的 $\mathbb{k}$ -代数:

$$g^6 = 1, gx_i = -x_i g, x_1 x_2 = -x_2 x_1, x_i^2 + g^2 = 1,$$

这里 $1 \leq i \leq 2$. 利用钻石引理可知 A 有 $\mathbb{k}$ -基:

$$\{g^r x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{Z}, 0 \leq r \leq 5, \epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0, 1\}\} \quad (1.5)$$

因此 $\dim_{\mathbb{k}} A = 24$. 下面我们计算 A (在 $\mathbb{k}$ 上) 所有不可约表示的维数.

易知 g^2 是 A 的中心元, 命 $C = \mathbb{k}[g^2] \subseteq A$ 是 g^2 生成的中心子代数, 则 $\max\text{Spec } C = \{(g^2 - 1), (g^2 - \omega), (g^2 - \omega^3)\}$ (这里 $\omega \neq 1 \in \mathbb{k}$ 满足 $\omega^3 = 1$). 对每个 $\mu \in \{1, \omega, \omega^2\}$, 记 $\mathfrak{m}_\mu = (g^2 - \mu) \in \max\text{Spec } C$. 要确定 A 所有不可约表示的维数, 只需处理所有 $A_\mu := A/\mathfrak{m}_\mu A$ 的不可约表示维数.

现在(1.5)蕴含对每个 $\mathfrak{m} \in \max\text{Spec } C$ 有 $A/\mathfrak{m}A$ 是 $\mathbb{k}$ 上的 8 维代数. 所以 $\dim_{\mathbb{k}} A_\mu = 8$. 分情况处理:

$\mu = 1$ 这时在 A_1 中 $\overline{x_1^2} = \overline{x_2^2} = 0$ 说明 $(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \subseteq \text{Jac}(A_1)$. 故 $\dim_{\mathbb{k}} A_1/\text{Jac}(A_1) \leq 2$. 而 A_1 明显有两个不同的特征 (均在 x_1, x_2 上取值为零, 在 g 上取值为 ± 1), 这说明 A_1 共有两个 1 维不可约表示等价类.

$\mu = \omega$ 命 Q 是线性空间 $V = \mathbb{k}x_1 \oplus \mathbb{k}x_2$ 上满足 $Q(x_i) = 1 - \omega^2$ 以及 $B(x_i, x_j) = 0$ 的二次型 (明显非退化), 记 C_1 是 (V, Q) 的 Clifford 代数. 则 $A_\omega \cong C_1 \# \mathbb{k}[\mathbb{Z}_2]$, 其中 $\mathbb{Z}_2$ 是 2 阶循环群. 由 $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ 以及 [引理 1.9] 得到 A_ω 是 8 维半单代数, 且 A_ω 明显没有 1 维表示. 这迫使 $A_\omega/\text{Jac}(A_\omega) \cong M_2(\mathbb{k}) \oplus M_2(\mathbb{k})$.

$\mu = \omega^2$. 类似 $\mu = \omega$ 的讨论可证 $A_{\omega^2}/\text{Jac}(A_{\omega^2}) \cong M_2(\mathbb{k}) \oplus M_2(\mathbb{k})$.

1.5 Clifford 代数的 Jacobson 根

本节固定 $\mathbb{k}$ 是特征不为 2 的域, V 是域 $\mathbb{k}$ 上 n 维线性空间, 并带有二次型 Q . 根据 [定理 1.15(2)], 当 Q 诱导的对称双线性函数 B 非退化时, 相应的 Clifford 代数总是有限维半单代数. 下面我们讨论 B 退化的情形.

保持前面的假设与记号. 命 $R := \{v \in V \mid B(v, V) = 0\}$, 这是 V 的子空间且 B 非退化的充要条件是 $R = 0$. 命 $\overline{Q} : V/R \rightarrow \mathbb{k}, \overline{v} = v + R \mapsto Q(v)$. 因为 $Q(v) = \frac{1}{2}B(v, v)$, 所以一旦 $v, w \in V$ 满足 $v - w \in R$, 就有 $Q(v - w) = 0$. 进而 $Q(v) = Q(w + (v - w)) = B(w, v - w) + Q(w) + Q(v - w) = Q(w)$. 这说明 $\overline{Q} : V/R \rightarrow \mathbb{k}$ 是定义合理的映射. 于是 $\overline{Q}$ 是 V/R 上的二次型并且诱导的对称双线性函数 $\overline{B} : (V/R) \times (V/R) \rightarrow \mathbb{k}, (v + R, w + R) \mapsto B(v, w)$ 自然是非退化的. 注意到 $V/R = 0$ 当且仅当 $Q = 0$ (因为 $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$). 我们可不妨设 $Q \neq 0$: 否则, $Q = 0$ 时, Clifford 代数 $\text{Cl}(V, Q)$ 就是外代数, 这是 $\text{Cl}(V, Q)$ 作为有限维连通分次代数的 Jacobson 根自然是余 1 维的, 并且 $\text{Cl}(V, Q)/\text{Jac}(\text{Cl}(V, Q)) = \mathbb{k}$.

下面我们总假设 $Q \neq 0$. 于是 $V/R \neq 0$, 且前面的讨论得到半单 Clifford 代数 $\text{Cl}(V/R, \overline{Q})$. 根据 [命题 1.3], 我们有典范代数同态 $\pi : \text{Cl}(V, Q) \rightarrow \text{Cl}(V/R, \overline{Q})$ 使得 $\pi(v) = \overline{v} = v + R, \forall v \in V$. 易见 π 是满代数同态. 易见 $R \subseteq \text{Cl}(V, Q)$ 生成的 $\text{Cl}(V, Q)$ 的理想 L 是 $\text{Ker}(\pi)$ 的子集. 并且 $\text{Cl}(V/R, \overline{Q})$ 是半单代数说明 $\text{Jac}(\text{Cl}(V, Q)) \subseteq \text{Ker}(\pi)$. 下面我们验证 $L = \text{Ker}(\pi)$.

对任何 $x \neq 0 \in R$, 满足 $xv + vx = 0 \in \text{Cl}(V, Q)$ 对所有 $v \in V$ 成立, 并且 x 是 $\text{Cl}(V, Q)$ 中的幂零元. 因此 L 是幂零理想. 我们有定义合理的典范代数同态 $\tau : \text{Cl}(V/R, \overline{Q}) \rightarrow \text{Cl}(V, Q)/L, \overline{v} \mapsto v + L$, 它明显是 π 诱

导的代数同态 $\tilde{\pi} : \text{Cl}(V, Q)/L \rightarrow \text{Cl}(V/R, \overline{Q})$ 的逆映射. 所以我们得到代数同构 $\text{Cl}(V, Q)/L \cong \text{Cl}(V/R, \overline{Q})$ 以及 $L = \text{Ker}(\pi)$. 特别地, 前面的讨论说明 $\text{Ker}(\pi)$ 是幂零理想, 这蕴含 $\text{Ker}(\pi) \subseteq \text{Jac}(\text{Cl}(V, Q))$. 故

$$\text{Jac}(\text{Cl}(V, Q)) = \text{Ker}(\pi).$$

我们得到代数同构

$$\frac{\text{Cl}(V, Q)}{\text{Jac}(\text{Cl}(V, Q))} \cong \text{Cl}(V/R, \overline{Q}). \quad (1.6)$$

根据 [定理1.15], 等式(1.6)两边的 $\mathbb{k}$ -线性维数是 2^r , 其中 $r = \dim_{\mathbb{k}}(V/R)$. 那么 r 也可以描述为对称双线性函数 B 的 Gram 矩阵的秩: 设 T 是 B 关于 V 的某个 $\mathbb{k}$ -基定义的 Gram 矩阵 (设 $\text{rank } T = t$), 那么将 T 合同对角化后可知存在 V 的 $\mathbb{k}$ -基 $\{\beta_1, \dots, \beta_t, \beta_{t+1}, \dots, \beta_n\}$ 使得 $\beta_1, \dots, \beta_t$ 张成的子空间和 R 之交为零空间, 且 $\beta_{t+1}, \dots, \beta_n \in R$. 这迫使 $R = \mathbb{k}\beta_{t+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{k}\beta_n$. 因此 $t = r$.

参考文献

- [BG02] Ken A. Brown and Ken R. Goodearl. *Lectures on algebraic quantum groups*. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
- [Cli78] Professor Clifford. Applications of Grassmann's Extensive Algebra. *Amer. J. Math.*, 1(4):350–358, 1878.
- [Jac09] Nathan Jacobson. *Basic algebra II*. Dover Publications, 2nd edition, 2009.
- [MR87] J. C. McConnell and J. C. Robson. *Noncommutative Noetherian Rings*. American Mathematical Society, 1987.