Brenner-Butler 定理

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 8 月 27 日

这份笔记主要记录了环论版本的 Brenner-Butler 定理证明, 它是倾斜理论历史上的重要突破. 倾斜理论产生于有限维代数表示论：代数表示论中的一个经典结论是代数闭域上有限维连通基本路代数都同构于某个有限连通箭图决定的路代数关于某个容许理想的商代数 (或称为**有界箭图代数**), 所以研究有限维连通路代数重要而自然. P. Gabriel 于 1972 年在 [Gab72] 中证明了代数闭域上有限维连通路代数是有限表示型的 (即不可分模同构类数目有限) 当且仅当该路代数箭图的底图是下述 Dynkin 图中的一种：$\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_m (m \geq 4), \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7$ 和 $\mathbb{E}_8$(见 [ASS06, p.291, Theorem 5.10]). 这启发 I. N. Bernstein, I. M. Gelfand 以及 V. A. Ponomarev 将 Lie 理论的想法代入代数表示论的研究 [BGP73], 他们对路代数引入了**反射函子** (reflection functor) 的概念 (反射变换的"函子化") 给出了 Gabriel 定理一个全新优美的证明. 随后 M. Auslander, M. Platzeck 和 I. Reiten 在 [APR79] 中对特殊的 Artin 代数推广了反射函子的概念, 并且他们存在投射非内射单模的 Artin 代数 R' 构造了某个特殊的模 ${}_{R'}T$(也是首个倾斜模), 他们证明了若置 $R = \mathrm{End}({}_{R'}T)^{op}$, 则函子 $\mathrm{Hom}_{R'}(T, -)$ 可以给出 R'-**Mod** 与 R-**Mod** 的两个特殊的全子范畴之间的等价函子 [APR79, Proposition 2.7]. 随后倾斜模的概念首次被 S. Brenner 与 M. C. R. Butler 在 [BB06] 中公理化, 并证明了 Brenner-Butler 定理. 在 [HR82] 中, D. Happel 与 C. M. Ringel 将倾斜模的定义进一步放宽与简化, 在新的体系下发展并推广了原有的理论. 在 1986 年, Y. Miyashita 在 [Miy86] 中定义了更一般的倾斜模的概念：对任何自然数 n, 他考虑了投射维数不超过 n 的倾斜模 (之后的文献称之为**经典 n-倾斜模** (classical n-tilting module), 并推广了 Brenner-Butler 定理. D. Happel 在 [Hap87] 中证明了代数闭域上有限维代数 A 上倾斜模 T_A 的自同态代数 $R' = \mathrm{End}T_A$ 和 A 的有界导出范畴间有三角等价 $\mathbf{D}^b(A) \cong \mathbf{D}^b(R')$(Happel 也在 [Hap87] 中证明了 Frobenius 范畴的稳定范畴是三角范畴), 这提供了广泛构造导出等价的方法. E. Cline, B. Parshall 与 L. Scott 在 [CPS86] 中针对 [Miy86] 意义下的倾斜模证明了更一般的导出等价定理：对含幺环 R 上经典 n-倾斜模 T_R, 记 $R' = \mathrm{End}T_A$, 那么将 V 视作集中在零次位置上的复形所决定的导出 Hom 函子 $\mathbb{R}\mathrm{Hom}(V, -) : \mathbf{D}^b(R) \to \mathbf{D}^b(R')$ 和导出张量积函子 $- \otimes^{\mathbb{L}}_{R'} V : \mathbf{D}^b(R') \to \mathbf{D}^b(R)$ 给出三角等价 $\mathbf{D}^b(R) \cong \mathbf{D}^b(R')$. 这些工作启发了 J. Rickard 在 [Ric89] 中对一般的环发展了导出 Morita 理论, 他定义了**倾斜复形** (tilting complex) 来刻画两个环何时导出等价. 现在, 倾斜理论已成为研究代数表示论、代数群、代数几何以及代数拓扑等领域的基本工具.

由于水平有限, 虽然我全力以赴, 但还是无法避免笔记中存在不足与错误, 欢迎给我提出宝贵建议.

1 引言

在 1958 年, K. Morita 在 [Mor58] 中发展了 Morita 等价理论, 其中一个经典结果便是：对含幺环 R, R', 模范畴 $\mathbf{Mod}\text{-}R$ 与 $\mathbf{Mod}\text{-}R'$ 范畴等价的充要条件是存在有限生成投射生成子 P_R 使得 $R' \cong \mathrm{End}P_R$. 特别地, 若 $R' = \mathrm{End}P_R$, 则模范畴 $\mathbf{Mod}\text{-}R$ 与 $\mathbf{Mod}\text{-}R'$ 间的等价函子可由双模 ${}_{R'}P_R$ 决定的张量函子 $- \otimes_{R'} P$ 与 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_R(P_R, -)$ 实现. 我们接下来所介绍的 Brenner-Butler 定理可视作这一结论的推广, 该定理原先由 S. Brenner 与 M. C. R. Butler 于 1979 年在有限维代数层面证明 [BB06], 详细的讨论可以参见 [ASS06, p.207, Theorem 3.8](因为是域 $\Bbbk$ 上的有限维代数, 所以经典证明中使用了对偶函子 $D = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(-, \Bbbk)$). 随后 Y. Miyashita 在 [Miy86] 中将 Brenner-Butler 定理作了更一般的推广 (并且在一般环上证明了该定理), 这里使用的 Brenner-Butler 定理证明方法上主要参考了 [Miy86]. 在给出 Brenner-Butler 定理叙述前, 需要先引入倾斜模的概念, 它是有限生成投射生成子的推广. 让我们先来看看有限生成投射生成子可以如何刻画.

若 X 是含幺环 R 上的右模, 易见 X 是有限生成投射模的充要条件是存在 P 的投射分解

$$0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

使得 P_0 是有限生成投射模. 此外, 易见 X 是生成子的充要条件是存在正合列 $0 \longrightarrow R \longrightarrow X_0 \longrightarrow 0$ 使得 X_0 是有限个 X 直和的直和因子. 由此我们得到有限生成投射生成子的刻画：

Basic Observation. 设 R 是含幺环, X 是右 R-模, 那么 X 是有限生成投射生成子的充要条件是
(1) 存在 P 的投射分解 $0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$ 使得 P_0 是有限生成投射模.
(2) 存在正合列 $0 \longrightarrow R \longrightarrow X_0 \longrightarrow 0$ 使得 X_0 是有限个 X 直和的直和因子.

将上述观察稍作推广便得到了 (经典) 倾斜模的概念.

Definition 1 (倾斜模)**.** 设 R 是含幺环, T_R 是右 R-模, 称 T 是**倾斜模** (tilting module), 如果
(T1) 模 T 有投射分解 $0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow T \longrightarrow 0$ 使得 P_0, P_1 都是有限生成投射模.
(T2) 模 T 是自正交的, 即 $\mathrm{Ext}^1_R(T, T) = 0$.
(T3) 存在正合列 $0 \longrightarrow R \longrightarrow T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow 0$ 使 T_0, T_1 都是 (同构于) 有限个 T 直和的直和因子.

Remark 2. 条件 (T1) 蕴含 T 是有限生成模. 根据前面的讨论, 易见有限生成投射生成子的倾斜模. Miyashita 在 [Miy86] 中定义了更一般的倾斜模：给定自然数 n, 称右 R-模 T 是**投射维数不超过 n 的倾斜模** (也有文献称为**经典 n-倾斜模**), 如果 T 有投射分解

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

满足 $P_i (0 \leq k \leq n)$ 都是有限生成投射模; $\mathrm{Ext}^k_R(T, T) = 0, \forall 1 \leq k \leq n$; 存在正合列

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_n \longrightarrow 0$$

满足 $T_i (0 \leq k \leq n)$ 都是有限个 T 直和的直和因子. 于是, 当 $n = 0$ 时, T 就是有限生成投射生成子. 当 $n = 1$ 时, T 就是经典的倾斜模.

Notation. 设 R, R' 是含幺环. 对任给右 R-模 T, 置

$$\mathbf{KE}_T(0) = \{M \in \mathrm{ob}\mathbf{Mod}\text{-}R | \mathrm{Ext}^1_R(T, M) = 0\},$$

$$\mathbf{KE}_T(1)=\{M\in \mathrm{ob}\mathbf{Mod}\text{-}R|\mathrm{Hom}_R(T,M)=0\},$$

对任给左 R'-模 T, 置

$$\mathbf{KT}_T(0)=\{M\in \mathrm{ob}\mathbf{Mod}\text{-}R'|\mathrm{Tor}^1_{R'}(M,T)=0\},$$

$$\mathbf{KT}_T(1)=\{M\in \mathrm{ob}\mathbf{Mod}\text{-}R'|M\otimes_{R'}T=0\}.$$

将它们都视作所在模范畴内的全子范畴. 一般地, 对自然数 $i,n\geq 0$, 置

$$\mathbf{KE}^n_T(i)=\{M\in \mathrm{ob}\mathbf{Mod}\text{-}R|\mathrm{Ext}^k_R(T,M)=0,\forall 0\leq k\leq i+n,k\neq i\},$$

$$\mathbf{KT}^n_T(i)=\{M\in \mathrm{ob}\mathbf{Mod}\text{-}R'|\mathrm{Tor}^k_{R'}(M,T)=0,\forall 0\leq k\leq i+n,k\neq i\}.$$

当 $n=1$ 且 T_R 是倾斜模时, 易见 $\mathbf{KE}^1_T(i)=\mathbf{KE}_T(i),\mathbf{KT}^1_T(i)=\mathbf{KT}_T(i),i\in\{0,1\}$.

这份笔记的主要目标是证明下述定理 (若这里的环取为有限维代数, 就得到 [ASS06] 中的版本).

Brenner-Butler Theorem. 设 R 是含幺环, T_R 是倾斜模, $R'=\mathrm{End}(T_R)$, 自然数 $i\in\{0,1\}$, 那么函子 $\mathrm{Ext}^i_R(T_R,-)$ 与 $\mathrm{Tor}^{R'}_i(-,T)$ 给出范畴 $\mathbf{KE}_{T_R}(i)$ 与 $\mathbf{KT}_{_{R'}T}(i)$ 之间的范畴等价. 具体地, 有:
(1) 函子 $\mathrm{Hom}_R(T_R,-)$ 与 $-\otimes_{R'}T$ 给出范畴 $\mathbf{KE}_{T_R}(0)$ 与 $\mathbf{KT}_{_{R'}T}(0)$ 之间的范畴等价;
(2) 函子 $\mathrm{Ext}^1_R(T_R,-)$ 与 $\mathrm{Tor}^{R'}_1(-,T)$ 给出范畴 $\mathbf{KE}_{T_R}(1)$ 与 $\mathbf{KT}_{_{R'}T}(1)$ 之间的范畴等价.

Remark 3. 若 T_R 是 $\mathbf{Mod}\text{-}R$ 中的有限生成投射生成子, 那么对 $R'=\mathrm{End}(T_R)$, Morita 理论告诉我们 $\mathrm{Hom}_R(T_R,-)$ 与 $-\otimes_{R'}T$ 给出范畴 $\mathbf{Mod}\text{-}R$ 和 $\mathbf{Mod}\text{-}R'$ 间的范畴等价. 注意到这时

$$\mathbf{KE}_T(0)=\{M\in \mathrm{ob}\mathbf{Mod}\text{-}R|\mathrm{Ext}^1_R(T,M)=0\}=\mathbf{Mod}\text{-}R,$$

$$\mathbf{KT}_T(0)=\{M\in \mathrm{ob}\mathbf{Mod}\text{-}R'|\mathrm{Tor}^1_{R'}(M,T)=0\}=\mathbf{Mod}\text{-}R',$$

所以 Brenner-Butler 定理覆盖了 Morita 等价理论中的经典结论.

在 [Miy86] 中, Miyashita 将经典 Brenner-Butler 定理推广为下述形式:

Generalized Brenner-Butler Theorem. 设 R 是含幺环, n 是自然数, 右 R-模 T_R 是投射维数不超过 n 的倾斜模, 并置 $R'=\mathrm{End}(T_R)$. 那么对任给自然数 $0\leq i\leq n$ 函子 $\mathrm{Ext}^i_R(T_R,-)$ 与 $\mathrm{Tor}^{R'}_i(-,T)$ 给出范畴 $\mathbf{KE}^n_{T_R}(i)$ 与 $\mathbf{KT}^n_{_{R'}T}(i)$ 之间的范畴等价.

Remark 4. 前面已经指出当 $n=1$ 时, 该定理退化为经典 Brenner-Butler 定理, 下文也只关注该定理在 $n=1$ 情形的证明, 关于该推广版本的证明细节可参见 [Miy86, Theorem 1.16].

2 基本准备

虽然 Brenner-Butler 定理的证明很初等, 只需要初级同调代数知识, 但仍需要做一些基本准备.

对任何右 R-模 M, M 都可天然视作自同态环 $R'=\mathrm{End}M_R$ 上的左模, 下述引理表明倾斜模作为其自同态环上的模享有类似倾斜模本身的性质, 保留了有限生成投射生成子的部分特征.

Lemma 5. 设 R 是含幺环, T_R 是倾斜模, $R' = \mathrm{End}(T_R)$, 将 T 视作左 R'-模, 那么 ${}_{R'}T$ 满足：
(1) 左 R'-模 T 有投射分解 $0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow T \longrightarrow 0$ 使得 P_0, P_1 都是有限生成左 R'-投射模.
(2) 左 R'-模 T 满足 $\mathrm{Ext}^1_{R'}(T,T) = 0$.
(3) 存在左 R'-模正合列 $0 \longrightarrow R' \longrightarrow T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow 0$ 使得 T_0, T_1 都是有限个 ${}_{R'}T$ 的直和的直和因子. 并且 $R \to \mathrm{End}({}_{R'}T), a \mapsto a_r$ 给出反环同构 (也是右 R-模同构), 其中 a_r 表示元素 a 决定的右乘变换.

Proof. 由 (TR3), 存在右 R-模正合列 $0 \longrightarrow R \longrightarrow T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow 0$ 使得 T_0, T_1 都是有限个 T 的直和的直和因子. 所以利用 (T2) 易知 $\mathrm{Ext}^1_R(T_0,T) = \mathrm{Ext}^1_R(T_1,T) = 0$, 进而可得短正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T_1,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T_0,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R,T) \longrightarrow 0.$$

其中 $\mathrm{Hom}_R(R,T)$ 作为左 R'-模同构于 ${}_{R'}T$. 利用 T_0, T_1 是有限个 T_R 直和的直和因子可直接验证 $\mathrm{Hom}_R(T_0,T)$ 与 $\mathrm{Hom}_R(T_1,T)$ 作为左 R'-模均为 R' 上有限生成自由模的直和因子, 进而得到 ${}_{R'}T$ 的有限生成投射分解：

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T_1,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T_0,T) \longrightarrow T \longrightarrow 0.$$

由 (T1), T_R 有投射分解 $0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow T \longrightarrow 0$ 使得 P_0, P_1 都是有限生成投射模, 同样使用函子 $\mathrm{Hom}_R(-,T)$ 作用之, 结合 (T2) 可得短正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_0,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_1,T) \longrightarrow 0,$$

利用 P_0, P_1 是形如 R^m 的自由模的直和因子易得 $\mathrm{Hom}_R(P_0,T)$ 与 $\mathrm{Hom}_R(P_1,T)$ 同构于有限个 ${}_{R'}T$ 直和的直和因子. 最后还需证明 $a \mapsto a_r$ 给出反环同构 $R \cong \mathrm{End}({}_{R'}T)$. 对左 R-模 X, 作

$$\Theta_X : X \to \mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Hom}_R(X,T),T)$$

是满足 $\Theta_X(x)(g) = g(x), \forall g \in \mathrm{Hom}_R(X,T)$ 的右 R-模同态, 易知 Θ 关于 X 是自然的. 通过直接计算可验证当 $X = T^m$ 时 Θ_X 是同构, 进而再验证当 X 是有限个 T 直和的直和因子时, Θ_X 也是同构. 考虑下述交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Hom}_R(R,T),T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Hom}_R(T_0,T),T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Hom}_R(T_1,T),T) \\
0 \arrow[r] & R \arrow[u, "\Theta_R"] \arrow[r] & T_0 \arrow[u, "\Theta_{T_0}"] \arrow[r] & T_1 \arrow[u, "\Theta_{T_1}"]
\end{tikzcd}$$

其中上下两行正合. 根据前面的讨论, $\Theta_{T_0}, \Theta_{T_1}$ 均为同构, 所以利用五引理可得 Θ_R 是同构, 同时有自然同构 $\varphi : \mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Hom}_R(R,T),T) \to \mathrm{Hom}_{R'}(T,T)$. 通过直接计算可知 $\varphi\Theta_R : R \to \mathrm{End}({}_{R'}T)$ 就是 R 中元素诱导的右乘变换决定的映射, 它又是加群同构, 由此得到 (3). 同时, 注意到 T_0 到 T_1 的同态是满的, 所以事实上我们有下述交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Hom}_R(R,T),T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Hom}_R(T_0,T),T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Hom}_R(T_1,T),T) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[u, "\Theta_R"] \arrow[r] & T_0 \arrow[u, "\Theta_{T_0}"] \arrow[r] & T_1 \arrow[u, "\Theta_{T_1}"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

该图表明 $\mathrm{Ext}^1_{R'}(T,T) \cong \mathrm{Ext}^1_{R'}(\mathrm{Hom}_R(R,T),T) = 0$, 故 (2) 成立. $\square$

若 R-模 M 存在形如 $P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 的短正合列, 其中 P_0, P_1 是有限生成投射模, 则称 M 有**有限投射表现**. 若这里的 P_0, P_1 是有限生成自由模, 称 M 有**有限自由表现**或**有限表现**.

Example 6. 对含幺环 R 上倾斜模 T_R, 根据 (TR3), T 有形如

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

的投射分解, 所以倾斜模是有有限投射表现的模.

Lemma 7. 设 R, R' 是含幺环, ${}_{R'}X$ 是左 R'-模, ${}_{R'}Y_R$ 是 R'-R 双模, Z_R 是右 R-模, 则有加群同态

$$\eta_{X,Y,Z} : \mathrm{Hom}_R(Y,Z) \otimes_{R'} X \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_{R'}(X,Y),Z)$$

满足 $\eta_{X,Y,Z}(f \otimes x) : \mathrm{Hom}_{R'}(X,Y) \to Z, g \mapsto f(g(x)), \forall f \in \mathrm{Hom}_R(Y,Z), x \in X$. 那么 $\eta_{X,Y,Z}$ 对变量 X, Y, Z 都是自然的, 并且当 X 是有有限投射表现的模且 Z 是内射模时, $\eta_{X,Y,Z}$ 是同构.

Proof. 这里仅列出证明概要. $\eta_{X,Y,Z}$ 对变量 X, Y, Z 的自然性可通过直接计算验证得到. 对于后一结论, 先对 $X = R'$ 的情形证明, 再借助张量函子保持余积得到 X 是有限生成自由模时 $\eta_{X,Y,Z}$ 是同构 (这里不需要 Z 是内射模这一条件). 再考虑 X 是有有限表现模的情形, 设有正合列 $(R')^m \longrightarrow (R')^n \longrightarrow X \longrightarrow 0$, 分别用函子 $\mathrm{Hom}_R(Y,Z) \otimes_{R'} -$ 与 $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_{R'}(-,Y),Z)$ 作用之, 得到下图:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_{R'}((R')^m,Y),Z) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_{R'}((R')^n,Y),Z) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_{R'}(X,Y),Z) \arrow[r] & 0 \\
\mathrm{Hom}_R(Y,Z) \otimes_{R'} (R')^m \arrow[r] \arrow[u, "\eta_{(R')^m,Y,Z}"] & \mathrm{Hom}_R(Y,Z) \otimes_{R'} (R')^n \arrow[r] \arrow[u, "\eta_{(R')^n,Y,Z}"] & \mathrm{Hom}_R(Y,Z) \otimes_{R'} X \arrow[r] \arrow[u, "\eta_{X,Y,Z}"'] & 0
\end{tikzcd}$$

其中上下两行均为正合列 (这里用到了 Z 是内射模), 进而通过五引理以及 $\eta_{(R')^m,Y,Z}, \eta_{(R')^n,Y,Z}$ 是同构知 $\eta_{X,Y,Z}$ 是同构. 特别地, 只要 X 是有限生成投射模, 就有 $\eta_{X,Y,Z}$ 是同构. 最后, 设 X 是有有限投射表现的模, 那么存在正合列 $P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 满足 P_0, P_1 是有限生成投射模, 同样用函子 $\mathrm{Hom}_R(Y,Z) \otimes_{R'} -$ 与 $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_{R'}(-,Y),Z)$ 作用之, 同理可得 $\eta_{X,Y,Z}$ 是同构. $\square$

Corollary 8. 设 R, R' 是含幺环, ${}_{R'}X$ 是有限生成左 R'-模满足有有限生成的投射分解, ${}_{R'}Y_R$ 是 R'-R 双模. 那么对正整数 $i \geq 1$, $\mathrm{Ext}^i_{R'}(X,Y) = 0$ 的充要条件是 $\mathrm{Tor}_i^{R'}(\mathrm{Hom}_R(Y,Z),X) = 0$ 对任何内射右 R-模 Z 成立.

Lemma 9. 设 R, R' 是含幺环, X_R 是有限生成右 R-模, ${}_{R'}Y_R$ 是 R'-R 双模, $Z_{R'}$ 是右 R'-模, 则有加群同态

$$\theta_{X,Y,Z} : Z \otimes_{R'} \mathrm{Hom}_R(X,Y) \to \mathrm{Hom}_R(X, Z \otimes_{R'} Y)$$

满足 $\theta_{X,Y,Z}(z \otimes f) : X \to Z \otimes_{R'} Y, x \mapsto z \otimes f(x)$. 那么 $\zeta_{X,Y,Z}$ 对变量 X, Y, Z 都是自然的, 并且当 Z 是投射模时, $\theta_{X,Y,Z}$ 是同构.

Proof. 这里仅列出证明概要. $\eta_{X,Y,Z}$ 对变量 X, Y, Z 的自然性可直接验证. 对后一结论, 先对 $Z = R'$ 的情形证明, 再借助张量函子保持余积以及条件中 X 是有限生成模 (那么 Hom 第二个变量取直和可以提出) 可得当 Z 是自由 R'-模时 $\eta_{X,Y,Z}$ 是同构. 再利用投射模是自由模直和因子过渡到最终结论. $\square$

Corollary 10. 设 R, R' 是含幺环, X_R 是有限生成右 R-模满足有有限生成的投射分解, ${}_{R'}Y_R$ 是 R'-R 双模, 那么对正整数 $i \geq 1$, $\mathrm{Ext}^i_R(X,Y) = 0$ 的充要条件是 $\mathrm{Ext}^i_R(X, Z \otimes_{R'} Y) = 0$ 对任何投射右 R'-模 Z 成立.

3 Brenner-Butler 定理的证明

现在我们为证明 Brenner-Butler 定理做好了充分准备.

Brenner-Butler Theorem. 设 R 是含幺环, T_R 是倾斜模, $R' = \mathrm{End}(T_R)$, 自然数 $i \in \{0, 1\}$, 那么函子 $\mathrm{Ext}^i_R(T_R, -)$ 与 $\mathrm{Tor}^{R'}_i(-, T)$ 给出范畴 $\mathbf{KE}_{T_R}(i)$ 与 $\mathbf{KT}_{{}_{R'}T}(i)$ 之间的范畴等价. 具体地, 有:
(1) 函子 $\mathrm{Hom}_R(T_R, -)$ 与 $- \otimes_{R'} T$ 给出范畴 $\mathbf{KE}_{T_R}(0)$ 与 $\mathbf{KT}_{{}_{R'}T}(0)$ 之间的范畴等价, 并且自然同构

$$\mathrm{Hom}_R(T_R, -) \otimes_{R'} T \cong 1_{\mathbf{KE}_{T_R}(0)}$$

可如下给出:

$$\xi : \mathrm{ob}\mathbf{KE}_{T_R}(0) \to \bigcup_{Z \in \mathrm{ob}\mathbf{KE}_{T_R}(0)} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(T, Z) \otimes_{R'} T, Z), Z \mapsto \xi_Z$$

其中 $\xi_Z : \mathrm{Hom}_R(T, Z) \otimes_{R'} T \to Z, f \otimes t \mapsto f(t)$. 自然同构 $\mathrm{Hom}_R(T_R, - \otimes_{R'} T) \cong 1_{\mathbf{KT}_{{}_{R'}T}(0)}$ 可如下给出:

$$\zeta : \mathrm{ob}\mathbf{KT}_{{}_{R'}T}(0) \to \bigcup_{Z \in \mathrm{ob}\mathbf{KT}_{{}_{R'}T}(0)} \mathrm{Hom}_{R'}(Z, \mathrm{Hom}_R(T_R, Z \otimes_{R'} T)), Z \mapsto \zeta_Z$$

其中 $\zeta_Z : Z \to \mathrm{Hom}_R(T_R, Z \otimes_{R'} T)), z \mapsto \zeta_Z(z)$, 这里 $\zeta_Z(z) : T \to Z \otimes_{R'} T, t \mapsto z \otimes t$.
(2) 函子 $\mathrm{Ext}^1_R(T_R, -)$ 与 $\mathrm{Tor}^{R'}_1(-, T)$ 给出范畴 $\mathbf{KE}_{T_R}(1)$ 与 $\mathbf{KT}_{{}_{R'}T}(1)$ 之间的范畴等价.

Proof. (1) 先说明对每个右 R-模 $Z \in \mathbf{KE}_{T_R}(0)$ 有 $\mathrm{Hom}_R(T, Z) \in \mathbf{KT}_T(0)$. 设 Z 有内射分解

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \cdots,$$

用函子 $\mathrm{Hom}_R(T, -)$ 作用之, 得到右 R'-模同态序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T, Z) \xrightarrow{j_*} \mathrm{Hom}_R(T, I^0) \xrightarrow{(d^0)_*} \mathrm{Hom}_R(T, I^1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T, I^2) \longrightarrow \cdots$$

并设 $d^0 : I^0 \to I^1$ 有下述满单分解:

$$\begin{tikzcd} I^0 \arrow[rr, "d^0"] \arrow[dr, "p"'] & & I^1 \\ & W \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd}$$

考虑短正合列 $0 \longrightarrow Z \longrightarrow I^0 \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0$ 关于右 R-模 T 诱导的 Ext 群长正合列, 利用 $Z \in \mathbf{KE}_{T_R}(0)$ 立即看到 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T, I^0) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_R(T, W) \longrightarrow 0$ 是右 R'-模正合列. 对 [推论8] 取 $X = {}_{R'}T, Y = {}_{R'}T_R$ 结合 (T2) 知对每个内射右 R-模 I, 有 $\mathrm{Hom}_R(T, I) \in \mathbf{KT}_T(0)$. 进而由 [引理5(1)] 得到 $\mathrm{Hom}_R(T, Z) \in \mathbf{KT}_T(0)$(同理可知 $\mathrm{Hom}_R(T, W) \in \mathbf{KT}_T(0)$). 所以 $\mathrm{Hom}_R(T_R, -)$ 可视作 $\mathbf{KE}_{T_R}(0)$ 到 $\mathbf{KT}_{{}_{R'}T}(0)$ 的函子. 对偶地, 利用 [引理5(1)] 以及 [推论8] 可证对任何右 R'-模 $Z \in \mathbf{KT}_{{}_{R'}T}(0)$ 有 $Z \otimes_{R'} T \in \mathbf{KE}_{T_R}(0)$, 即 $- \otimes_{R'} T$ 也可以视作 $\mathbf{KT}_{{}_{R'}T}(0)$ 到 $\mathbf{KE}_{T_R}(0)$ 的函子 (同样先取定 $Y_{R'}$ 的投射分解, 再用张量函子 $- \otimes_{R'} T$ 作用去验证). 下面说明有自然同构 $\mathrm{Hom}_R(T_R, -) \otimes_{R'} T \cong 1_{\mathbf{KE}_{T_R}(0)}$. 之前已经说明了 $\mathrm{Hom}_R(T, W) \in \mathbf{KT}_T(0)$, 所以考虑短正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T, I^0) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_R(T, W) \longrightarrow 0$$

所诱导的 Tor 群长正合列, 立即得到正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T,Z)\otimes_{R'} T \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T,I^0)\otimes_{R'} T \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T,W)\otimes_{R'} T \longrightarrow 0,$$

结合 $l_*\otimes \mathrm{id}_T : \mathrm{Hom}_R(T,W)\otimes_{R'} T \to \mathrm{Hom}_R(T,I^1)\otimes_{R'} T$ 是单射, 得到正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T,Z)\otimes_{R'} T \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T,I^0)\otimes_{R'} T \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T,I^1)\otimes_{R'} T$$

考虑 [引理7] 中所定义的加群同态 η, 可得下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(T,Z)\otimes_{R'} T \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{T,T,Z}"'] & \mathrm{Hom}_R(T,I^0)\otimes_{R'} T \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{T,T,I^0}"'] & \mathrm{Hom}_R(T,I^1)\otimes_{R'} T \arrow[d, "\eta_{T,T,I^1}"'] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_{R'}(T,T),Z) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_{R'}(T,T),I^0) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_{R'}(T,T),I^1)
\end{tikzcd}$$

这里上下两行正合 (下行正合的原因是 $\mathrm{Hom}_{R'}(T,T)\cong R$ 是投射模), 在 [引理7] 中我们看到 $\eta_{T,T,I^0},\eta_{T,T,I^1}$ 都是同构, 所以由五引理立即得到 $\eta_{T,T,Z}$ 也是同构. 再将 $\eta_{T,T,Z}$ 合成上自然同构 $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_{R'}(T,T),Z)\cong Z$ 可得右 R-模同构 $\xi_Z : \mathrm{Hom}_R(T,Z)\otimes_{R'} T \to Z, f\otimes t \mapsto f(t)$. 易见

$$\xi : \mathrm{ob}\mathbf{KE}_{T_R}(0) \to \bigcup_{Z\in \mathrm{ob}\mathbf{KE}_{T_R}(0)} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(T,Z)\otimes_{R'} T, Z), Z\mapsto \xi_Z$$

是自然变换, 进而 ξ 是函子 $\mathrm{Hom}_R(T_R,-)\otimes_{R'} T$ 到恒等函子 $1_{\mathbf{KE}_{T_R}(0)}$ 的自然同构. 为了说明 $\mathrm{Hom}_R(T_R,-)$ 与 $-\otimes_{R'} T$ 是 $\mathbf{KE}_{T_R}(0)$ 与 $\mathbf{KT}_{_{R'}T}(0)$ 之间的范畴等价, 还需验证自然同构 $\mathrm{Hom}_R(T_R,-\otimes_{R'} T)\cong 1_{\mathbf{KT}_{_{R'}T}(0)}$.

对每个右 R'-模 $Z\in \mathbf{KT}_{_{R'}T}(0)$, 取定 Z 的投射分解 $\cdots \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{d_1} Q_0 \longrightarrow Z \longrightarrow 0$, 并设 d_1 有下述满单分解:

$$\begin{tikzcd}
Q_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "e"'] & & Q_0 \\
& K \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

那么有正合列 $0 \longrightarrow K\otimes_{R'} T \longrightarrow Q_0\otimes_{R'} T \longrightarrow Z\otimes_{R'} T \longrightarrow 0$. 由 [推论10] 可知 $K\otimes_{R'} T \in \mathbf{KE}_{T_R}(0))$, 由此得到正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T,K\otimes_{R'} T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T,Q_0\otimes_{R'} T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T,Z\otimes_{R'} T) \longrightarrow 0\ ,$$

于是有正合列 $\mathrm{Hom}_R(T,Q_1\otimes_{R'} T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T,Q_0\otimes_{R'} T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T,Z\otimes_{R'} T) \longrightarrow 0$. 考虑 [引理9] 中的加群同态, 我们有下面的交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(T,Q_1\otimes_{R'} T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(T,Q_0\otimes_{R'} T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(T,Z\otimes_{R'} T) \arrow[r] & 0 \\
Q_1\otimes_{R'} \mathrm{Hom}_R(T,T) \arrow[r] \arrow[u, "\theta_{T,T,Q_0}"] & Q_0\otimes_{R'} \mathrm{Hom}_R(T,T) \arrow[r] \arrow[u, "\theta_{T,T,Q_0}"] & Z\otimes_{R'} \mathrm{Hom}_R(T,T) \arrow[r] \arrow[u, "\theta_{T,T,Z}"] & 0
\end{tikzcd}$$

其中上下两行正合且 $\theta_{T,T,Q_0},\theta_{T,T,Q_1}$ 都是同构, 所以应用五引理得到 $\theta_{T,T,Z}$ 也是同构. 再将自然同构 $Z\cong Z\otimes_{R'} \mathrm{Hom}_R(T,T)$ 与 $\theta_{T,T,Z}$ 合成得到右 R'-模同构 $\zeta_Z : Z \to \mathrm{Hom}_R(T_R, Z\otimes_{R'} T)), z\mapsto \zeta_Z(z)$, 这里 $\zeta_Z(z) : T \to Z\otimes_{R'} T, t\mapsto z\otimes t$. 这给出自然同构

$$\zeta : \mathrm{ob}\mathbf{KT}_{_{R'}T}(0) \to \bigcup_{Z\in \mathrm{ob}\mathbf{KT}_{_{R'}T}(0)} \mathrm{Hom}_{R'}(Z, \mathrm{Hom}_R(T_R, Z\otimes_{R'} T)), Z\mapsto \zeta_Z,$$

所以有自然同构 $\mathrm{Hom}_R(T_R, -\otimes_{R'} T) \cong 1_{\mathbf{KT}_{_{R'}T}(0)}$. 这就证明了 (1).

(2) 先说明 $\mathrm{Ext}^1_R(T,-)$ 可视作从 $\mathbf{KE}_{T_R}(1)$ 到 $\mathbf{KT}_{_{R'}T}(1)$ 的函子. 每个右 R-模 $Z \in \mathbf{KE}_{T_R}(1)$ 指定短正合列 $0 \longrightarrow Z \xrightarrow{j_Z} I_Z \longrightarrow C_Z \longrightarrow 0$ 使得 j_Z 是标准嵌入, I_Z 是内射右 R-模. 由 $\mathrm{Hom}_R(T,Z)=0$ 以及 $\mathrm{Ext}^1_R(T,I_Z)=0$ 易知有正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T,I_Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T,C_Z) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(T,Z) \longrightarrow 0,$$

考察该短正合列关于诱导的 Tor 群长正合列, 可得正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{R'}(\mathrm{Ext}^1_R(T,Z),T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T,I_Z)\otimes_{R'} T \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T,C_Z)\otimes_{R'} T \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(T,Z)\otimes_{R'} T \longrightarrow 0,$$

这里 $\mathrm{Hom}_R(T,C_Z) \in \mathbf{KT}_{_{R'}T}(0)$ 的原因是：$\mathrm{Ext}^1_R(T,I_Z)=0$, 进而 $\mathrm{Ext}^1_R(T,C_Z)=0$, 即 $C_Z \in \mathbf{KE}_{T_R}(0)$, 而由 (1) 知对 $\mathbf{KE}_{T_R}(0)$ 中元素作用 $\mathrm{Hom}_R(T,-)$ 后在 $\mathbf{KT}_{_{R'}T}(0)$ 内. 通过前面的正合列, 可以诱导下述交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mathrm{Tor}_1^{R'}(\mathrm{Ext}^1_R(T,Z),T) \arrow[d] & Z \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_R(T,I_Z)\otimes_{R'} T \arrow[r, "\xi_{I_Z}"] \arrow[d] & I_Z \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_R(T,C_Z)\otimes_{R'} T \arrow[r, "\xi_{C_Z}"] \arrow[d] & C_Z \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^1_R(T,Z)\otimes_{R'} T \arrow[d] & 0 \\
0 &
\end{tikzcd}$$

其中 ξ_{I_Z} 与 ξ_{C_Z} 在 (1) 中证明了是同构, 所以 $\mathrm{Ext}^1_R(T,Z)\otimes_{R'} T = 0$, 由此得到 $\mathrm{Ext}^1_R(T,-)$ 可视作从 $\mathbf{KE}_{T_R}(1)$ 到 $\mathbf{KT}_{_{R'}T}(1)$ 的函子. 于是我们存在唯一的右 R-模同态 $\tau_Z : \mathrm{Tor}_1^{R'}(\mathrm{Ext}^1_R(T,Z),T) \to Z$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mathrm{Tor}_1^{R'}(\mathrm{Ext}^1_R(T,Z),T) \arrow[r, dashed, "\tau_Z"] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_R(T,I_Z)\otimes_{R'} T \arrow[r, "\xi_{I_Z}"] \arrow[d] & I_Z \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_R(T,C_Z)\otimes_{R'} T \arrow[r, "\xi_{C_Z}"] \arrow[d] & C_Z \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

由五引理可知 τ_Z 是同构, 作

$$\tau : \mathrm{ob}\mathbf{KE}_{T_R}(1) \to \bigcup_{Z\in \mathrm{ob}\mathbf{KE}_{T_R}(1)} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tor}_1^{R'}(\mathrm{Ext}^1_R(T,Z),T),Z), Z \mapsto \tau_Z,$$

下面说明 τ 是函子 $\mathrm{Tor}_1^{R'}(\mathrm{Ext}_R^1(T,-),T)$ 到 $1_{\mathbf{KE}_{T_R}(1)}$ 的自然同构. 即要说明对任何右 R-模同态 $\varphi: Z\to Z'$ 有下图交换：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_1^{R'}(\mathrm{Ext}_R^1(T,Z),T) \arrow[r, "\tau_Z"] \arrow[d] & Z \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathrm{Tor}_1^{R'}(\mathrm{Ext}_R^1(T,Z'),T) \arrow[r, "\tau_{Z'}"] & Z'
\end{tikzcd}$$

考虑下图：

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Tor}_1^{R'}(\mathrm{Ext}_R^1(T,Z'),T) \arrow[rr, "\tau_{Z'}"] \arrow[dd, dashed] & & Z' \arrow[dd] \\
\mathrm{Tor}_1^{R'}(\mathrm{Ext}_R^1(T,Z),T) \arrow[ur] \arrow[rr, "\tau_Z"] \arrow[dd] & & Z \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dd] & \\
& \mathrm{Hom}_R(T,I_{Z'})\otimes_{R'}T \arrow[rr, dashed, "\xi_{I_{Z'}}"] & & I_{Z'} \\
\mathrm{Hom}_R(T,I_Z)\otimes_{R'}T \arrow[ur, dashed] \arrow[rr, "\xi_{I_Z}"] & & I_Z \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

右边方块中 I_Z 到 $I_{Z'}$ 的同态由 $I_{Z'}$ 的内射性自然诱导, 故右侧面的方块自然交换, 根据 τ 的定义, 前面的方块与后面的方块都交换, 该图下表面的交换性由 ξ 是自然变换保证. 故由 Z' 到 $I_{Z'}$ 的自然嵌入是单射知要说明该图上表面交换, 只需说明该图左侧面的方块交换. 而左侧面的交换性由复形短正合列诱导长正合列定理中连接同态的自然性保证, 故上图的上表面交换, 由此得到 τ 是自然同构. 由此得到自然同构 $\mathrm{Tor}_1^{R'}(\mathrm{Ext}_R^1(T,-),T)\cong 1_{\mathbf{KE}_{T_R}(1)}$. 为了完成证明, 还需验证自然同构 $\mathrm{Ext}_R^1(T,\mathrm{Tor}_1^{R'}(-,T))\cong 1_{\mathbf{KT}_{R'T}(1)}$. 其证明完全是对偶的, 因此下面仅给出证明概要. 对每个右 R'-模 $Z\in\mathbf{KT}_{R'T}(1)$ 指定短正合列 $0\longrightarrow K_Z\longrightarrow P_Z\longrightarrow Z\longrightarrow 0$, 其中 P_Z 是投射模. 注意到 $P_Z\in\mathbf{KT}_{R'T}(0)$, 所以 $K_Z\in\mathbf{KT}_{R'T}(0)$. 因此利用 $Z\otimes_{R'}T=0$ 知上述短正合列诱导正合列 $0\longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{R'}(Z,T)\longrightarrow K_Z\otimes_{R'}T\longrightarrow P_Z\otimes_{R'}T\longrightarrow 0$. 由 (1) 中证明的结论知 $K_Z\otimes_{R'}T, P_Z\otimes_{R'}T\in\mathbf{KE}_{T_R}(0)$, 所以上述短正合列诱导正合列：

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T,\mathrm{Tor}_1^{R'}(Z,T))\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T,K_Z\otimes_{R'}T)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T,P_Z\otimes_{R'}T)\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(T,\mathrm{Tor}_1^{R'}(Z,T))\longrightarrow 0,$$

考虑下面的交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & \\
\mathrm{Hom}_R(T,\mathrm{Tor}_1^{R'}(Z,T)) \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_R(T,K_Z\otimes_{R'}T) \arrow[d] & K_Z \arrow[l, "\zeta_{K_Z}"'] \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_R(T,P_Z\otimes_{R'}T) \arrow[d] & P_Z \arrow[l, "\zeta_{P_Z}"'] \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}_R^1(T,\mathrm{Tor}_1^{R'}(Z,T)) \arrow[d] & Z \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

在 (1) 中已证 ζ_{K_Z}, ζ_{P_Z} 都是同构, 所以 $\mathrm{Hom}_R(T, \mathrm{Tor}_1^{R'}(Z,T)) = 0$, 这说明 $\mathrm{Tor}_1^{R'}(Z,T) \in \mathrm{ob}\mathbf{KT}_{_{R'}T}(1)$, 进而知 $\mathrm{Tor}_1^{R'}(-,T)$ 可视作从 $\mathbf{KT}_{_{R'}T}(1)$ 到 $\mathbf{KE}_{T_R}(1)$ 的函子. 此外, 存在唯一的右 R'-模同态 $\sigma_Z : Z \to \mathrm{Ext}_R^1(T, \mathrm{Tor}_1^{R'}(Z,T))$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_R(T, K_Z \otimes_{R'} T) \arrow[d] & K_Z \arrow[l, "\zeta_{K_Z}"'] \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_R(T, P_Z \otimes_{R'} T) \arrow[d] & P_Z \arrow[l, "\zeta_{P_Z}"'] \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}_R^1(T, \mathrm{Tor}_1^{R'}(Z,T)) \arrow[d] & Z \arrow[l, dashed, "\sigma_Z"'] \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

由五引理知 σ_Z 是同构. 再置

$$\sigma : \mathrm{ob}\mathbf{KT}_{_{R'}T}(1) \to \bigcup_{Z \in \mathrm{ob}\mathbf{KT}_{_{R'}T}(1)} (Z, \mathrm{Ext}_R^1(T, \mathrm{Tor}_1^{R'}(Z,T))), Z \mapsto \sigma_Z,$$

和 τ 类似可直接验证 σ 是自然同构. 于是得到自然同构 $\mathrm{Ext}_R^1(T, \mathrm{Tor}_1^{R'}(-,T)) \cong 1_{\mathbf{KT}_{_{R'}T}(1)}$. $\square$

参考文献

[APR79] Maurice Auslander, María Inés Platzeck, and Idun Reiten. Coxeter functors without diagrams. *Transactions of the American Mathematical Society*, 250:1–46, 1979.

[ASS06] Ibrahim Assem, Daniel Simson, and Andrzej Skowronski. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1: Techniques of Representation Theory*. Cambridge University Press, 2006.

[BB06] Sheila Brenner and Michael CR Butler. Generalizations of the bernstein-gelfand-ponomarev reflection functors. In *Representation Theory II: Proceedings of the Second International Conference on Representations of Algebras Ottawa, Carleton University, August 13–25, 1979*, pages 103–169. Springer, 2006.

[BGP73] IN Bernstein, Israil’M Gel’fand, and Vladimir A Ponomarev. Coxeter functors and gabriel’s theorem. *Russian mathematical surveys*, 28(2):17, 1973.

[CPS86] Edward Cline, Brian Parshall, and Leonard Scott. Derived categories and morita theory. *Journal of Algebra*, 104(2):397–409, 1986.

[Gab72] Peter Gabriel. Unzerlegbare darstellungen i. *Manuscripta mathematica*, 6:71–103, 1972.

[Hap87] Dieter Happel. On the derived category of a finite-dimensional algebra. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 62(1):339–389, 1987.

[HR82] Dieter Happel and Claus Michael Ringel. Tilted algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 274(2):399–443, 1982.

[Miy86] Yoichi Miyashita. Tilting modules of finite projective dimension. *Mathematische Zeitschrift*, 193:113–146, 1986.

[Mor58] Kiiti Morita. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A*, 6(150):83–142, 1958.

[Ric89] Jeremy Rickard. Morita theory for derived categories. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(3):436–456, 1989.